MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

Tomo XLIV

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
MDCCCXCIV

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XLIV

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

MDCCCXCIV

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 1° OTTOBRE MDCCCXCIV.

Presidente

Vice-Presidente

Carle (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Leggi, Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore della Istruzione Pubblica, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✻, e ✠.

Tesoriere

Camerano (Lorenzo), Dott. aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Membro della Società Zoologica di Francia, Membro corrispondente della Società Zoologica di Londra.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

D'Ovidio (Dott. Enrico), Professore di Algebra e Geometria analitica, incaricato di Analisi superiore e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio dell'Accademia Pontaniana, ecc., Uffiz. ✠, Comm. ✠.

Segretario

Basso (Giuseppe), Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Professore di Fisica nella R. Accademia Militare, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Membro della Società degli Spettroscopisti Italiani, ✠, ✠.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo *Cavour* di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze Naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro Corrispondente della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, e della Reale Società delle Scienze Naturali delle Indie Neerlandesi, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio Straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo).

Cossa (Alfonso), Dottore in Medicina, Direttore della Regia Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Torino, Professore di Chimica docimastica nella medesima Scuola, e di Chimica minerale presso il R. Museo Industriale Italiano, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, e della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio ordinario non residente dell'Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali di Napoli, Presidente della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, e Socio dell'Accademia Gioenia di Catania, Socio effettivo della Società Imperiale Mineralogica di Pietroburgo, Comm. ✻, ✠, e dell'O. d'Is. Catt. di Sp.

Berruti (Giacinto), Direttore del R. Museo Industriale Italiano, e dell'Officina governativa delle Carte-Valori, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Gr. Uffiz. ✠; Comm. ✻, dell'O. di Francesco Giuseppe d'Austria, della L. d'O. di Francia, e della Repubblica di S. Marino.

Siacci (Francesco), Senatore del Regno, Tenente Colonnello d'Artiglieria della Riserva, Professore ordinario di Meccanica razionale nella R. Università di Napoli (già di Meccanica superiore in quella di Torino), Professore onorario della R. Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, e Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Uff. ✻, Comm. ✠.

Basso (Giuseppe), *predetto.*

D'Ovidio (Enrico), *predetto.*

Bizzozero (Giulio), Senatore del Regno, Professore e Direttore del Laboratorio di Patologia generale nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e delle RR. Accademie di Medicina e di Agricoltura di Torino, Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum,* Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro del Consiglio Superiore di Sanità, ecc. Uffiz. ✻ e Comm. ✠.

Ferraris (Galileo), Ingegnere, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Università di Torino, Prof. di Fisica tecnica e Direttore del Laboratorio di Elettrotecnica nel R. Museo Industriale Italiano, Prof. di Fisica nella R. Scuola di Guerra, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino; Socio Straniero dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, Membro onorario della Società di Fisica di Francoforte sul Meno, e dell'Associazione degli Ingegneri elettricisti dell'Istituto Montefiore di Liegi; Uff. ✻; Comm. ✠, dell'O. di Franc. Gius. d'Austria e dell'O. reale della Corona di Prussia.

NACCARI (Andrea), Dottore in Matematica, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, e della R. Accademia dei Lincei, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, Uffiz. ✻, ⚜.

Mosso (Angelo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Fisiologia nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Medicina di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina Germanica Naturae Curiosorum*, della Società Reale di Scienze mediche e naturali di Bruxelles, ecc. ecc., ✻, Comm. ⚜.

SPEZIA (Giorgio), Ingegnere, Professore di Mineralogia, e Direttore del Museo mineralogico della Regia Università di Torino, ⚜.

GIBELLI (Giuseppe), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Botanica, e Direttore dell'Orto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✻, ⚜.

GIACOMINI (Carlo), Dott. aggregato in Medicina e Chirurgia, Prof. di Anatomia umana, descrittiva, topografica ed Istologia, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio della R. Accademia di Medicina di Torino, e Direttore dell'Istituto Anatomico della Regia Università di Torino, ✻, ⚜.

CAMERANO (Lorenzo), *predetto*.

SEGRE (Corrado), Dott. in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, ⚜.

PEANO (Giuseppe), Dottore in Matematica, Prof. di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

MENABREA (S. E. Conte Luigi Federigo), Marchese di Val Dora, Senatore del Regno, Professore emerito di Costruzioni nella R. Università di Torino, Tenente Generale, Primo Aiutante di campo Generale Onorario di S. M., Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), Membro Onorario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Lettere e Scienze di Modena, Uffiziale della Pubblica Istruzione di Francia, ecc.; C. O. S. SS. N., Gr. Cr. e Cons. ✻, Cav. e Cons. ♕, Gr. Cr. ✠, ⚜, dec. della Medaglia d'oro al Valor Militare e della Med. d'oro Mauriziana; Gr. Cr. dell'O. Supr. del Serafino di Svezia, dell'O. di S. Alessandro Newski

di Russia, di Danebrog di Danim., Gr. Cr. dell'O. di Torre e Spada di Portogallo, dell'O. del Leone Neerlandese, di Leop. del Belg. (Categ. Militare), della Probità di Sassonia, della Corona di Wurtemberg, e di Carlo III di Sp., Gr. Cr. dell'O. di S. Stefano d'Ungheria, dell'O. di Leopoldo d'Austria, di quelli della Fedeltà e del Leone di Zähringen di Baden, Gr. Cr. dell'Ordine del Salvatore di Grecia, Gr. Cr. dell'Ordine di S. Marino, Gr. Cr. degli Ordini del Nisham *Ahid* e del Nisham *Iftigar* di Tunisi, Gr. Cr. dell'Ordine della L. d'O. di Francia, di Cristo di Portogallo, del Merito di Sassonia, di S. Giuseppe di Toscana, Dottore in Leggi, *honoris causa*, delle Università di Cambridge e di Oxford, ecc., ecc.

Brioschi (Francesco), Senatore del Regno, Direttore del R. Istituto tecnico superiore di Milano, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Reale Accademia delle Scienze di Napoli, dell'Istituto di Bologna, ecc., Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Geometria), e delle Reali Accademie delle Scienze di Berlino, di Gottinga, di Pietroburgo, del Belgio, di Praga, di Erlangen, ecc., Dottore *ad honorem* delle Università di Heidelberg e di Dublino, Membro delle Società Matematiche di Parigi e di Londra e delle Filosofiche di Cambridge e di Manchester, Gr. Cord. ✱, della Legion d'Onore; ♛, ✠, Comm. dell'O. di Cr. di Port.

Cannizzaro (Stanislao), Senatore del Regno, Professore di Chimica generale nella R. Università di Roma, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, di Vienna, e di Pietroburgo, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze di Baviera e della Società Reale di Londra, Comm. ✱, Gr. Uffiz. ♛; ✠.

Schiaparelli (Giovanni), Direttore del R. Osservatorio astronomico di Milano, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei, dell'Accademia Reale di Napoli e dell'Istituto di Bologna, Socio Corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Astronomia), delle Accademie di Monaco, di Vienna, di Berlino, di Pietroburgo, di Stockolma, di Upsala, di Cracovia, della Società de' Naturalisti di Mosca, e della Società astronomica di Londra, Gr. Cord. ♛; Comm. ✱; ✠.

Cremona (Luigi), Senatore del Regno, Professore di Matematica superiore nella R. Università di Roma, Direttore della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Vice Presidente del Consiglio Superiore dell'Istruzione Pubblica, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, dell'Accademia dell'Istituto di Bologna, delle Società Reali di Londra, di Edimburgo, di Gottinga, di Praga, di Liegi e di Copenaghen, delle Società matematiche di Londra, di Praga e di Parigi, delle Reali Accademie di Napoli, di Amsterdam e di Monaco, Membro onorario dell'Insigne Accademia romana di Belle Arti detta di San Luca, della Società Filosofica di Cambridge e dell'Associazione britannica pel progresso delle Scienze,

Membro Straniero della Società delle Scienze di Harlem, Socio Corrispondente delle Reali Accademie di Berlino e di Lisbona, Dottore (LL. D.) dell'Università di Edimburgo, Dottore (D. Sc.) dell'Università di Dublino, Professore emerito nell'Università di Bologna, Gr. Uffiz. ✠, e ✠, Cav. e Cons. ✠.

Beltrami (Eugenio), Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Lombardo e della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio estero della R. Accademia di Gottinga, Socio Corrispondente della R. Accademia di Berlino, della Società Reale di Napoli, dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze, Sezione di Meccanica), della Società Matematica di Londra, Professore di Fisica matematica nella R. Università di Roma, Comm. ✠; ✠, ✠.

ACCADEMICI STRANIERI

Dana (Giacomo), Professore a New Haven.

Hermite (Carlo), Professore nella Facoltà di Scienze, Parigi.

Weierstrass (Carlo), Professore nell'Università di Berlino.

Thomson (Guglielmo), Professore nell'Università di Glasgow.

Gegenbaur (Carlo), Professore nell'Università di Heidelberg.

Cayley (Arturo), Professore nella Università di Cambridge.

Virchow (Rodolfo), Professore nella Università di Berlino.

Koelliker (Alberto), Professore nell'Università di Würzburg.

CORRISPONDENTI

SEZIONE DI MATEMATICHE PURE

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova *Firenze*

Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di . . . . *Heidelberg*

Schwarz (Ermanno A.), Professore nell'Università di . . . . *Gottinga*

Klein (Felice), Professore nell'Università di . . . . *Gottinga*

Dini (Ulisse), Professore di Analisi superiore nella R. Università di *Pisa*

Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di . . . *Pisa*

Darboux (G. Gastone), dell'Istituto di Francia . . . . . . *Parigi*

Poincaré (G. Enrico), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

Noether (Massimiliano), Professore nell'Università di . . . . *Erlangen*

Bianchi (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . . *Pisa*

SEZIONE DI MATEMATICHE APPLICATE, ASTRONOMIA E SCIENZA DELL'INGEGNERE CIVILE E MILITARE

Fergola (Emanuele), Professore di Analisi superiore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Tacchini (Pietro), Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano *Roma*

Fasella (Felice), Direttore della Scuola navale Superiore di . . *Genova*

Hopkinson (Giovanni), della Società Reale di . . . . *Londra*

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di . . . . . . *Dresda*

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di . . . *Cambridge*

SEZIONE DI FISICA GENERALE E SPERIMENTALE

Blaserna (Pietro), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Roma*

Kohlrausch (Federico), Professore nell'Istituto fisico di . . . *Strasburgo*

Cornu (Maria Alfredo), dell'Istituto di Francia . . . . . . *Parigi*

Felici (Riccardo), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Pisa*

Villari (Emilio), Professore nella R. Università di . . . . . *Napoli*

Roiti (Antonio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

Wiedemann (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . *Lipsia*

Righi (Augusto), Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di . . . . *Bologna*

Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

Hertz (Enrico Rodolfo), Professore nell'Università di . . . . *Bonn*

Bartoli (Adolfo), Professore di Fisica nella R. Università di . *Pavia*

SEZIONE DI CHIMICA GENERALE ED APPLICATA

Bonjean (Giuseppe) . . . . *Chambéry*

Plantamour (Filippo), Prof. di Chimica . . . . *Ginevra*

Will (Enrico), Professore di Chimica . . . . *Giessen*

Bunsen (Roberto Guglielmo), Professore di Chimica . . . . . *Heidelberg*

Berthelot (Marcellino), dell'Istituto di Francia . . . . . . *Parigi*

Paternò (Emanuele), Professore di Chimica nella R. Università di *Palermo*

Körner (Guglielmo), Professore di Chimica organica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in . . . . *Milano*

FRIEDEL (Carlo), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

FRESENIUS (Carlo Remigio), Professore a . . . . *Wiesbaden*

BAEYER (Adolfo von), Professore nell'Università di . . . . . *Monaco* (Baviera)

KEKULE (Augusto), Professore nell'Università di . . . . . . *Bonn*

WILLIAMSON (Alessandro Guglielmo), della R. Società di . . . *Londra*

THOMSEN (Giulio), Professore nell'Università di . . . . . . *Copenaghen*

LIEBEN (Adolfo), Professore nell'Università di . . . . *Vienna*

MENDELEJEFF (Demetrio), Professore nell'Imp. Università di . . *Pietroburgo*

HOFF (J. H. van't), Professore nell'Università di . . . . . . *Amsterdam*

SEZIONE DI MINERALOGIA, GEOLOGIA E PALEONTOLOGIA

STRÜVER (Giovanni), Professore di Mineralogia nella R. Università di *Roma*

ROSENBUSCH (Enrico), Professore nell'Università di . . . . . *Heidelberg*

NORDENSKIÖLD (Adolfo Enrico), della R. Accademia delle Scienze di *Stoccolma*

DAUBRÉE (Gabriele Augusto), dell'Istituto di Francia, Direttore della Scuola Nazionale delle Miniere a . . . . *Parigi*

ZIRKEL (Ferdinando), Professore a . . . . *Lipsia*

DES CLOIZEAUX (Alfredo Luigi Oliviero LEGRAND), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

CAPELLINI (Giovanni), Professore nella R. Università di . . . . *Bologna*

TSCHERMAK (Gustavo), Professore nell'Università di . . . . . *Vienna*

ARZRUNI (Andrea), Professore nell'Istituto tecnico sup. *(technische Hochschule)* . . . . *Aquisgrana*

KLEIN (Carlo), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

GEIKIE (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica . . *Londra*

SEZIONE DI BOTANICA E FISIOLOGIA VEGETALE

TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (Conte Vittore), Corrispondente del R. Istituto Lombardo . . . . *Milano*

GENNARI (Patrizio), Professore di Botanica nella R. Università di *Cagliari*

CARUEL (Teodoro), Professore di Botanica nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

ARDISSONE (Francesco), Professore di Botanica nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in . . . . *Milano*

SACCARDO (Andrea), Professore di Botanica nella R. Università di *Padova*

HOOKER (Giuseppe DALTON), Direttore del Giardino Reale di Kew *Londra*

SACHS (Giulio von), Professore nell'Università di . . . . . . *Würzburg*

DELPINO (Federico), Professore nella R. Università di . . . . *Bologna*

PIROTTA (Romualdo), Professore nella Regia Università di . . *Roma*

STRASBURGER (Edoardo), Professore nell'Università di . . . . *Bonn*

SEZIONE DI ZOOLOGIA, ANATOMIA E FISIOLOGIA COMPARATA

DE SELYS LONGCHAMPS (Edmondo) . . . . *Liegi*

PHILIPPI (Rodolfo Armando) . . . . *Santiago* (Chili)

GOLGI (Camillo), Professore di Istologia, ecc., nella R. Università di *Pavia*

HAECKEL (Ernesto), Professore nell'Università di . . . . . . *Jena*

SCLATER (Filippo LUTLEY), Segretario della Società Zoologica di . *Londra*

FATIO (Vittore), Dottore . . . . *Ginevra*

KOVALEWSKI (Alessandro), Professore nell'Università di . . . . *Odessa*

LUDWIG (Carlo), Professore nell'Università di . . . . *Lipsia*

LOCARD (Arnould), dell'Accademia delle Scienze di . . . . . *Lione*

CHAUVEAU (G. B. Augusto), Professore alla Scuola di Medicina di *Parigi*

FOSTER (Michele), Professore nell'Università di. . . . . . . *Cambridge*

HEINDENHAIN (Rodolfo), Professore nell'Università di . . . . . *Breslavia*

WALDEYER (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

GUENTHER (Alberto), Direttore del Dipartimento zoologico del Museo Britannico di . . . . *Londra*

HOWER (Guglielmo Enrico), Direttore del Museo di Storia naturale *Londra*

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Segretario

Ferrero (Ermanno), Dottore in Giurisprudenza, Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella R. Università di Torino, Professore nell'Accademia Militare, R. Ispettore per gli scavi e le scoperte di antichità nel Circondario di Torino, Consigliere della Giunta Superiore per la Storia e l'Archeologia, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le antiche Provincie e la Lombardia, Membro e Segretario della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Socio Corrispondente della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie di Romagna, dell'Imp. Instituto Archeologico Germanico, e della Società Nazionale degli Antiquarii di Francia, fregiato della Medaglia del merito civile di 1ª cl. della Rep. di S. Marino, ♕.

ACCADEMICI RESIDENTI

Peyron (Bernardino), Professore di Lettere, Bibliotecario Onorario della Biblioteca Nazionale di Torino, Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Gr. Uffiz. ✱, Uffiz. ♕.

Vallauri (Tommaso), Senatore del Regno, Professore di Letteratura latina e Dott. aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia nella Regia Università di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore della Romana Accademia delle Belle Arti di San Luca, Socio Corrispondente della R. Accademia della Crusca, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Romana di Archeologia, della R. Accademia Palermitana di Scienze, Lettere ed Arti, della Società storica di Dallas Texas (America del Nord), Gr. Uffiz. ✱ e Comm. ♕, Cav. dell'Ordine di S. Gregorio Magno.

Claretta (Barone Gaudenzio), Dottore in Leggi, Socio e Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Vice-Presidente della Società di Archeologia e Belle Arti per la Provincia di Torino, Membro della Commissione conservatrice dei monumenti di antichità e belle arti della Provincia ecc., Comm. ❋, Gr. Uffiz. ♔.

Rossi (Francesco), Professore d'Egittologia nella R. Università di Torino, Vice Direttore del Museo di Antichità a riposo, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, e della Società per gli Studi biblici in Roma, ♔.

Manno (Barone D. Antonio), Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Comm. ❋, Gr. Uffiz. ♔, Cav. d'on. e devoz. del S. O. M. di Malta.

Bollati di Saint-Pierre (Barone Federigo Emanuele), Dottore in Leggi, Soprintendente agli Archivi Piemontesi, e Direttore dell'Archivio di Stato in Torino, Membro del Consiglio d'Amministrazione presso il R. Economato generale delle antiche Provincie, Corrispondente della Consulta araldica, Vice-Presidente della Commissione araldica per il Piemonte, Membro della R. Deputazione sopra gli studi di storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, e della Società Accademica d'Aosta, Socio corrispondente della Società Ligure di Storia patria, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Società Colombaria Fiorentina, della R. Deputazione di Storia patria per le Provincie della Romagna, della nuova Società per la Storia di Sicilia, e della Società di Storia e di Archeologia di Ginevra; Membro onorario della Società di Storia della Svizzera Romanza, dell'Accademia del Chablais, e della Società Savoina di Storia e di Archeologia ecc., Uffiz. ❋, Comm. ♔.

Schiaparelli (Luigi), Dottore aggregato, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Comm. ❋, e ♔.

Pezzi (Domenico), Dottore aggregato alla Facoltà di Lettere e Filosofia e Professore di Storia comparata delle lingue classiche e neo-latine nella R. Università di Torino, ♔.

Ferrero (Ermanno), *predetto.*

Carle (Giuseppe), *predetto.*

Nani (Cesare), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza, Professore di Storia del Diritto nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria, ❋, Uff. ♔.

Berti (S. E. Domenico), Primo Segretario di S. M. pel Gran Magistero dell'Ordine Mauriziano, Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Deputato al Parlamento nazionale, Professore emerito delle RR. Università di Torino, di Bologna, e di Roma, Socio Nazionale della Regia Accademia dei Lincei, Socio Corrispondente

della R. Accademia della Crusca e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro delle RR. Deputazioni di Storia patria del Piemonte e dell'Emilia, Gr. Cord. ✻, e ♔; Cav. e Cons. ♔, Gr. Cord. della Leg. d'O. di Francia, dell'Ordine di Leopoldo del Belgio, dell'Ordine di San Marino, ecc. ecc.

Cognetti De Martiis (Salvatore), Professore di Economia politica nella R. Università di Torino, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, e della R. Accademia dei Georgofili, ✻, Comm. ♔.

Graf (Arturo), Rettore e Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società romana di Storia patria, Uffiz. ✻ e ♔.

Boselli (S. E. Paolo), Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia Patria, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia patria di Savona, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Deputato al Parlamento nazionale, Ministro delle Finanze, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Uffiz. ✻, Gr. Cord. ♔, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia e dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo.

Cipolla (Conte Carlo), Professore di Storia moderna nella R. Università di Torino, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio Corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), Socio Corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Uffiz. ♔.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Carutti di Cantogno (Barone Domenico), Senatore del Regno, Presidente della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Membro dell'Istituto Storico Italiano, Socio Straniero della R. Accademia delle Scienze Neerlandese, e della Savoia, Socio Corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco in Baviera, ecc. ecc. Gr. Uffiz. ✻ e ♔, Cav. e Cons. ♔, Gr. Cord. dell'O. del Leone Neerlandese e dell'O. d'Is. la Catt. di Spagna, ecc.

Reymond (Gian Giacomo), già Professore di Economia politica nella Regia Università di Torino, ✻.

Ricci (Marchese Matteo), Senatore del Regno, Socio Residente della Reale Accademia della Crusca, Uffiz. ✻.

Canonico (Tancredi), Senatore del Regno, Professore, Presidente di Sezione della Corte di Cassazione di Roma, Socio Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accad. delle Scienze del Belgio, e di quella di Palermo, della Società Generale delle Carceri di Parigi, Comm. ✱, e Gr. Croce ⚜, Cav. ✠, Comm. dell'Ord. di Carlo III di Spagna, Gr. Uffiz. dell'Ord. di Sant'Olaf di Norvegia, Gr. Cord. dell'O. di S. Stanislao di Russia.

Cantù (Cesare), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia dei Lincei, di quelle della Crusca, dell'Arcadia, di S. Luca, della Pontaniana, della Ercolanense, ecc., Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), Socio della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio, Gr. Cr. ✱, e ⚜, Cav. e Cons. ✠, Comm. dell'O. di C. di Port., Gr. Uffiz. dell'O. della Guadalupa del Messico, Gr. Cr. dell'O. della Rosa del Brasile, e dell'O. di Isabella la Catt. di Spagna, ecc., Uffiz. della Pubblica Istruz. e della L. d'O. di Francia, ecc.

Tosti (D. Luigi), Abate Benedettino Cassinese, Vice Archivista degli Archivi Vaticani.

Villari (Pasquale), Senatore del Regno, Professore di Storia moderna nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Membro del Consiglio Superiore di Pubblica Istruzione, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, Vice-presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, l'Umbria e le Marche, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio Straordinario della R. Accademia di Baviera, della R. Accademia Ungherese, Dott. in Legge della Università di Edimburgo, Professore emerito della R. Università di Pisa, Gr. Uffiz. ✱ e ⚜, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, ecc., ecc.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia delle Scienze di Napoli e dell'Accademia della Crusca, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e della R. Accademia delle Scienze di Monaco, Uff. ✱, Comm. ⚜, Cav. ✠.

ACCADEMICI STRANIERI

Mommsen (Teodoro), Professore nella Regia Università di Berlino.

Müller (Massimiliano), Professore nell'Università di Oxford.

Meyer (Paolo), Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*Écoles des Chartes* a Parigi.

Paris (Gastone), Professore nel Collegio di Francia, Parigi.

Böhtlingk (Ottone), Professore nell'Università di Lipsia.

Tobler (Adolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Gneist (Enrico Rodolfo), Professore nell'Università di Berlino.

Arneth (Alfredo von), Direttore dell'Archivio imperiale di Vienna.

Maspero (Gastone), Professore nel Collegio di Francia.

CORRISPONDENTI

SEZIONE DI SCIENZE FILOSOFICHE

RENDU (Eugenio) . . . . *Parigi*

BONATELLI (Francesco), Professore nella Regia Università di . . *Padova*

FERRI (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . . *Roma*

BONGHI (Ruggero), Professore emerito della R. Università di . . *Roma*

SEZIONE DI SCIENZE GIURIDICHE E SOCIALI

LAMPERTICO (Fedele), Senatore del Regno . . . . *Roma*

SERAFINI (Filippo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di . . . . *Pisa*

SERPA PIMENTEL (Antonio di), Consigliere di Stato . . . . . . *Lisbona*

RODRIGUEZ DE BERLANGA (Manuel) . . . . *Malaga*

SCHUPFER (Francesco), Professore nella R. Università di . . . . *Roma*

COSSA (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . *Pavia*

PERTILE (Antonio), Professore nella R. Università di . . . . . *Padova*

GABBA (Carlo Francesco), Professore nella R. Università di . . *Pisa*

BUONAMICI (Francesco), Professore nella R. Università di . . . *Pisa*

DARESTE (Rodolfo), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

SEZIONE DI SCIENZE STORICHE

ADRIANI (P. Giambattista), della R. Deputazione sovra gli studi di Storia Patria . . . . *Cherasco*

PERRENS (Francesco), dell'Istituto di Francia . . . . *Parigi*

Haulleville (Prospero de) . . . . *Bruxelles*

De Leva (Giuseppe), Professore nella R. Università di . . . . *Padova*

Sybel (Enrico Carlo Ludolfo von), Direttore dell'Archivio di Stato in . . . . *Berlino*

Wallon (Alessandro), Segretario perpetuo dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) . . . . *Parigi*

Willems (Pietro), Professore nell'Università di . . . . *Lovanio*

Birch (Walter de Gray), del Museo Britannico di . . . . . *Londra*

Capasso (Bartolomeo), Sovrintendente degli Archivi Napoletani . *Napoli*

Carini (Mons. Isidoro), Prefetto della Biblioteca Vaticana . . . *Roma*

Wattenbach (Guglielmo), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

Chevalier (Canonico Ulisse) . . . . *Romans*

SEZIONE DI ARCHEOLOGIA

Palma di Cesnola (Conte Luigi) . . . . *New-York*

Fiorelli (Giuseppe), Senatore del Regno . . . . *Roma*

Curtius (Ernesto), Professore nell'Università di . . . . . . *Berlino*

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere . . . . *Milano*

Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a . . . . . *Savona*

Pleyte (Guglielmo), Conservatore del Museo Egizio a . . . . *Leida*

Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquarii di . . . . *Londra*

Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia *Parigi*

Nadaillac (Marchese I. F. Alberto de) . . . . *Parigi*

Brizio (Eduardo), Professore nell'Università di . . . . *Bologna*

SEZIONE DI GEOGRAFIA

Negri (Barone Cristoforo), Console generale di I^a^ Classe, Consultore legale del Ministero degli Affari esteri . . . . *Torino*

Kiepert (Enrico), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

Pigorini (Luigi), Professore nella R. Università di . . . . . *Roma*

SEZIONE DI LINGUISTICA E FILOLOGIA ORIENTALE

Krehl (Ludolfo), Professore nell'Università di . . . . *Lipsia*

Sourindro Mohun Tagore . . . . *Calcutta*

Ascoli (Graziadio), Senatore del Regno, Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di . . . . *Milano*

Weber (Alberto), Professore nell'Università di . . . . *Berlino*

Kerbaker (Michele), Professore nella R. Università di . . . . *Napoli*

Marre (Aristide) . . . . *Vaucresson* (Francia)

Oppert (Giulio), Professore nel Collegio di Francia . . . . . *Parigi*

Guidi (Ignazio), Professore nella R. Università di . . . . . . *Roma*

SEZIONE DI FILOLOGIA, STORIA LETTERARIA E BIBLIOGRAFIA

Linati (Conte Filippo), Senatore del Regno . . . . *Parma*

Bréal (Michele), Professore nel Collegio di Francia . . . . . *Parigi*

Negroni (Carlo), Senatore del Regno . . . . *Novara*

D'Ancona (Alessandro), Professore nella R. Università di . . . *Pisa*

Nigra (S. E. Conte Costantino), Ambasciatore d'Italia a . . . . *Vienna*

Rajna (Pio), Professore nell'Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in . . . . *Firenze*

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca . . . . *Firenze*

MUTAZIONI

avvenute nel Corpo Accademico dal 1° Settembre 1893 al 1° Ottobre 1894.

ELEZIONI

SOCI

Lessona (Michele), rieletto Presidente dell'Accademia nell'adunanza plenaria del 24 Giugno 1894.

Carle (Giuseppe), rieletto Vice-Presidente dell'Accademia nell'adunanza plenaria del 24 Giugno, ed approvato con R. Decreto del 4 Agosto.

Ferrero (Ermanno), rieletto Segretario della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 24 Giugno, ed approvato con R. Decreto del 6 Agosto.

Noether (Massimiliano), Professore nell'Università di Erlangen, nominato Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica pura e Astronomia) nell'adunanza del 3 Dicembre 1893.

Zeuner (Gustavo), Professore nel Politecnico di Dresda, id. id. (Sezione di Matematica applicata e scienza dell'Ingegnere civile e militare) id. id.

Hertz (Enrico Rodolfo), Professore nell'Università di Bonn, id. id. (Sezione di Fisica generale e sperimentale) id. id.

Mendelejeff (Demetrio), Professore nell'Imperiale Università di S. Pietroburgo, id. id. (Sezione di Chimica generale ed applicata) id. id.

Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di geologia pratica di Londra, id. id. (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia) id. id.

Strasburger (Edoardo), Professore nell'Università di Bomm, id. id. (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale) id. id.

Guenther (Alberto), Direttore del dipartimento zoologico del Museo Britannico, id. id. (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata) id. id.

Bianchi (Luigi), Professore di Matematica nella R. Università di Pisa, nominato Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica pura ed Astronomia) nell'adunanza del 27 Maggio 1894.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Cambridge, id. id. (Sezione di Matematica applicata e Scienza dell'Ingegnere civile e militare) id. id.

Bartoli (Adolfo), Professore di Fisica nella R. Università di Pavia, id. id. (Sezione di Fisica generale e sperimentale) id. id.

Hoff (J. H. van't), Professore nell'Università di Amsterdam, id. id. (Sezione di Chimica generale ed applicata) id. id.

Flower (Guglielmo Enrico), Direttore del Museo di Storia naturale di Londra, id. id. (Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata) id. id.

MORTI

12 Ottobre 1893.

Scacchi (Arcangelo), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

1 Gennaio 1894.

Hertz (Enrico), Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Fisica generale e sperimentale).

14 Febbraio 1894.

Catalan (Eugenio), Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica applicata e Scienza dell'Ingegnere civile e militare).

20 Marzo 1894.

Champollion-Figeac (Amato), Socio Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

15 Aprile 1894.

Marignac (Giovanni Carlo), Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Chimica generale ed applicata).

17 Aprile 1894.

Boncompagni (D. Baldassarre) dei Principi di Piombino, Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Matematica pura ed Astronomia).

28 Aprile 1894.

Battaglini (Giuseppe), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

20 Maggio 1894.

Daguet (Alessandro), Socio Corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

6 Luglio 1894.

Mallard (Ernesto), Socio Corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

7 Luglio 1894.

Whitney (Guglielmo), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

20 Luglio 1894.

Lessona (Michele), Socio nazionale residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

8 Settembre 1894.

Helmholtz (Ermanno Luigi Ferdinando), Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

15 Settembre 1894.

Fabretti (Ariodante), Socio nazionale residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

20 Settembre 1894.

De Rossi (Giovanni Battista), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

SCIENZE

FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

INDICE

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

I MOLLUSCHI

DEI TERRENI TERZIARII

DEL PIEMONTE E DELLA LIGURIA

DESCRITTI

DAL

Dott. FEDERICO SACCO

Approvata nell'Adunanza del 19 Febbraio 1893.

PARTE XIII [1].

(CONIDAE)

(Fascicolo Primo)

Famiglia CONIDAE (Swainson), 1840.

Genere **CONUS** Linn., 1758.

È ben noto come il genere *Conus* sia, fra i Molluschi, uno dei generi più ricchi di forme. È pur noto che, mentre il zoologo basa la maggior parte delle sue determinazioni dei Coni sopra le loro svariatissime colorazioni, tale carattere viene a mancare pressochè completamente al paleontologo il quale deve quasi sempre studiare esemplari affatto scolorati o, in qualche raro caso, con scarsissimi residui della colorazione originale, residui parziali che, talvolta, possono anche offrire un aspetto diverso da quello della completa colorazione primitiva.

Ora è anche conosciuto come, fatta astrazione dei colori, studiando i Coni solo riguardo alla loro forma, si debba ammettere che questa è cosiffattamente variabile che una sola specie, e ne sia esempio il comune *Conus mediterraneus,* può nelle sue svariatissime modificazioni non soltanto assumere la forma di altre specie dello stesso sottogenere, ma eziandio di sottogeneri diversi. Inoltre anche fra le forme viventi di Coni la loro ripartizione in diversi sottogeneri è ancor lungi dall'essere naturale e soddisfacente e dovrà subire in avvenire non poche modificazioni. Di più sono pure sovente notevolissime le variazioni che la stessa forma subisce dal periodo giovanile a quello adulto.

---

(1) **Nota.** — Il fascicolo secondo della Parte XIII, con numerose tavole, non potendo più essere inserito, nel corrente anno accademico, nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, venne pubblicato a spese dell'Autore, affinchè non fosse troppo ritardata la pubblicazione della presente Monografia. — Nello stesso modo e per la stessa causa furono già pubblicate le Parti IX, X e XII. — Tali parti trovansi in vendita presso la *Libreria* Loescher di C. Clausen — Torino.

Quindi se si tien conto della straordinaria variabilità dei Coni, della mancanza di caratteri ornamentali che servano a guidarci nella loro determinazione, della scomparsa, nei fossili, dell'importantissimo carattere della colorazione, e dello immenso loro numero nei depositi terziarii del Piemonte, si può comprendere come lo studio dei Coni piemontesi siami stato particolarmente lungo e difficile, nè mi lusingo d'averlo superato senza commettere errori che potranno essere eliminati in avvenire collo studio di altri esemplari meglio conservati. Con tale pensiero ho pure tralasciato per ora la determinazione di alcuni esemplari, specialmente del sottog. *Chelyconus,* che, o per essere poco ben conservati o per rappresentare forti variazioni od anomalie, non sapevo a quale specie attribuire, nè parevami logico fondarvi nuove specie.

D'altronde tali grandi difficoltà nella determinazione dei Coni fossili furono già incontrate e dichiarate dal Brocchi, dal Borson, dal Michelotti, ecc., e ricordo al riguardo come il compianto amico Prof. Bellardi parlandomi dei suoi futuri studi sui Molluschi del Piemonte mi ebbe più volte a dire che quando sarebbe giunto a quello dei Coni temeva di perderci la testa.

Il materiale che ebbi a mia disposizione fu straordinariamente abbondante, essendo rappresentato da 20,000 esemplari ad un dipresso, di cui circa 5000 del Pliocene, e circa 15,000 del Miocene. Credo che tale ricchezza di materiale proveniente da tutti i piani del Miocene e del Pliocene ed esaminato in una sola volta sia assai importante permettendo di fare una larga comparazione e quindi di comprendere meglio il concetto delle specie e le loro variazioni. Potei così convincermi che più ricco è il materiale che si ha in esame, minore è il numero delle specie nuove che si hanno a creare, poichè essendo possibile una estesa comparazione si vedono meglio i legami delle varie forme, i loro gradualissimi passaggi, ecc.; quindi il concetto della specie è naturalmente obbligato ad allargarsi alquanto per racchiudere una serie di forme transitorie o irradianti, direi, che evidentemente non sono che modificazioni locali di una data specie della quale esse veggonsi conservare la *facies* complessiva, ma che esaminate isolatamente parrebbero altrettante specie a sè. È perciò che avendo avuto a studiare un 20,000 esemplari circa di Coni, non solo ebbi a creare poche nuove specie e quasi soltanto fra le forme mioceniche finora meno conosciute, ma inoltre credetti dovere ridurre diverse forme, ritenute finora buone specie, al grado di semplici varietà o di forme giovanili di specie prima stabilite, mentre che invece seguendo per esempio il metodo usato dal Bellardi nelle sue ultime Monografie avrei dovuto creare diverse centinaia di nuove specie di Coni, producendo così tale confusione quale è facile immaginare.

In complesso potei constatare che ogni sottogenere di Coni, ad eccezione dei *Chelyconus,* è rappresentato da poche specie per ogni orizzonte geologico, mentre invece esse variano per lo più da un orizzonte all'altro, specialmente dal *Tongriano* all'*Elveziano* (ciò che si comprende facilmente) e dall'*Elveziano* al *Tortoniano,* perchè la zona fossilifera dell'*Elveziano* torinese trovasi specialmente alla base dell'*Elveziano* ed è quindi sovente separata dal *Tortoniano* da oltre 1000 metri di depositi dell'*Elveziano* medio e superiore. Meno spiccato, ma pure assai notevole, è il cangiamento delle specie dal *Tortoniano* al *Piacenziano* esistendo tra questi due orizzonti il piano *Messiniano,* ed essendosi inoltre nel frattempo verificate importanti variazioni climatiche, batimetriche, ecc. Quanto al cangiamento fra le specie *piacenziane* e quelle

astiane, esso è spesso poco notevole ed è particolarmente dovuto a differenze batimetriche.

Noto infine che siccome col materiale raccolto in Piemonte in piani geologici tra loro abbastanza distanti si può sovente constatare una serie di graduali passaggi fra diverse specie, dalle più antiche alle più recenti, è logico ammettere che, se si avesse un materiale proveniente da tutti i piani e sottopiani, rappresentati eziandio dalle loro diverse *facies,* il graduale modificarsi e collegarsi delle specie e la successiva derivazione di un gran numero di esse risulterebbe ancor più chiara ed evidente.

Riguardo al materiale avuto in comunicazione debbo accennare che, oltre a quello solito, importantissimo, proveniente dalle collezioni dei Musei geologici di Torino, di Roma, di Modena, di Genova, di Pavia, di Milano e dalla collezione privata Rovasenda, ebbi pure in esame altre raccolte assai ricche messe gentilmente a mia disposizione dai loro proprietari, Clarence Bicknell (per la Liguria) ed Odoardo Bagatti (per il Piacentino), nonchè parziali contribuzioni di privati collettori di fossili dei colli torinesi, quali i signori Paravicini, Forma, ecc. Faccio ancora osservare come fra il materiale sovra accennato sia specialmente interessante quello delle tipiche collezioni di Brocchi (Museo di Milano), di Borson, Bonelli e Bellardi (Museo di Torino), di Michelotti (Museo di Roma) e di Doderlein (Museo di Modena), giacchè queste racchiudono numerosi preziosissimi tipi, coll'esame diretto dei quali potei non solo schivare, ma anche chiarire e togliere una quantità di errori di determinazione, errori fatti specialmente nella seconda metà del corrente secolo a cominciare dal classico lavoro dell'Hoernes che, riguardo ai *Conus,* offre molte inesatte determinazioni le quali furono causa di una lunga serie di errori successivi.

Fra i principali di questi errori, noto specialmente la confusione delle specie tipiche del Miocene con quelle plioceniche e viceversa, la moltiplicazione delle specie fatte sovente su semplici varietà, talora persino sopra un esemplare difettoso o sopra esemplari giovani, la falsata interpretazione di alcune specie del Lamarck, ecc.

Avverto che, per brevità, a cominciare dalla presente monografia nella descrizione delle varietà tralascio la solita indicazione: *Distinguunt hanc varietatem a specie typica sequentes notae,* per tutte quelle varietà la cui diagnosi comparativa si riferisce alla specie tipica, solo più mantenendo la frase di comparazione quando la varietà che si descrive viene paragonata ad altra varietà, la quale in tal caso viene naturalmente indicata.

Sottogen. DENDROCONUS Swains. 1840.

Questo sottogenere è specialmente sviluppato nel *Tortoniano* e nel *Pliocene,* mentre scarseggia nei terreni più antichi. Alcune forme sembrano quasi passare ai *Lithoconus* ed ai *Chelyconus.* Per lo più esse si possono facilmente distinguere osservandole nella regione della spira, perchè quivi l'ultimo anfratto visibile è notevolissimamente più largo degli altri, fatto che generalmente è meno spiccato negli altri sottogeneri.

Dendroconus betulinoides (Lk.)

(Tav. 1, fig. 1).

C. *Testa oblongo-turbinata, laevi; basi sulcis transversis obsoletis distantibus; spira convexa, mucronatā, basi rotundata* (Lamarck).

Alt. 20-160 mm.: Largh. 12-80 mm.

1768.		WOLCH u. KNORR, *Naturgesch. Verstein.*, II, Tab. CIII, fig. 3.
1798.	*Volutites N. 1.*	BORSON, *Ad Orict. pedem. auctarium*, pag. 176.
1810.	*Conus betulinoides Lk.*	LAMARCK, *Ann. Mus. Hist. Nat.*, pag. 440, n. 2.
1814.	„ „ „	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, II, pag. 286.
1818.	„ *levigatus Defr.*	DEFRANCE, *Dict. Hist. Nat.*, Tome X, pag. 263.
1818.	„ *betulinoides Lk.*	„ „ „ „ „ 264.
1820.	„ cf. „ „	BORSON, *Oritt. piem.*, pag. 9 (188).
1827.	„ „ „	BONELLI, *Cat. m. s. Museo Zool. Torino*, n. 3647, 3650.
1830.	„ cf. „ „	BORSON, *Cat. Coll. min. Turin*, pag. 605.
1831.	„ „ „	BRONN, *Ital. tert. Geb.*, pag. 13.
1842.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed., pag. 43.
1845.	„ „ „	LAMARCK in DESHAYES, *An. s. vert.*, vol. XI, pag. 153.
1847.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1848.	„ „ „	BRONN, *Ind. paleont.*, pag. 328.
1851.	„ „ „	HOERNES, *Foss. Moll. Wien. Beck.*, pag. 16-17.
1852.	„ „ „	D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. str.*, III, pag. 171.
1866.	„ „ „	DA COSTA, *Gaster. dep. terc. Portugal*, pag. 6.
1885.	„ „ (*Lk.*) *Hoern.*	DE GREGORIO, *Conch. med. viv. e foss.*, pag. 352-353.
1890.	„ „ *Lk.*	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piem.*, n. 4377.

Tortoniano: Stazzano (rarissimo).
Piacenziano: Albenga (R. Torsero) (alquanto raro).
Astiano: Astigiana, Vezza d'Alba (non raro).

Osservazioni. — È la forma più gigantesca dei Coni piemontesi. Quanto al tipo esso non venne ancora figurato, poichè le figure date di questa specie sono basate su esemplari di località e di età diversa da quella del tipo, e non corrispondono perfettamente alla descrizione del Lamarck. Ciò dicasi per esempio per la figura data dall'Hoernes e che il De Gregorio vorrebbe adottare come tipo; mentre invece io proporrei per tale forma, che è una semplice varietà del *C. betulinoides*, il nome di *pervindobonensis* Sacc. (1851, *Conus betulinoides Lk.* — Hoernes, Foss. Moll. Tert. Beck. Wien. — Tav. II, Fig. 1), non trattandosi affatto del *C. Aldrovandi* come suppone il Doderlein. Credetti perciò conveniente assumere e far figurare come tipo l'esemplare ritenuto come tale dal Brocchi e che corrisponde assai bene alla diagnosi del Lamarck.

Gli esemplari giovani ricordano alquanto il *C. pyrula* ed il *C. laeviponderosus;* essi sono in generale assai mucronati e quindi distinti da quelli adulti, in cui l'apice è in gran parte eroso.

La tinta del fossile in esame è per lo più giallastra, ma spesso sonvi anche larghe ed irregolari macchie rossigne, od anche tutta la conchiglia è roseo-rossastra.

Gli esemplari più giganteschi provengono quasi tutti da un banco dell'*Astiano* inferiore affiorante al fondo di una valletta presso Vezza d'Alba.

È notevole che gli esemplari *tortoniani* sono generalmente alquanto più conici di quelli pliocenici, per modo da formare quasi un passaggio al *D. Berghausi*.

Il *Conus cacellensis* Da Costa nominato dal Cocconi fra i fossili pliocenici del Piacentino " En. Moll., ecc., pag. 148 „ è probabilmente una varietà di *C. betulinoides.*

D. BETULINOIDES var. SUPRAMAMILLATA SACC.

(Tav. I, fig. 2).

Testa plerumque magna. Spira convexior, mamillaris. Anfractus rotundatiores.
Astiano: Astigiana, Vezza d'Alba (non rara).

OSSERVAZIONI. — Raggiunge spesso le massime dimensioni di questa specie.

D. BETULINOIDES var. CHELYCONOIDES SACC.

(Tav. I, fig. 3).

Testa minus conica, subovoidea. Spira perelatior, conico-subconvexa, apice mucronatior.

Alt. 92 mm.; Lat. 60 mm.
Astiano: Vezza d'Alba (rara).

OSSERVAZIONI. — Presenta molti caratteri di *Chelyconus,* ma nel suo complesso è riferibile invece ai *Dendroconus;* potrebbe forse da alcuno essere eretta in specie a parte, ma avendone un esemplare solo, trovato fra numerosi *D. betulinoides,* sembrami più logico di considerarla come una varietà di detta specie.

D. BETULINOIDES var. EXLINEATA SACC.

(Tav. I, fig. 4).

Testa subconica, sulculis linearibus remotis ornata; spira planiuscula; apice exerto; anfractubus planatis, basi sulcata (Borson).

Distinguunt hanc var. a specie typica sequentes notae:

Spira elatior, subconica, apice magis mucronata. Anfractus superne minus convexi, laevissime subangulosi.

Alt. 20-100 mm.: Lat. 12-55 mm.

1820. *Conus lineatus Bors.* BORSON, *Oritt. piemont.*, pag. 10 (189).
1830. „ „ „ „ *Cat. Coll. Min. Musée Turin*, pag. 605.
1848. „ „ „ BRONN, *Index Paleont.*, pag. 330.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (rara).
Astiano: Astigiana, Vezza d'Alba (frequente).

OSSERVAZIONI. — Il nome di Borson cade in sinonimia col *C. lineatus* BRAND. (1766). Potei ritrovare l'esemplare tipico su cui il Borson fondò la sua specie, e che io quindi figuro come tipo di questa varietà; ma il secondo esemplare (colla retepora) che accenna il Borson ha la spira più depressa e più concava, per modo da riunirsi meglio alla var. *concavespirata;* ambidue sono dell'Astigiana.

Il carattere di questa varietà è in parte giovanile, direi, poichè negli esemplari giovani esso è quasi costante, talora anzi spiccatissimo sui primi anfratti; ma conservasi anche in molti esemplari adulti.

Gli esemplari *tortoniani* sono generalmente mal conservati, in generale un po' più conici di quelli pliocenici.

Nell'*Elveziano* dei colli torinesi trovansi esemplari che ricordano questa varietà, ma sono alquanto più rigonfi nella parte superiore per modo che forse debbono attribuirsi ad altra forma.

D. betulinoides var. concavespirata Sacc.

(Tav. I, fig. 5).

Spira depressior, subplanata vel subconcava potius quam subconvexa; anfractus superne minus rotundati, laeviter subangulati.

Alt. 20-120 mm.: Lat. 12-70 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rarissima).

Piacenziano: Astigiana, Castelnuovo, Albenga (R. Torsero), Bordighera (non rara).

Astiano: Astigiana, Vezza d'Alba (non rara).

Osservazioni. — Presenta graduale passaggio sia al tipo che alla var. *exlineata.* Ricorda talora di lontano un *Lithoconus* per la spira depressa. Gli esemplari *elveziani* paiono far passaggio alla var. *dertocanaliculata.* Debbo accennare al riguardo come nell'*Elveziano* dei colli torinesi abbia osservato altre forme diverse (forse nuove) di *Dendroconus* che per essere rappresentate solo da rari resti molto imperfetti credetti più opportuno non descrivere per ora; in parte ricordano il *D. betulinoides.*

D. betulinoides var. dertosulculellata Sacc.

(Tav. I, fig. 6).

Testa aliquantulum magis conica; sulculelli prope suturam visibiliores.

Tortoniano: — S. Agata fossili, Stazzano (non rara).

Osservazioni. — Per la forma più conica tende verso il *D. Berghausi,* come l'affine *C. Mojsvari* H. A., che io considererei pure solo come una varietà di passaggio tra il *D. betulinoides* ed il *D. Berghausi.*

D. betulinoides var. dertomamillata Sacc.

(Tav. I, fig. 7).

Testa aliquantulum magis conica, crassa; spira inflata, convexo-mamillata. Anfractus superne rotundatiores, ultimus prope suturam laevissime subcanaliculatus.

Alt. 100-103 mm.: Lat. 62 mm.

Tortoniano: Stazzano (non rara).

Osservazioni. — Per la sua relativa conicità altri potrebbe forse già riferirla al *D. Berghausi.* La sua spira è molto simile a quella della var. *supramamillata.* Forme simili si incontrano nel Miocene di Cacella, per quanto risulta dalle figure del Da Costa (Gast. terc. Portugal., Tav. I, Fig. 1, Tav. II, Fig. 1, 2), e nel Miocene viennese, come l'indica il *D. hungaricus* (H. A.).

D. BETULINOIDES var. DERTOCANALICULATA SACC.

(Tav. I, fig. 8).

Testa aliquantulum magis conica, crassa. Spira laeviter depressior. Anfractus superne aliquantulum rotundatiores, prope suturam plus minusve sulculellati, ultimus laeviter canaliculatus.

Alt. 40-100 mm.: Lat. 25-56 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rarissima).

Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano, Montegibbio (non rara).

OSSERVAZIONI. — Passa gradatamente alla var. *dertomamillata* e quindi tende pure verso il *D. Berghausi.* Le è affine, se non identico, il *C. Mercatii* secondo Da Costa (Gast. terc. Portugal — Tav. III, fig. 1).

DENDROCONUS BERGHAUSI (MICHT.)

(Tav. I, fig. 9).

Testa crassa, conica, abbreviata; spira mucronata, valde depressa; anfractibus (in adultis) superne planulatis, laevigatis, ultimo obtuse rotundato; apertura coarctata, ad basim subdilatata; columella inferne striata (Michelotti).

Alt. 13-85 mm.: Lat. 8-58 mm.

1847.	*Conus Berghausi Micht.*	MICHELOTTI, *Descript. Foss. mioc.*, pag. 242, Tav. XIII, fig. 9.
1847.	" " "	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1851.	" " "	HOERNES, *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, pag. 19.
1852.	" " "	D'ORBIGNY, *Prod. Pal. strat.*, III, pag. 56.
1862.	" " "	DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Italia cent.*, pag. 25 (107).
1866.	" " "	DA COSTA, *Gast. dep. terc. Portugal*, pag. 9.
1873.	" *maculosus Grat.*	FISCHER et TOURNOUER, *Invert. foss. M. Leberon*, pag. 127.
1873.	" *Berghausi Micht.*	COCCONI, *En. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 147.
1877.	" *maculosus Grat.*	LOCARD, *Descript. Faune tert. Corse*, pag. 64.
1884.	" *Berghausi Micht.*	DE GREGORIO, *Conch. medit. viventi e fossili*, pag. 358.
1890.	" " "	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piem.*, n. 4376.

Elveziano: Colli torinesi (raro).

Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano, Montegibbio (non raro).

Piacenziano: Piacentino (Gropparello) (rarissimo).

OSSERVAZIONI. — In complesso questa forma essenzialmente *tortoniana* è assai caratteristica e ben distinta dal *D. betulinoides,* per cui credo si possa ritenere come una buona specie, ma è certo che per mezzo di alcune varietà essa sembra collegarsi col *D. betulinoides.*

Quanto all'identità che alcuni, come il Fischer, il Tournouer, il Locard, ecc., credettero ravvisare tra il *C. Berghausi* ed il *C. maculosus* GRAT., a me sembra che essa non sia accettabile.

Questa specie è per lo più alta solo dai 2 ai 4 cm.: gli esemplari grandi sono assai rari e sovente sembrano formare passaggio al *D. betulinoides.* È notevole che la forma tipica, stata figurata dal Michelotti, e che io figuro di nuovo, è relativamente rara, mentre sono comunissime alcune delle varietà indicate in appresso.

Rarissimi sono gli esemplari che conservino traccie della colorazione. Gli esemplari giovani sono generalmente meno conici ed a spire più elevate di quelli adulti.

Questa specie è molto variabile, per modo che alcune delle sue variazioni ricevettero nomi specifici diversi; così è forse il caso pel *D. Daciae* H. A., pel *D. voeslauensis* H. A., per parte delle figure colle quali il Da Costa e l'Hoernes R. ed Auinger indicano il *C. subraristriatus* Da Costa, ecc.

La forma indicata da R. Hoernes ed Auinger come *C. Loroisi* Kiener (1889, Gaster. I u. II Mioc. Med. Stufe, Tav. III, fig. 5) è distinta dalla forma vivente per modo che le do il nome di *exloroisi* Sacc.; essa potrebbe forse anche considerarsi come una varietà di *D. Berghausi*. Lo stesso deve forse ripetersi per il *C. antiquus* di Grateloup (Atlas Conch. foss. Adour. 1840, Tav. 43, Fig. 1), forma che forse è solo una varietà (che io appellerei var. *exantiqua* Sacc.) del *C. Berghausi*.

D. Berghausi var. subaspira Sacc.

(1866. DA COSTA (*Conus Berghausi*) *Gast. terc. Portugal*, Tav. I, fig. 3).

Spira depressior, planoexcavata.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata fossili (non rara).

D. Berghausi var. propebetulinoides Sacc.

(Tav. I, fig. 10).

Testa plerumque major, aliquantulum elongatior. Spira plerumque plus minusve depressa. In anfractubus prope suturam sulculelli subvisibiles.

Alt. 58-72 mm.: Lat. 38-45 mm.

1842. *Conus antiquus Lk.* (*pars*) SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed. pag. 43.

Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano (non rara).

Osservazioni. — Si avvicina alquanto al *D. betulinoides*, specialmente alle sue var. *dertocanaliculata* e *dertosulculellata*, tanto che talora la loro distinzione può sembrare incerta. Inoltre presenta caratteri di passaggio alla var. *exfuscocingulata*.

D. Berghausi var. bifasciolata Sacc.

(Tav. I, fig. 11).

Testa affinis var. propebetulinoides, *sed in regione ventrali medio-supera duo fasciolae brunneae conspiciuntur.*

Alt. 67 mm.: Lat. 45 mm.

Tortoniano: S. Agata fossili (rara).

Osservazioni. — Oltre alle due fascie più evidenti, altre se ne intravvedono qua e là specialmente nella parte caudale.

D. Berghausi var. exfuscocingulata Sacc.

(Tav. I, fig. 12).

Testa plerumque minor, superne inflatior, spira elatior, cingulis fuscis, plus minusve distantibus, transversim ornata.

Alt. 16-26 mm.: Lat. 10-17 mm.

1862. *Conus fuscocingulatus Bronn.* DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Italia centr.*, pag. 25 (107).
1873. " " " COCCONI, *En. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 148.
1890. " " " DELLA CAMPANA, *Pliocene Borzoli*, pag. 27.
1890. " " " SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 5440.

Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano (frequente).

Piacenziano: Borzoli, Piacentino (non rara).

Osservazioni. — Il carattere dei cingoli bruni, rilevati o no, credo che abbia poca importanza, anzitutto perchè esso osservasi quasi solo negli esemplari giovani, ed anche perchè lo ebbi a constatare su forme alquanto diverse; inoltre esso talora appare solo per alterazione del calcare superficiale. Quindi credo trattisi piuttosto di un carattere casualmente apparente nel gruppo del *D. Berghausi*, piuttosto che non di un vero carattere inerente ad una data specie, tanto più che, come dissi, esso osservasi specialmente sugli esemplari giovani.

D. Berghausi var. moravica (H. A.).

(1851. M. HOERNES (*C. fuscocingulatus*). *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, Tav. I, fig. 4).
(1889. R. HOERNES u. AUINGER (*Lithoconus moravicus*). *Gaster. I u. II mioc. Medit. stuf.*, pag. 29).

Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazioni. — Come già dissi riguardo alla var. *exfuscocingulata,* credo che il carattere dei cingoli trasversi abbia poca importanza, certamente non tale da costituire una specie a parte. Gli esemplari di Stazzano sono più piccoli del tipo.

Notisi che il vero *C. fuscocingulatus* Bronn non è quello rappresentato dalla fig. 4 (Tav. I del sovraccennato lavoro di M. Hoernes), ma bensì quello della fig. 5, che non ha spiegazione al piede della tavola, donde nacquero molte confusioni.

D. Berghausi var. moravicoides Sacc.

(Tav. I, fig. 13).

Testa crassior, magis conica; spira elatior, subconica.

Alt. 27-40 mm.: Lat. 18-30 mm.

Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano (non rara).

Osservazioni. — Questa forma si avvicina moltissimo alla var. *moravica;* se ne distingue essenzialmente per la mancanza dei cingoli trasversi.

D. Berghausi var. triangularis Sacc.

(Tav. I, fig. 14).

Testa crassa, valde magis conica, subtriangularis, superne perexpansa.

Alt. 36 mm.: Lat. 31 mm.

Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazione. — Può considerarsi come una esagerazione della var. *moravicoides.*

D. Berghausi var. planocylindrica Sacc.

(Tav. I, fig. 15).

Testa minus conica, inferne magis dilatata, deinde subcylindrica; spira depressa.
Alt. 26-38 mm.: Lat. 20-26 mm.

1827. *Conus antiquus Lk.* BONELLI, *Cat. ms. Museo Zool. Torino*, n. 3651,
1842. " " " SISMONDA, *Syn. meth.*, 1a ed. pag. 43 (pars).

Tortoniano: S. Agata fossili (non rara).

D. Berghausi var. percommunis Sacc.

(Tav. I, fig. 16).

Testa clavatior. Spira elatior. Anfractus superne regularius rotundatiores.
Alt. 13-80 mm.: Lat. 8-52 mm.
Elveziano: Colli torinesi (rarissima).
Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano, Montegibbio (frequentissima).

Osservazioni. — Molti esemplari erano indicati nelle diverse collezioni come *C. Aldrovandi.* Sono rarissimi gli esemplari che conservino le colorazioni, come quelli figurati; in generale sono scolorati. Questa varietà passa gradatamente sia alla var. *Vacecki* (H. A.), sia alla var. *Broteri* (Da Costa).

D. Berghausi var. Vacecki (H. A.).

(1851. M. HOERNES (*C. Berghausi*). *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, Tav. I. fig. 3).
(1879. R. HOERNES u. AUINGER, (*C. Vacecki*). *Gaster. I u. II Mioc. Med. stuf.*, pag. 22).
Testa subglandiformis, superne inflatior, plus minusve submamillata.
Alt. 14-45 mm.: Lat. 8-30 mm.
? *Elveziano:* Colli torinesi (rara).
Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano, Montegibbio (frequente).
Piacenziano: Borzoli (rara).

Osservazioni. — Questa forma si collega per infiniti passaggi sia colla var. *percommunis*, sia colla var. *glandiformis*, per modo che se ne potrebbero costituire numerose altre varietà che credo invece più opportuno di raggruppare attorno alla forma figurata da R. Hoernes. I colori quasi sempre sono scomparsi. Gli esemplari giovani sono generalmente meno conici ed a spira più elevata che non quelli adulti.

Sono probabilmente ancora riferibili a queste varietà le forme figurate dal Da Costa a Tav. II (Fig. 3, 4, 5, 6) del suo lavoro *Gast. Terc. Portugal.* 1866.

D. Berghausi var. glandiformis Sacc.

(Tav. I, fig. 17).

Testa affinis var. Vacecki, *sed magis glandiformis; spira inflatior; anfractus superne rotundatiores; puncticulis seriatis interdum ornata.*
Alt. 35 mm.: Lat. 23 mm.
Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazioni. — Senza voler dare troppa importanza alle colorazioni tanto variabili è notevole come in questa forma si osservino talora punteggiature invece di macchiette quadrangolari come è per lo più il caso per le forme del *D. Berghausi.* Essa passa gradualissimamente alla var. *Vacecki.* Questa forma è distintissima dalla var. *alpus* De Greg. (1866 *Conus Berghausi* Micht. — Da Costa *Gast. Terc. Portugal,* Tav. I, Fig. 2) la quale sembra quasi avvicinarsi meglio al tipico *D. betulinoides;* invece il Da Costa figura come *C. Eschewegi* in parte (Fig. 24 di Tav. IX) forme affini, forse identificabili a quella in esame.

D. Berghausi var. conotriangula Sacc.

(Tav. I, fig. 18).

Testa subbiconica. Spira elatior, sat regulariter conica. Anfractus superne obtuse angulati.

Alt. 43 mm.: Lat. 27 mm.

Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazioni. — Ricorda alquanto il *D. Steindachneri* H. A. che potrebbe forse essere anche considerato come una varietà di *D. Berghausi.*

D. Berghausi var. semisulcatula Sacc.

(Tav. I, fig. 19).

Testa minus triangularis. Spira aliquantulum elatior. Anfractus semisulcati.

Tortoniano: Montegibbio (rara).

Osservazioni. — Ricorda alquanto il *C. Neumayri* H. A. che forse è solo una varietà del *D. Berghausi.*

D. Berghausi var. conicospira Sacc.

(Tav. I, fig. 20).

Testa affinis var. Vacecki, *sed interdum aliquantulum elongatior, spira elatior, plus minusve conica.*

Alt. 14-45-155 mm.: Lat. 8-27-135 mm.

Elveziano: Colli torinesi, Baldissero (non comune).

Tortoniano: Stazzano, S. Agata fossili, Montegibbio (frequentissima).

Osservazioni. — Passa gradualissimamente alle var. *Vacecki* e *glandiformis.* Presenta qualche rassomiglianza con qualcuna delle forme che il Da Costa riferisce al *C. subraristriatus* (che forse è, in parte, soltanto una varietà del *D. Berghausi*), nonchè col *D. Steindachneri* H. A. (= *D. Hochstetteri* H. A. *in texto*). Anche alcune forme (Fig. 20 e 22 di Tav. IX) figurate dal Da Costa come *C. Eschewegi* sono riferibili alla varietà in esame.

D. Berghausi var. permucronata Sacc.

(Tav. I, fig. 21).

Spira plus minusve subconica, elatius mucronata.

Tortoniano: S. Agata fossili, Stazzano (non rara).

Osservazioni. — Forma passaggio sia al tipo che alla var. *percommunis*; distinguesi dalla var. *conicospira* per avere la spira meno inflata.

Dendroconus dertovatus Sacc.

(Tav. I, fig. 22).

Testa subovato-conica. Spira elato-convexa, subconica, non scalarata, pagodaeformis. Anfractus convexuli; ultimus permagnus, convexovatus, in regione medio-infera profunde transversim sulcatus. Apertura constricta.

Alt. 16-27-45 mm.; Lat. 9-15 mm.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata (non rara).

Osservazioni. — Questa forma sembra doversi elevare al grado di specie a parte, quantunque si possa anche considerare come una forte variazione della specie-gruppo *D. Berghausi.*

Riguardo al *C. dertovatus* debbo notare come su qualche esemplare abbia osservato residui di lineette trasverse, ciò che, unitamente alla forma, avvicina alquanto il *D. dertovatus* al tipico *C. fuscocingulatus* Bronn (Hoernes, Foss. Moll. Tert. Beck. Wien, Tav. I, fig. 5, non 4). Credo quindi necessari ulteriori studii per chiarire la vera posizione ed interpretazione del *C. fuscocingulatus* il quale sembra pure rappresentato in Piemonte; ma il materiale osservato non mi permette per ora di giudicare nettamente al riguardo, tanto più che i colori caratteristici sovente mancano e forse non hanno quel valore assoluto che altri volle loro attribuire. Noto infine che mentre il tipico *C. fuscocingulatus* figurato da M. Hoernes rassomiglia assai ad un *Dendroconus,* quelli figurati da R. Hoernes ed Auinger nella Tav. I del loro recente lavoro " Gastr. I u. II Mioc. Med. stufe „ sono invece veri *Chelyconus,* per modo che credo opportuno distinguerli con due nomi diversi, cioè var. *ochreocingulata* Sacc. (fig. 10, 11) e var. *pötzleinsdorfensis* Sacc. (fig. 13).

D. dertovatus var. connectens Sacc.

(Tav. I, fig. 23).

Testa magis conica, minus ovata. Spira depressior.

Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazioni. — Sembra quasi costituire un anello di congiunzione fra il *D. dertovatus* e la var. *conicospira* del *D. Berghausi.*

Dendroconus Eschewegi (Da Costa).

(1866. Da Costa, *Gaster. dep. terc. Portugal,* pag. 29, Tav. IX, fig. 23).

Alt. 13-40 mm.; Lat. 8-20 mm.

? *Elveziano:* Colli torinesi (rara).

Tortoniano: Stazzano, S. Agata (alquanto rara).

? *Piacenziano:* Vezza d'Alba (rarissima).

Osservazioni. — Il Da Costa istituendo questa specie ne lasciò i limiti così larghi da includervi diverse varietà di *D. Berghausi,* a cui d'altronde essa è strettamente connessa; perciò la specie del Da Costa si doveva o abolire o restringere in limiti più definiti, come io credetti di fare ponendone a tipo la fig. 23. Un esem-

Quadro comparativo dei *DENDROCONUS*.

plare di *Stazzano* presenta un leggiero solco trasversale nella regione ventrale superiore, per modo che ricorda un *C. ponderosus;* si potrebbe perciò indicare come var. *ponderosulcatula.*

D. Eschewegi var. caelata (Dod. Sacc.).

(Tav. I, fig. 24).

Spira minus elata, subrotundata.

1862. *Conus caelatus Dod.* DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Italia centr.*, pag. 25 (107).
1890. " " " SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 5446.

Elveziano: Colli torinesi (rara).
Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (alquanto rara).

Osservazioni. — Il nome dato dal Doderlein essendo nome di catalogo non può rappresentare la specie tipica. Per quanto mi risultò dall'esame della Collezione del Museo geologico di Modena, una parte degli esemplari determinati dal Doderlein come *C. nisus* D'Orb. sono esemplari giovani di questa forma e del *D. pyruloides.*

D. Eschewegi var. depressoastensis Sacc.

(Tav. I, fig. 25).

Testa minus ovata; spira valde depressior, convexula, vix apice aliquantulum mucronata.

Piacenziano: Astigiana (rarissima).

Osservazioni. — È importante vedere che il *D. Eschewegi* giunge al Pliocene.

Dendroconus pyruloides (Dod. Sacc.).

(Tav. I, fig. 26).

Testa elongato-pyruloides. Spira subacuta, parum elata. Anfractus convexuli; ultimus magnus, in dimidia infera parte sulcis profundis transversim ornatus. Apertura elongato-constricta.

Alt. 8-30-35 mm.: Lat. 7-14-17 mm.

1862. *Conus pyruloides Dod.* DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Italia centr.*, pag. 25 (107).
1890. " " " SACCO, *Catal. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 5444.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (frequente).

Osservazioni. — Descrissi la specie sugli esemplari originali del Doderlein. Essa, malgrado la sua somiglianza col *Chelyconus pyrula* (Br.), collegasi strettamente col *D. Berghausi.*

Gli esemplari giovani, che poco differiscono da quelli del *D. Berghausi*, erano determinati nella collezione del Museo geol. di Modena in parte come *C. nisus* D'Orb. ed in parte come *C. pyriformis* Dod.

D. pyruloides var. planacutispira Sacc.

(Tav. I, fig. 27).

Spira depressior, minus conica, apice acutior.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (frequente).

Sottogen. LITHOCONUS Mörch, 1850.

Lithoconus Mercatii (Br.).

(Tav. II, fig. 1).

Testa oblongo-conica, spira acuta, anfractubus omnibus convexiusculis, suturam prope leviter canaliculati, basi confertim striata, rugosa (Brocchi).

Alt. 18-100 mm.: Lat. 8-58 mm.

1717.		MERCATI, *Metallotheca vaticana*, pag. 303, fig. 3.
1814.	*Conus Mercati Br.*	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, II, pag. 287, Tav. II, fig. 6.
1818.	„ „ „	DEFRANCE, *Dict. Hist. natur.*, tome X, pag. 264.
1820.	„ „ ? „	BORSON, *Oritt. piemontese*, pag. 18 (197).
1825.	„ „ „	BASTEROT, *Bass. tert. S. O. France*, pag. 40.
1826.	„ „ „	RISSO, *Prod. Europe mérid.*, IV, pag. 230.
1827.	„ „ „	BONELLI, *Cat. ms. Museo Zoolog. Torino*, n. 2984, 2985, 3649.
1830.	„ „ „	BORSON. *Cat. Coll. min. Turin*, pag. 606.
1831.	„ „ „	BRONN, *It. tert. Geb.*, pag. 13.
1832.	„ „ „	DESHAYES, *Expéd. scient. Morée*, III, pag. 200, n. 354.
1836.	„ *mediterraneus* var.	PHILIPPI, *Enum. Molluscorum Siciliae*, I, pag. 238.
1842.	„ *Mercati Br.*	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ediz., pag. 43.
1845.	„ „ „	LAMARCK in DESHAYES, *Hist. Nat. An. s. vert.*, XI, pag. 161.
1847.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ediz., pag. 44.
1848.	„ *mediterraneus Brug. var.*	BRONN, *Index paleont.*, pag. 330.
1851.	„ *Mercati Bronn.*	HOERNES, *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, pag. 23.
1852.	„ „ „	D'ORBIGNY, *Prod. Pal. str.*, III, pag. 171.
1866.	„ „ „	„ *Gast. dep. terc. Portugal*, pag. 11 (pars).
1873.	„ „ „	FISCHER et TOURNOUER, *Invert. foss. M. Leberon*, pag. 127.
1873.	„ „ „	COCCONI, *Enum. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 149.
1877.	„ „ „	LOCARD, *Descript. Faune tert. Corse*, pag. 65.
1881.	„ „ „	FONTANNES, *Moll. Plioc. Vallée Rhône*, pag. 140.
1890.	„ „ „	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piem.*, n. 4389.

Piacenziano: Castelnuovo d'Asti, Alba, Magnano nel Biellese, Piacentino (non rara).

Astiano: Astigiana (Buttigliera, Capriglio, Cortazzone, Baldichieri, Valle Andona, Villafranca, Monteu-Roero, ecc., ecc.), Bra; Piacentino, ecc. (abbondantissima).

Osservazioni. — Questa specie fu spesso erroneamente interpretata dai varii autori, come risulta dalle figure date dall'Hoernes e da altri; inoltre ebbi a constatare che gran parte degli esemplari di questa specie erano classificati come *C. Aldrovandi.* Quindi riguardo a diversi autori (Risso, Sasso, Sismonda, Lamarck, D'Orbigny, ecc.) si dovrebbe anche porre nella sinonimia della specie in esame l'indicazione: *C. Aldrovandi;* ma mi limito ad accennare il fatto, il quale spiega molte confusioni verificatesi riguardo a queste due forme. È perciò che credetti opportuno far figurare di nuovo l'esemplare tipico del Brocchi. Nella collezione Brocchi oltre all'esemplare tipico di S. Miniato havvene un altro, quasi identico, delle crete senesi.

Gli anfratti presso la sutura sono talvolta più o meno striolati trasversalmente.

È a notarsi che nell'*Astiano* del Piemonte le forme del *L. Mercati,* quantunque siano talora identificabili col tipo, in generale sono leggermente più allungate e superiormente più strette, ad anfratti un po' più gradinati nella spira, la quale è un po' più bassa, in modo da far quasi passaggio alla var. *cincta.*

Gli esemplari giovani si distinguono per essere assai più allungati proporzionatamente al diametro trasversale, spesso substriolati presso la sutura, in modo che sembrano far passaggio alla var. *Caroli.*

Anom. NIGRICANS SACC. — *Testa griseo-nigra.*

Astiano — Astigiana (rara).

Anom. CRASSELABIATA SACC. (Tav. II, fig. 2). — *Spira depressa, parum scalarata, Anfractus ultimus aperturam versus et prope aperturam 2 cingulis longitudinalibus, percrassis, irregularibus, munitus.*

Astiano — Astigiana (rarissima).

Anom. ANOMALOSULCATA SACC. (Tav. II, fig. 2 *bis*). — *Anfractus ultimus transversim sulcis subparallelis, plus minusve latis et profundis, inter se varie distantibus, munita.*

1826. *Conus Mercati Br. var.* — BONELLI, *Cat. ms. Museo Zool. Torino*, n. 3648.

Astiano — Villanova d'Asti (rarissima).

L. MERCATII var. CINCTA (BORS.).

(Tav. II, fig. 3).

Anfractus transversim cingulis parallelis, subdepressis, interdum suboblitis, inter se sat distantibus, ornata.

Alt. 40-55 mm.: Lat. 22-31 mm.

1798. *Volutites 2°.*	BORSON, *Ad. Orict. ped. auct.*, pag. 176.
1820. *Conus cinctus Bors.*	„ *Oritt. piemont.*, pag. 13 (192).
1830. „ „ „	„ *Cat. coll. min. Turin*, pag. 605.
1848. „ „ „	BRONN, *Index Paleont.*, pag. 329.

Astiano: Astigiana (non rara).

OSSERVAZIONI. — I caratteri di questa forma consistono nei cingolelli trasversi o *cordoncini visibili ad occhio nudo e rilevati*, come dice il Borson, e non già in *sulculi* come egli indica nella diagnosi. Essa potrebbe forse riguardarsi solo come un'anomalia, poichè i caratteri che la distinguono compaiono su forme alquanto diverse.

L. MERCATII var. ALDROVANDI (BR.).

(Tav. II, fig. 4).

Testa conica, sulcis transversis remotis leviter impressis, spira convexoacuta depressiuscula, anfractubus rotundatis, extimo vix excavato, basi integra oblique striata, columella intorta, canaliculata (Brocchi).

Distinguunt hanc var. a specie typica sequentes notae:

Testa inflatior; spira minus scalarata. Anfractus prope suturam subrotundati, minime subcanaliculati.

Alt. 76 mm.: Lat. 48 mm.

1648.	ALDROVANDI, *Museum metallicum*, pag. 471, fig. 1 (?)
1814. *Conus Aldrovandi Br.*	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, II, pag. 287, Tav. II, fig. 5.
1818. „ „ „	DEFRANCE, *Dict. Hist. Nat.*, tome X, pag. 264.
1823. „ „ „	BORSON, *Oritt. piem.*, pag. 172 (304).

1826.	*Conus Aldrovandi Br.*	RISSO, *Hist. Nat. Europe mérid.*, IV, pag. 228.
1827.	" " "	SASSO, *Saggio geol. Bac. terz. Albenga*, pag. 482.
1829.	" " "	DE-SERRES, *Géognosie terr. tert.*, pag. 127.
1830.	" " "	BORSON, *Cat. gen. Coll. min. Turin*, pag. 606.
1831.	" " "	BRONN, *Ital. tert. Gebild.*, pag. 13.
1842.	" " "	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed., pag. 43.
1845.	" " "	LAMARCK in DESHAYES, *Hist. Nat. An. s. vert.*, XI, pag. 160.
1847.	" " "	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed., pag. 43.
1848.	" " "	BRONN, *Index paleont.*, pag. 328.
1851.	" " "	HOERNES, *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, pag. 18.
1852.	" " "	D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 171.
1862.	" " "	DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Ital. centr.*, pag. 25 (107).
1863.	" " "	DA COSTA, *Gast. terc. Portugal*, pag. 7.
1873.	" " "	FISCHER et TOURNOUER, *Invert. foss. M. Leberon*, pag. 127.
1873.	" " "	COCCONI, *Enum. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 147.
1877.	" " "	LOCARD, *Descript. Faune tert. Corse*, pag. 63.
1877.	" " "	ISSEL, *Fossili marne Genova*, pag. 24.
1884.	" *betulinoides*, forma div.	DE GREGORIO, *Conch. medit.*, pag. 66.
1886.	" *Aldrovandi? Br.*	SACCO, *Valle Stura di Cuneo*, pag. 66.
1890.	" " "	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4368, 5433.

Piacenziano: Crete sanesi e Bologna (rara).

Osservazioni. — Debbo anzitutto accennare come le indicazioni segnate nella sinonimia si riferiscano sovente a forme ben diverse dal vero *C. Aldrovandi*, come potei convincermi confrontando l'esemplare tipico, sia colle figure o colle descrizioni date dai diversi autori, sia cogli esemplari che nelle varie collezioni trovai determinati come *C. Aldrovandi,* e che invece appartengono in parte al *L. Mercatii,* in parte a *Dendroconus,* ed alcuni anche a *Chelyconus.* Ne derivò quindi una grande confusione la quale si può solo eliminare ritornando all'esemplare tipico del Brocchi, che credetti quindi necessario far nuovamente figurare.

Quanto a questo esemplare tipico notiamo dapprima come esso nella collezione Brocchi sia ora unico, mentre in generale gli altri coni vi sono rappresentati da diversi esemplari per ogni forma; inoltre esso presenta l'ultimo anfratto più volte ed irregolarmente interrotto e risaldato, con salti, ecc. (ciò che venne in parte omesso dal disegnatore del tipo), per modo da indicarci di aver appartenuto ad un individuo anomalo. Riguardo agli anfratti superiormente subrotondati noto come nello stesso esemplare tipico del *C. Mercatii* vi sia già un accenno di detto carattere, il quale meglio si accentua in alcuni individui ed in alcune varietà di detta specie e specialmente nella var. *elongatofusula* e *depressulospira,* le quali varietà, fatto curioso, presentano pure generalmente nell'ultimo anfratto forti rotture, salti e risaldature come nell'esemplare tipico del *C. Aldrovandi.* D'altra parte anche in questo stesso esemplare del Brocchi scorgonsi, specialmente nell'ultimo anfratto, gli accenni della depressione subcanalicolata del *L. Mercatii.*

Per tali motivi io inclinerei a considerare il *C. Aldrovandi* come una varietà del *L. Mercatii,* nè parebbemi giusta l'interpretazione inversa, quantunque il *C. Mercatii* sia stato descritto un numero dopo del *C. Aldrovandi,* poichè questa forma, unica o rarissima, sembra quasi solo rappresentare un'anomalia.

Noto qui come la forma figurata da M. Hoernes come *C. betulinoides* non possa appellarsi *Karreri* H. u. A. (1889), perchè già indicata come *Hoernesi* da Doderlein (1862); il nome di *Karreri* va riservato alla forma figurata (Tav. IV, fig. 7) con

questo nome da R. Hoernes ed Auinger. Quanto alla forma figurata da questi ultimi autori come *C. Aldrovandi* (1889 — Tav. IV, fig. 2) non ha che fare con tale specie, per cui le do il nome di *pseudaldrovandi* SACC.

L. MERCATII var. ELONGATOFUSULA SACC.

(Tav. II, fig. 5).

Testa affinis var. Aldrovandi, *sed elongatior, fusiformis, spira elatior.*

Alt. 77 mm.: Lat. 40 mm.

Astiano: Astigiana (rarissima).

OSSERVAZIONI. — Trattasi forse solo di un'anomalia, come lo indicherebbero, oltre che la sua rarità, anche le interruzioni degli anfratti. Dal Museo geologico di Pavia ebbi in comunicazione un esemplare simile, ma più piccolo (mm. 48 × 24) proveniente da Val d'Elsa. Alcune forme *tortoniane* si avvicinano a questa varietà.

L. MERCATII var. DEPRESSULOSPIRA SACC.

(Tav. II, fig. 6).

Testa elongatior, minus conica. Spira aliquantulum depressior. Anfractus ad suturam subrotundati.

Alt. 33-45 mm.: Lat. 18-24 mm.

Piacenziano: Bordighera (rara).

OSSERVAZIONI. — Per la subrotondità degli anfratti nella regione subsuturale sembra costituire una forma di passaggio fra il tipo ed il *C. Aldrovandi.*

Dal Museo geologico di Roma ebbi in comunicazione un esemplare di questa forma, proveniente da Casaglia, a caratteri assai spiccati per modo che lo faccio figurare come tipo. È notevole come gli esemplari che ebbi ad esaminare finora presentino gli anfratti irregolarmente interrotti longitudinalmente, come si è già notato per le forme *Aldrovandi* ed *elongatofusula;* ciò indicaci forse esemplari un po' anomali.

L. MERCATII var. LONGOASTENSIS SACC.

(Tav. II, fig. 7).

Testa elongatior, fusulatior, minus conica.

Alt. 25-110 mm.: Lat. 12-60 mm.

1814. *Conus antiquus Lk.* — BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, pag. 286.

Astiano: Astigiana (frequentissima).

OSSERVAZIONI. — Passa gradualmente al tipo. Le si avvicina la var. *funiculigera* FONT., il cui carattere del funicolo suturale credo abbia solo poca importanza.

Potei constatare l'erronea determinazione del Brocchi esaminando il grosso esemplare dell'Astigiana che egli classificò come *C. antiquus;* siccome nella collezione Brocchi esiste un solo esemplare così determinato, non vi è dubbio al riguardo. Tale

errore di determinazione ne originò molti altri nei lavori di Sismonda, Bronn, ecc., errori che credo inutile citare. Forse il *C. ampitus* De Greg. (1885 — Conch. medit., pag. 379) dell'Astigiana è affine a questa forma, ma essendo senza figure non mi riuscì di identificarlo.

L. Mercatii var. Baldichieri (Bors.).

(Tav. II, fig. 8).

Testa crassa, conica; spira scalariformis; anfractubus omnibus canaliculatis, linea impressa distinctis, majori superne subrotundato; basi rugosa (Borson).

Alt. 71 mm.: Lat. 40 mm.

1820.	*Conus Baldichieri Bors.*	BORSON, *Oritt. piem.*, pag. 14 (193) — Tav. I, fig. 1.
1826.	„ „ „	BONELLI, *Catal. m. s. Museo Zool. Torino*, n. 585.
1831.	„ *Baldichierensis Bors.*	BORSON, *Cat. rais. Coll. Min. Turin*, pag. 606.
1842.	„ *Baldichieri Bors.*	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed., pag. 43.
1847.	„ „ „	„ „ „ 2ª ed., pag. 44.
1848.	„ „ „	BRONN, *Index paleont.*, pag. 328.
1880.	„ *Mercati Bron.*	DE STEFANI e PANTANELLI, *Moll. plioc. Siena*, pag. 132.
1890.	„ *Baldichieri Bors.*	SACCO, *Catal. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4375.

Astiano: Baldichieri nell'Astigiana (rara).

Osservazioni. — Sembra solo una varietà di *C. Mercatii* a spira molto alta; le è affinissima la forma *Bittneri* (H. A.) del Miocene viennese.

L. Mercatii var. fusuloidea Sacc.

(Tav. II, fig. 9).

Testa subfusiformis. Anfractus superne minus angulosi, plus minusve prope suturam transversim striolati, parum vel minime subcanaliculati. Spira minus scalarata.

Alt. 35-125 mm.: Lat. 18-62 mm.

Piacenziano: Astigiana, Bordighera (alquanto rara).

Astiano: Astigiana (rara).

Osservazioni. — Collegasi gradualmente colla var. *longoastensis.*

L. Mercatii var. crassovata Sacc.

(Tav. II, fig. 10).

Testa aliquantulum crassior, ventrosior, subovata. Spira paullulo depressior.

Alt. 50-90 mm.: Lat. 30-54 mm.

Astiano: Astigiana (alquanto rara).

Osservazioni. — Si collega con passaggi alle var. *longastensis* e *fusuloidea;* ricorda i *Chelyconus.*

L. Mercatii var. Caroli (Fuc.).

(Tav. II, fig. 11).

(1891. FUCINI (*Conus Caroli*). *Il Plioc. di Cerreto Guidi, ecc.*, pag. 14, Tav. II, fig. 1).

Testa minor, gracilior, fusulatior. Spira regularius scalarata. Anfractus superne magis angulosi; prope suturam striolati, interdum laeviter subcanaliculati.

Alt. 17-35 mm.: Lat. 9-16 mm.
Tortoniano: Stazzano (rara).
Piacenziano: Astigiana (frequentissima).
Astiano: Astigiana (alquanto rara).

Osservazioni. — Dal Museo geologico di Modena mi vennero inviati esemplari di questa forma coll'indicazione: *Conus spirillus* Dod. - *Tortona*, ma dubito che provengano piuttosto dal *Piacenziano* che non dal *Tortoniano* di detta regione.

Probabilmente in parte trattasi solo di forme giovanili del *L. Mercatii* e delle sue varietà fusiformi; infatti in diversi esemplari di *L. Mercatii,* sia giovani che adulti, osservansi sulcature subsuturali, per modo che la var. *Caroli* essenzialmente rappresenterebbe solo l'accentuamento di tale carattere ornamentale. La forma indicata dal De Gregorio (Conch. medit., pag. 363) come *C. virginalis var. elgus* potrebbe forse corrispondere alla forma in esame, ma, trattandosi di un semplice dubbio, non credo opportuno accettare tale nome. Si avvicina per diversi caratteri alla var. *turricula.*

L. Mercatii var. turricula (Br.).

(Tav. II, fig. 12).

Testa oblongo-conica, glabra; spira elevata acuta, anfractubus convexis suturam prope leviter canaliculatis, arcuatim rugosis, basi sulcata (Brocchi).

1814.	*Conus turricula Br.* . . .	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, II, pag. 288, Tav. II, fig. 7.
1818.	„ „ „ . . .	DEFRANCE, *Dict. Hist. Nat.*, tome X, pag. 264.
1820.	„ „ „ . . .	BORSON, *Oritt. piemont.*, pag. 10 (189).
1826.	„ *turriculus* „ . . .	RISSO, *Hist. Nat. Prod. Eur. merid.*, pag. 230.
1829.	„ *turricula* „ . . .	MARCEL DE SERRES, *Geogn. terr. tert.*, pag. 127.
1830.	„ „ „ . . .	BORSON, *Cat. Mus. min. Turin*, pag. 605.
1831.	„ „ „ . . .	BRONN, *It. tert. Geb.*, pag. 13.
1836.	„ *mediterraneus* var. . .	PHILIPPI, *Enum. Moll. Siciliae*, I, pag. 238.
1848.	„ *mediterraneus Brug.* var. .	BRONN, *Index paleont.*, pag. 330.
1868.	„ „ „ „ .	WEINKAUFF, *Conch. Mittelmeeres*, II, pag. 147.
1884.	„ „ „ forma diversa	DE GREGORIO, *Conch. medit.*, pag. 371.

Piacenziano: Astigiana e Nizzardo (rara).

Osservazioni. — Sembrami solo una varietà di *L. Mercatii,* a forma un po' più fusoide. Oltre all'esemplare tipico, che credetti opportuno far figurare di nuovo, nella collezione Brocchi esistono altri tre individui, di cui due più piccoli, ad anfratti superiormente più angolosi, a spira più gradinata; nel complesso parrebbero quasi esemplari giovani ed hanno qualche rassomiglianza colla var. *Caroli.*

L. Mercatii var. canaliculatodepressa Sacc.

(Tav. II, fig. 13).

Spira depressior. Anfractus prope suturam canaliculati, transversim plus minusve striolati.

Alt. 50-137 mm.: Lat. 30-71 mm.
Piacenziano (rara) ed *Astiano* (frequente) — Astigiana.

Osservazioni. — A primo tratto parrebbe quasi una specie a sè, ma osservansi esemplari diversi che fanno passaggio al tipo.

L. Mercatii var. suprainflata Sacc.

(Tav. II, fig. 14).

Testa maior, crassior. Spira minus acuta, inflatior. Anfractus prope suturam magis canaliculati.

Alt. 90 mm.: Lat. 50 mm.

Piacenziano: Albenga (rara).

Osservazioni. — Si collega gradualmente colla var. *miocenica,* nonchè colla var. *canaliculatodepressa.*

L. Mercatii var. miocenica Sacc.

Testa maior, crassior. Spira plus minusve depressior. Anfractus prope suturam subcanaliculati, transversim plus minusve substriolati.

Alt. 55-100 mm.: Lat. 25-55 mm.

1862. *Conus Mercatii Br.* DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. It. centr.,* pag. 25 (107).

Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (rara).

Osservazioni. — Pongo a tipo di questa forma la figura data dall'Hoernes (Foss. Moll. tert. Beck. Wien — Tav. 2, Fig. 1), non già le fig. 2 e 3 della stessa tavola che rappresentano forme assai diverse e che io appello rispettivamente *supracompressa* Sacc. (Fig. 2) e *conicomaculata* Sacc. (Fig. 3).

L. Mercatii var. subaustriaca Sacc.

(Tav. II, fig. 15).

Testa affinis C. Reussi H. A., *sed minus pyriformis.*

Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazioni. — La forma di Stazzano che ebbi ad esaminare, quantunque rappresentata da un solo esemplare incompleto, sembra avvicinarsi al *C. Reussi* H. A. ed al *C. austriacus* H. A., che a mio parere rappresentano solo varietà di una stessa specie.Questa specie è forse il *L. Mercatii,* eccetto che di queste forme si voglia costituire una specie a parte, essenzialmente *tortoniana.* Pure forme alquanto simili sembranmi il *C. gainfahrensis* H. A. ed in parte anche il *C. Neugeboreni* H. A.

Credo interessante notare come queste forme ficoidee, direi, tanto frequenti nel bacino viennese, sembrino quasi formare passaggio fra il tipo essenzialmente pliocenico del *L. Mercatii* e quello, specialmente miocenico, del *L. antiquus.*

Riguardo al tipo del *L. Mercatii,* forse gli si potrebbero ancora raggruppare attorno il *L. pseudaldrovandi* Sacco (1889 — *Conus Aldrovandi* Br. — R. Hoernes u. Auinger — Gast. I u. II Mioc. Med. stufe — Tav. IV, Fig. 2), il *L. Karreri* H. A. (*id.* — Tav. IV, Fig. 7, non *L. Hoernesi* Dod. = *C. Aldrovandi* Br. figurato da Hoernes in: Foss. Moll. tert. Beck. Wien — Tav. I, Fig. 2), il *L. ungaricus* H. A., il *L. Fuchsii* H. A., ecc.

L. MERCATII var. TAUROMAXIMA (an species distinguenda?) SACC.

(Tav. II, fig. 16).

Testa affinis C. Reussi H. A., *sed major, superne rapide inflata, potius quam regulariter ficoides. Spira depressior, sulculellis transversis destituta.*

Alt. 150 mm.: Lat. 88 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rara).

OSSERVAZIONI. — A primo aspetto parrebbe un vecchio *L. antiquus*, ma l'esame della spira fa riconoscere che esso collegasi meglio col *C. Reussi* H. A. e colla var. *subaustriaca*. Potrebbe forse considerarsi come una specie a sè, di cui la var. *compressicauda* sarebbe una varietà.

L. MERCATII var. COMPRESSICAUDA SACC.

(Tav. II, fig. 17).

Testa affinis var. tauromaxima *sed: minor; spira elatior, subscalarata; regio caudalis valde constricta.*

Alt. 75 mm.: Lat. 45 mm.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze (alquanto rara).

L. MERCATII var. ACANALICULATA SACC.

(Tav. II, fig. 18).

Spira depressior. Anfractus superne prope suturam depressiores, subplanati, non canaliculati.

Alt. 30-90 mm.: Lat. 12-50 mm.

Tortoniano: Stazzano (rara).

Piacenziano: Astigiana, Savona Fornaci, Zinola (non rara).

Astiano: Astigiana (rara).

OSSERVAZIONI. — Presenta passaggi alla var. *canaliculatodepressa;* però il suo carattere principale si riscontra in forme alquanto diverse, cioè alcune un po'allungate ed altre un po'rigonfie.

LITHOCONUS SUBACUMINATUS (D'ORB.).

(Tav. III, fig. 1).

Testa conica, acuminata; spira planiuscula, filo vel fune marginali, striisque circularibus eleganter distincta; apice exerto; basi subsulcata (Borson).

Alt. 55-130 mm.: Lat. 25-65 mm.

1798.	*Volutites n. 5.*	BORSON, *Ad. Oryct. ped. Auct.*, pag. 176.
1820.	*Conus acuminatus Bors.*	„ *Oritt. piemont.*, pag. 15, Tav. I, fig. 2.
1830.	„ „ „	„ *Cat. Coll. min. Turin*, pag.
1847.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 43.
1847.	„ *bisulcatus Bell. e Micht.* (*pars*)	„ „ „ „ „ 44.
1848.	„ *acuminatus Bors.*	BRONN, *Index paleont.*, pag. 328.
1852.	„ *subacuminatus D'Orb.*	D'ORBIGNY, *Prodr. pal. strat.*, III, pag. 56.
1852.	„ *bisulcatus Bell. e Micht.* (*pars*)	„ „ „ „ III, pag. 171.
1862.	„ *acuminatus Bors.*	DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Italia centr.*, pag. 25 (107).
1890.	„ *subacuminatus D'Orb.*	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piem.*, n. 4367.
1890.	„ *acuminatus Bors.* var.	„ „ „ „ n. 5437.

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (non rara).

Astiano: Astigiana (rarissima).

Osservazioni. — Il nome del Borson non può essere conservato, perchè già usato anteriormente dal Bruguière (1789).

Gli esemplari esaminati erano classificati alcuni come *C. antiquus,* altri come *C. tarbellianus,* altri come *C. ponderosus,* molti però erano indeterminati. Fortunatamente trovai nella collezione Borson l'esemplare tipico figurato, che credo opportuno far rifigurare.

Fuori del Piemonte questa bella specie venne generalmente determinata come *C. tarbellianus* Grat. A mio parere tale riferimento è erroneo, poichè il *C. tarbellianus* credo sia invece riferibile al *L. antiquus* Lk., come risulta dalle figure e dai paragoni del Grateloup. Quanto alle forme figurate dal M. Hoernes come *C. tarbellianus,* esse sono probabilmente riferibili, come var. *epellus* De Greg. (Tav. IV, Fig. 1), al *L. Mercatii;* qualche cosa di simile deve ripetersi per la figura data da R. Hoernes ed Auinger (Tav. V, Fig. 1). Invece le forme riferite dal Da Costa al *C. tarbellianus* sono in generale veri *L. subacuminatus,* come risulta nettamente dalla Fig. 1 di Tav. VII del noto lavoro " Gast. dep. terc. Portugal — 1863 „. Nel miocene (probabilmente *tortoniano*) del Portogallo questa specie sembra raggiungere dimensioni veramente colossali (mm. 185 $\times$ 90 circa); tali esemplari vennero indicati dal De Gregorio come var. *grolpus.*

Il *L. subacuminatus* è facilmente distinguibile dalle forme affini, specialmente coll'esame della spira, giacchè quivi gli anfratti sono profondamente scanalati, regolarmente e fortemente solcati, distinti da una sutura assai ampia, coi due margini quasi eguali, ecc.

È notevole come questa specie, essenzialmente *tortoniana,* siasi ancora continuata sino all'*Astiano,* come risultami dall'unico esemplare, gigantesco, proveniente dalle sabbie gialle dell'Astigiana e che fa parte della Collezione Borson. Talora gli individui di questa specie sono alquanto meno stretti superiormente che non quello tipico. La forma tipica passa gradualmente alle seguenti varietà.

L. subacuminatus var. conoidospira Sacc.

(Tav. III, fig. 2).

Spira regularius conica, non subexcavata et in regione centrali fortiter elato-mucronata sicut in specie typica.

Tortoniano: Stazzano, Montegibbio (rara).

Osservazioni. — Forse trattasi di individui non completamente adulti; forme simili vediamo figurate dal Da Costa.

L. subacuminatus var. subpyrulata Sacc.

(Tav. III, fig. 3).

Testa superne inflatior, subpyriformis. Spira regularius conica.

Tortoniano: Sogliano (rara).

L. SUBACUMINATUS var. SUBAMARGINATA SACC.

(Tav. III, fig. 4).

In regione supera anfractuum, margo externus canalis depressus, suboblitus.
Tortoniano: Stazzano (rara).

L. SUBACUMINATUS ? var. TAUROCONNECTENS SACC.

(Tav. III, fig. 5).

Testa magna. Spira inflatior, in regione centrali minus elato-mucronata; striae spirales parvuliores, numerosiores, in anfractu ultimo suboblitae.

Elveziano: Albugnano (rara).

OSSERVAZIONI. — Potrebbe forse considerarsi come una specie a parte che collega il *L. ineditus* ed il *L. antiquus* al *L. subacuminatus*, ma occorrono altri rinvenimenti per rischiarare la questione. A primo tratto ricorda il *L. antiquus* var. *elatocanaliculata.*

LITHOCONUS ANTIQUUS (LK.).

(Tav. III, fig. 6, 7).

C. *Testa turbinata, superne dilatata, basi obsolete rugosa; spira plana, subcanaliculata; labro arcuata* (Lamarck).

Alt. 8-85-120 mm.: Lat. 4-48-65 mm.

1810.	*Conus antiquus Lk.*	LAMARCK, *Ann. Mus. Hist. Nat.*, vol. 15, pag. 439 (pars).
1814.	„ „ „	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, II, pag. 268.
1818.	„ „ „	DEFRANCE, *Dict. Hist. Nat.*, tome X, pag. 263 (pars).
1820.	„ *virgo? Linn.*	BORSON, *Oritt. Piemont.*, pag. 14 (193).
1820.	„ *virginalis ? Br.*	„ „ „ „ 13 (192).
1827.	„ *antiquus Lk.*	BONELLI, *Cat. m. s. Mus. Zool. Torino*, n. 3652, 3662, 3663, 3673.
1830.	„ *virgo? Linn.*	BORSON, *Cat. Mus. min. Turin*, pag. 606.
1830.	„ *virginalis? Br.*	„ „ „ „ „ „ 605.
1831.	„ *antiquus Lk.*	BRONN, *It. tert. Gebild.*, pag. 13.
1842.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ediz., pag. 43 (pars).
1845.	„ „ „	DESHAYES in LAMARCK, *Hist. Nat. An. s. vert.*, tom. XI, p. 153.
1847.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1847.	„ „ „	MICHELOTTI, *Foss. terr. mioc.*, pag. 342.
1847.	„ *mediterraneus Brug.* var.?	BRONN, *Index paleont.*, pag. 328, 330.
1852.	„ *antiquus Lk.*	D'ORBIGNY, *Prodr. Paleont. strat.*, III, pag. 57.
1877.	„ „ „	LOCARD, *Descript. Faune tert. Corse*, pag. 62.
1890.	„ „ „	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4373.
1891.	„ „ *Lk. var. producta Myl.*	MYLIUS, *Forme ined. di Moll. mioc.*, pag. 8, fig. 2.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze, Baldissero, Albugnano, ecc. (frequentissima).

OSSERVAZIONI. — Per mancanza di figura questa bella e caratteristica specie venne finora generalmente o ignorata o male interpretata. Così il Brocchi le riferì esemplari di *C. Mercatii,* il Borson ne attribuì vari individui al *C. virgo* ed i giovani al *C. virginalis*, il Bronn credette trattarsi di una varietà di *C. mediterraneus.* Il Grateloup diede del *C. antiquus* una figura che non corrisponde affatto alla descrizione del Lamarck e che anzi appartiene ad un gruppo diverso; invece non conoscendo il vero *L. antiquus* egli costituì di questa forma una specie nuova: *C. tarbellianus*, che quindi

credo debba cadere in sinonimia del primo; tale errore del Grateloup venne poi continuato dall' Hoernes, dal Neugeboren, dal Da Costa, ecc., e produsse una grande confusione, tant'è che vediamo molti autori citare il *C. antiquus,* che è essenzialmente *elveziano,* sia nel miocene che nel pliocene.

Il *L. antiquus* potrebbe forse considerarsi come il progenitore più o meno diretto del *L. Mercatii,* specialmente delle sue varietà *austriaca, extarbelliana*, *canaliculato-depressa,* ecc.; si distingue però specialmente, almeno in linea generale, per essere quasi sempre più ficoide-clavato, più stretto nella parte caudale, e perchè il canale che presentano gli anfratti (quasi solo l'ultimo o gli ultimi) nella regione spirale è più largo ed a margine esterno più stretto, più rapidamente rialzato e quindi più individualizzato, direi; inoltre per lo più gli anfratti nella regione spirale centrale sono appiattiti, non canalicolati, ben poco od anche per nulla scalarati.

Finora di questa specie si conobbero solo gli esemplari adulti, mentre i giovani furono attribuiti a specie diverse; il Grateloup, per esempio, figurò un individuo giovane come *C. tarbellianus* var. *virginalis* Br. (Conch. terr. tert. Adour — Tav. 43, Fig. 8); così pure il Borson li determinò come *C. virginalis* Br. Alla forma in esame deve pur forse collegarsi la var. *splendens* Grat.; noto al riguardo come ben diverse sono le forme indicate dal Da Costa sotto questo nome nel suo lavoro " Gastr. terc. Portugal „ per cui credo doverle indicare con nuovi nomi, cioè *exsplendens* Sacc. (per le forme di Tav. VII) e *postsplendens* Sacc. (per le forme di Tav. VIII).

L. antiquus var. Wheatleyi (Micht.).

Testa parva, turbinato-conica, transversim sulcata; sulcis parallelis distinctis, aequalibus, ubique conspicuis; spira producta, acuta; anfractibus subplanatibus, superne striatis (Michelotti).

Alt. 15-40 mm.: Lat. 8-20 mm.

1847. *Conus Wheatleyi Micht.* MICHELOTTI, *Descript. Foss. mioc.*, pag. 339, Tav. XIII, fig. 18.
1847. „ „ „ SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1852. „ „ „ D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 57.
1890. „ „ „ SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piem.*, n. 4403.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze, Albugnano, Baldissero (non rara).

Osservazioni. — A primo tratto non solo ritenni questa forma come una buona specie, ma parvemi riferibile ai *Rhizoconus*, rassomigliando assai per esempio al *R. monile* Brug. In seguito però ricercando gli esemplari giovani del *L. antiquus* venni a riconoscere la rassomiglianza grandissima che essi hanno colla forma in esame, la quale in complesso potrebbe forse solo ritenersi come uno stadio giovanissimo del *C. antiquus.* Sembrami affine a questa forma la *Mitra peregrinula* May.

Subvar. permucronata Sacc. (Tav. III, fig. 8). — *Spirae apex permucronatus.*

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Subvar. perangulata Sacc. (Tav. III, fig. 9). — *Testa superne latior, perangulata.*

Elveziano: Colli torinesi, Baldissero (non rara).

L. ANTIQUUS var. PLANOSPIRA (GRAT.).

(1840. GRATELOUP (*C. tarbellianus var. planospira*). *Conch. foss. Bass. Adour.*, Pl. 43, fig. 2).

Spira depressior, subplana (parum vel non subcanaliculata), exceptis anfractibus initialibus elatis.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

L. ANTIQUUS var. CONCAVESPIRA SACC.

(Tav. III, fig. 10).

Spira valde depressior, planoconcava, vix apice subelata.

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

L. ANTIQUUS var. PERCANALICULATA SACC.

(Tav. III, fig. 11).

Spira, excepta regione apicali, canaliculata.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze, Baldissero (frequente).

L. ANTIQUUS var. ACANALICULATA SACC.

(Tav. III, fig. 12).

In regione spirae anfractus, etiam ultimus, subplanati non canaliculati.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze, Baldissero (frequente).

OSSERVAZIONI. — Si tratta di un carattere giovanile che talora persiste anche allo stato adulto.

L. ANTIQUUS var. ELATOCANALICULATA SACC.

(1840. GRATELOUP (*C. tarbellianus var. d.*). *Conch. terr. tert. Bass. Adour.*, Pl. 45, fig. 23).

Spira elatior, interdum subinflatula; fere usque ad regionem apicalem subcanaliculata.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze (non rara).

OSSERVAZIONI. — Collegasi gradualmente col tipo e con alcune varietà (*percanaliculata, elatospirata*, ecc.) del *L. antiquus*, ma presenta pure qualche rapporto col *L. subacuminatus.*

L. ANTIQUUS var. SUBSCALARATA SACC.

(1840. *C. intermedius* — GRATELOUP, *Conch. terz. tert. Bassin Adour.*, Pl. 44, fig. 22).

Spira elatior, plus minusve scalarata.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Si collega gradualmente colle var. *elatocanaliculata* ed *elatospirata*; gli esemplari che presentano più spiccato il carattere della gradinatura (come per esempio quello disegnato dal Grateloup) sono generalmente individui alquanto anomali.

L. ANTIQUUS var. ELATOSPIRATA SACC.

(Tav. III, fig. 13).

Spira plus minusve elatior, non scalarata, subconica.

Elveziano: Colli torinesi, Sciolze, Baldissero, Albugnano (frequentissima).

OSSERVAZIONI. — Rappresenta in complesso la persistenza del carattere giovanile nell'adulto. La spira talora è conica fino alla sua parte periferica, talora invece, e più comunemente, essa diventa quivi meno inclinata; inoltre essa è assai variabile nel suo grado di conicità.

L. ANTIQUUS var. PERELATOSPIRA SACC.

(Tav. III, fig. 14).

Spira elatissima, conica, anfractus in regione spirae interdum trasversim striolati.

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

OSSERVAZIONI. — È una esagerazione, direi, della var. *elatospirata.*

L. ANTIQUUS var. ELONGATISSIMA SACC.

(Tav. III, fig. 15).

Testa plus minusve elongatior; cauda longo-gracilior. Spira elatior.

Alt. 58-77 mm.: Lat. 28-33 mm.

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

OSSERVAZIONI. — Forse trattasi di individui anomali piuttosto che di vere varietà.

Subvar. PLANOPERLONGA SACC. — *Spira depressior, subplanata* (Alt. 60 mm.: Lat. 30 mm.).

Elveziano: Colli torinesi (rara).

LITHOCONUS INEDITUS (MICHT.).

(Tav. III, fig. 16, 16 *bis*).

Testa turbinato-conica, spira acutiuscula, anfractibus angustis, angulatis, superne leviter circumcincter striato-impressis, ultimo regulariter conoideo, ad apicem tenuiter atque oblique striato; apertura angusta; labro tenui, simplici, superne emarginato (Michelotti).

Alt. 12-90 mm.: Lat. 6-47 mm.

1861. *Conus ineditus Micht.* MICHELOTTI, *Ét. Mioc. inf. Italie septentr.*, pag. 105, Tav. XI, fig. 11, 12.
1890. „ „ „ SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4364.

Tongriano: Cassinelle, Cosseria, Dego, Mornese, Carcare, Carpeneto, Pareto, S. Giustina, Sassello, Mioglia, ecc. (frequente).

OSSERVAZIONI. — L'esemplare tipico figurato del Michelotti è giovane. Gli adulti si presentano meno regolarmente conici, cioè sono più o meno notevolmente rigonfi nella parte superiore, come nel *L. antiquus;* inoltre nella regione della spira gli anfratti sono più profondamente canalicolati per il notevole rialzarsi del bordo esterno. Nella parte ventrale superiore dei penultimi anfratti degli esemplari adulti sovente si os-

serva una depressione o gradinatura trasversa che scompare però sempre nell'ultimo anfratto; nel caso se ne volesse costituire una varietà, ciò che non sembrami opportuno, essa dovrebbe appellarsi var. *depressa* (Micht.), poichè il Michelotti, che osservò tale carattere proponeva (nel caso lo si riconoscesse costante in queste forme) di trarne il nome di *C. depressus*. Come esemplare adulto figuro appunto (fig. 16 *bis*), quello di cui parla il Michelotti nell'ultimo periodo della descrizione del *C. ineditus*, dicendolo lungo 65 mm. e dubitando doversi appellare *C. depressus*.

Questa specie presenta molti punti di contatto coll'eocenico *L. diversiformis* (Desh.), da cui potrebbe derivare, nonchè col *L. antiquus* e col *L. subacuminatus* che ne potrebbero essere le forme più o meno direttamente derivate.

L. ineditus var. astriolata Sacc.

(Tav. III, fig. 17).

Testa plerumque parva. Anfractus in regione spirae cingulo externo et striolis transversis destituti.

Alt. 20-45 mm.: Lat. 11-22 mm.

Tongriano: Sassello, S. Giustina, Pareto, Dego, Cassinelle (frequente).

Osservazioni. — Trattasi per lo più di esemplari giovani, a spira più o meno elevata, spesso declive, scalarata o no, quasi sempre senza il cingolo esterno, con semplici traccie, oppure mancanti affatto, delle striole trasverse di ornamentazione; talora tali strie della regione spirale quando sono poco accentuate scompaiono colla fossilizzazione.

L. ineditus var. ascalaratospira Sacc.

(Tav. III, fig. 18).

Anfractus in regione spirali fere acanaliculati, non scalarati, cingulo elato externo fere destituti.

Tongriano: Cassinelle (alquanto rara).

L. ineditus var. juvenodepressa Sacc.

(Tav. III, fig. 19).

Testa plerumque minor. Spira depressior, subplanata (excepta regione centrali elata, saepe mucronata).

Alt. 15-50 mm.: Lat. 8-26 mm.

Tongriano: Cassinelle, Carcare, Mioglia, Sassello (frequente).

Osservazioni. — Ricorda alquanto il *L. Wheatlegi* (Micht.), e, come quello, credo si tratti essenzialmente di esemplari giovani.

L. ineditus var. longispirata Sacc.

(Tav. III, fig. 20).

Spira elatior, plus minusve scalaratior.

Tongriano: Cassinelle, Carcare, Carpeneto, Dego, Mioglia, Sassello, Pareto (frequente).

Osservazioni. — Collegasi gradualmente colla specie tipica.

L. ineditus var. pagodaeformis Sacc.

(Tav. III, fig. 21).

Testa plerumque elongatior, magis fusiformis; spira elatior, pagodaeformis.

Alt. 80-115 mm.: Lat. 40-50 mm.
Tongriano: Pareto, Mioglia, Dego (non rara).

L. ineditus var. convexospirata Sacc.

(Tav. III, fig. 22).

Spira elatior, inflatior, subconvexa.

Tongriano: Dego, Cassinelle (alquanto rara).

L. ineditus var. perproducta Sacc.

(Tav. III, fig. 23).

Testa elongatior, aliquantulum constrictior.

Alt. 40-50 mm. Lat.: 18-22 mm.
Tongriano: Pareto, Carcare, Dego (non rara).

L. ineditus var. fungiformis Sacc.

(Tav. III, fig. 24).

Testa crassa, superne rapide inflata, clavata; spira elatior, subconvexa.

Alt. 90? mm.: Lat. 60 mm.
Tongriano: Pareto (rara).

Lithoconus? parvicaudatus Sacc.

(Tav. III, fig. 25).

Testa subconica in regione caudali rapide imminuta; spira conica, mediocriter elata, non vel minime scalarata. Anfractus, ultimus praecipue, in regione spirae plus minusve subcanaliculati, in regione ventrali media caudam versus rapide imminuti, in regione caudali subgraciles; in regione spirae maculis latis subregularibus, in regione ventrali et caudali macularum seriebus regularibus subrectilineis transversis, interdum ornati. Apertura obliqua, subconstricta.

Alt. 25-50 mm.: Lat. 15-27 mm.
Elveziano: Colli torinesi, Sciolze (non rara).

Quadro comparativo dei *LITHOCONUS*

Osservazioni. — Questa forma si avvicina assai per alcuni caratteri allo *Stephenoconus Bredai* per modo che quasi ne parrebbe una varietà senza tubercoli; d'altra parte si accosta pure moltissimo ad alcune varietà del *Chelyconus avellana,* per modo che, anche in considerazione del mediocre stato di conservazione dei fossili, rimango per ora alquanto incerto nella determinazione della forma in esame. Quanto alle colorazioni che appaiono in alcuni esemplari esse sembrano avvicinare questa forma ai *Lithoconus,* ricordando ad esempio quella del *L. litteratus;* ma quando mancano i colori, variando molto i caratteri di forma, i limiti di questa variabilissima specie divengono assai incerti.

L. parvicaudatus var. turbinatissima Sacc.

(Tav. III, fig. 26).

Testa turbinatior, subclaviformis; cauda constrictior.

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

L. parvicaudatus var. taurotessellata Sacc.

(Tav. III, fig. 27).

Testa aliquantulum fusulatior. Anfractus superne subcanaliculati; maculis evidentioribus ornati, duobus fasciis subochraceis, una in regione ventrali et una in regione caudali, muniti.

Elveziano: Sciolze (rara).

Osservazioni. — Si tratta di un esemplare a colorazione assai ben conservata e che ricorda molto, per le due fascie trasverse, il vivente *L. tessellatus,* ciò che accresce l'affinità della forma in esame ai veri *Lithoconus.*

Sottogen. LEPTOCONUS SWAINSON, 1840.

Quantunque questo sottogenere comprenda tuttora forme assai diverse e che dovranno in seguito collocarsi in sottogeneri diversi, tuttavia nel complesso esso presenta caratteri tali da inglobare parecchie specie fossili.

LEPTOCONUS BROCCHII (BRONN.).

(Tav. IV, fig. 1).

Alt. 7-65 mm.: Lat. 3-22 mm.

1814. *Conus deperditus Brug.* BROCCHI, *Conch. foss. subap.*, II, pag. 292, Tav. III, fig. 2.
1820. " " " BORSON, *Oritt. piem.*, pag. 12 (191).
1825. " " " BASTEROT, *Bass. tert. S. O. France*, pag. 39.
1826. " " " RISSO, *Hist. Nat. Europe mér.*, IV, pag. 230.
1826. " " " BONELLI, *Catal. m. s. Museo zool. Torino*, n. 576.
1827. " " " SASSO, *Saggio geol. Bac. terz. Albenga*, pag. 482.
1829. " " " DE SERRES, *Géogn. terr. tert.*, pag. 127.
1831. " " " (*pars*) BRONN, *It. tert. Geb.*, p. 12.
1831. " *Brocchi Bronn* BRONN, *It. tert. Gebild.*, pag. 12.
1832. " " " CRISTOFORI e JAN, *Cat. Conch. foss. univalvi*, pag. 15.
1837. " *deperditus Brug.* PUSCH, *Polens Palaeontologie*, pag. 115.
1838. " " " MICHELOTTI, *Geogn. zool. Ansicht tert. Bild. Piemonts*, pag. 397.
1842. " " " SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed., pag. 43.
1843. " *Brocchii Bronn.* NYST, *Coqu. et Polyp. foss. Belg.*, pag. 584.
1847. " " " SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1847. " " " MICHELOTTI, *Descript. foss. mioc.*, pag. 337.
1848. " " " BRONN, *Index paleont.*, pag. 328.
1852. " " " D'ORBIGNY, *Prodr. pal. strat.*, III, pag. 171.
1863. " " " COCCONI, *Enum. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 153.
1881. " " " FONTANNES, *Moll. plioc. Rhône*, pag. 149.
1884. " *canal.* forma *Brocchii Br.* DE GREGORIO, *Studi Conch. medit.*, pag. 360.
1888. " *Brocchii Bronn* TRABUCCO, *Foss. Bac. plioc. R. Orsecco*, pag. 19.
1890. " " " SACCO, *Cat. pal. Bac. tert. Piemonte*, n. 4382.

Piacenziano: Astigiana, Castelnuovo, Rocca d'Arazzo, R. Orsecco; Piacentino; Zinola, Albenga, Bordighera, Nizzardo (frequentissima).

Astiano: Astigiana, Piacentino (alquanto rara).

OSSERVAZIONI. — Nella collezione Brocchi, oltre all'esemplare tipico (la cui figura nella tavola del lavoro del Brocchi non è fra le più riuscite), evvi ancora un altro esemplare identico al primo e proveniente dal Piemonte.

Nella collezione Michelotti trovai 5 esemplari di questa specie coll'indicazione: " *S. Maria Stazzano* " il che indicherebbe una provenienza *tortoniana,* ma dubito trattisi di un errore, sia perchè nell'esame di oltre 100 esemplari di *L. Brocchii* di varie località e di diversi Musei, constatai essere essi tutti di provenienza pliocenica, sia perchè anche i 5 esemplari in questione per la natura del materiale che li riempie sembrano derivare pure dal pliocene.

Gli autori, come il Borson, il Sismonda, ecc., i quali indicarono il *C. deperditus* come trovato nel Miocene torinese, si riferivano ad esemplari di *L. Allionii.*

L. Brocchii ? var. excanaliculata Sacc.

Testa pyramidalis, transversim striata, spira conica, anfractubus omnibus canaliculatis, basi sulcata (Brocchi).

1814.	*Conus canaliculatus Br.*	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, pag. 636, Tav. XV, fig. 28.
1820.	" " "	BORSON, *Oritt. piem.*, pag. 17 (196).
1831.	" " "	" *Cat. Coll. min. Turin*, pag. 606.
1831.	" " "	BRONN, *Ital. tert. Gebild.*, pag. 12.
1845.	" " "	LAMARCK, *Hist. Nat. An. s. vert.*, XI, pag. 159.
1848.	" " "	BRONN, *Index paleont.*, pag. 329.
1873.	" " "	COCCONI, *Enum. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 154.
1873.	" " "	FISCHER et TOURNOUER, *Invert. foss. M. Leberon*, pag. 127.
1884.	" " "	DE GREGORIO, *Studi Conch. medit. viv. e foss.*, pag. 359.

Piacenziano : Piacentino (rara).

Astiano: Valle d'Andona, Piacentino (rara).

Osservazioni. — Questa forma parrebbe riferibile al gruppo del *L. Brocchii*, se pure non è un esemplare giovane di qualche altra forma; ma non avendo trovato l'esemplare tipico nella collezione Brocchi non riescii a chiarire la cosa. Il nome *canaliculatus* devesi abbandonare già esistendo sin dal 1795 un *Conus canaliculatus* Chemn.

L. Brocchii var. antediluvianoides Sacc.

(Tav. IV, fig. 2).

Spira interdum aliquantulo longior. Funiculum (in angulo spirae situm) plus minusve granulatum vel subgranulatum; sub funiculo striolae, 1 vel 2, plus minusve evidentes.

Piacenziano : Astigiana, Piacentino, Zinola, Albenga, R. Torsero, Bordighera (non rara).

Osservazioni. — Passa gradatissimamente al tipo. È interessante poichè sembra indicarci una regolare transizione fra il gruppo del *C. Brocchii* e quello del *C. antediluvianus*, per modo che la loro separazione in due sottogeneri differenti appare alquanto arbitraria. Accenniamo però come nel complesso le forme che appartengono al gruppo del *C. antediluvianus*, oltre ai noti caratteri differenziali, si presentino per lo più leggermente inflate ed a granulazioni più grosse che non quelle del gruppo del *L. Brocchii.*

L. Brocchii var. fusulospirata Sacc.

(Tav. IV, fig. 3).

Testa elongatior, fusulatior; spira elatior, aliquantulum gracilior.

Alt. 34-38 mm.: Lat. 14-16 mm.

Piacenziano: Astigiana, Piacentino, Albenga, Bussana (non rara).

Osservazioni. — Passa insensibilissimamente al tipo.

L. Brocchii var. crassospirata Sacc.

(Tav. IV, fig. 4).

Testa interdum crassior, latior. Spira minus elata, crassior; saepe minus fortiter scalarata.

Alt. 17-67 mm. : Lat. 8-33 mm.

Piacenziano: Astigiana, Piacentino, Zinola, Albenga, R. Torsero, Bordighera (abbondantissima).

Astiano: Astigiana, Piacentino (non rara).

Osservazioni. — È più frequente del tipo al quale si collega graduatissimamente. Non pochi esemplari presentansi colla spira bassa ma sono assai scalarati in modo da far passaggio alla var. *brevidepressula*.

L. Brocchii var. brevidepressula Sacc.

(Tav. IV, fig. 5).

Testa brevior. Spira depressior.

1890. *Conus Brocchii Bronn.* — DELLA CAMPANA, *Pliocene Borzoli*, pag. 27.

Piacenziano: Borzoli, Bussana (alquanto rara).

Osservazioni. — Esistono esemplari che formano passaggio graduale al tipo. Si avvicina assai per la forma complessiva al *L. Allionii*, distinguendosene pel funicolo meno tagliente, più rotondeggiante, per essere gli anfratti alquanto più ventricosi, ecc.

Leptoconus Allionii (Micht.).

(Tav. IV, fig. 6).

Testa turbinata, conica, laevigata; basi striata; spira plus minusve producta, scalariformi; apertura angusta; labro arcuato, superne profunde emarginato (Michelotti).

Alt. 15-30 mm.: Lat. 7 1/2-17 mm.

1818.	*Conus deperditus Lk.*	DEFRANCE, *Dict. Hist. nat.*, tome X, pag. 261.
1820.	" " *Brug.*	BORSON, *Orittogr. piemont.*, pag. 11, 12.
1827.	" " "	BONELLI, *Cat. m. s. Museo Zool. Torino*, n. 3661.
1830.	" " "	BORSON, *Cat. Coll. Musée min. Turin*, pag. 605.
1842.	" " "	SISMONDA, *Syn. meth.*, 1a ed., pag. 43.
1847.	" *Allionii Micht.*	MICHELOTTI, *Descript. foss. mioc.*, pag. 338, Tav. XVII, fig. 17.
1847.	" " "	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2a ed., pag. 43.
1852.	" " "	D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 56.
1872.	" " "	KOENEN, *Mioc. Nord-Deutschl. u. seine Moll. Fauna*, pag. 214.
1890.	" " "	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4369.

Elveziano: Colli torinesi, Baldissero (frequente).

Osservazioni. — Riguardo a questa specie dobbiamo osservare anzi tutto come le cifre date dal Michelotti riguardo alle sue dimensioni non corrispondano affatto a quelle che mostra la figura presentata, mentre questa meglio collima colle dimensioni date per il *C. discors* (che credo sia una varietà della specie in esame); ma siccome il *C. Allionii* è descritto prima del *C. discors*, e ne è data una buona figura, così non dubito di accettare il *C. Allionii* come specie tipica. Inoltre è notevole come a tipo, che dobbiamo perciò conservare come tale, del *C. Allionii* venne figurato un esemplare il quale rappresenta quasi un'ultima modificazione (a spira depressa) di una forma che ha, molto più comunemente, una spira abbastanza regolarmente conica e che con modificazioni nel senso opposto, cioè nell'elevazione della spira, giunge sino

alla forma che il Michelotti appellò *C. oblitus;* cioè il Michelotti costituì due specie sopra due forme tra loro ben distinte, ma che a mio parere rappresentano le ultime modificazioni, in senso opposto, di una stessa specie; quindi nè saprei trovare un carattere specifico distintivo delle due forme, nè mi parrebbe perciò logico costituirne due specie diverse, nello stesso modo come non sarebbe naturale elevare al grado di specie le var. *brevidepressula* e *fusulospirata* del *L. Brocchii.*

D'altronde lo stesso Michelotti sembra essersi convinto di ciò, giacchè nella sua collezione gli esemplari di *C. Allionii, C. discors* e *C. oblitus,* trovavansi ora riuniti assieme. Il *C. Allionii* ha la precedenza come specie tipica perchè nel lavoro è descritto al N. 4 (pag. 338), mentre il *C. oblitus* trovasi al N. 8 (pag. 340).

Anom. COMPRESSULA SACC. — *Spira depressior.*

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Anom. SEMISCALARATA SACC. — *Anfractus in regione centrali et mediā spirae scalarati, in regione externa spirae non scalarati, regulariter declives, funiculo subdestituti.*

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

L. ALLIONII? var. GRANULOCATENATA SACC.

(Tav. IV, fig. 7).

Testa plerumque minor. Spira plus minusve elatior. Anfractus in regione caudali et interdum in regione ventrali seriis granularibus ornati.

Alt. 8-20 mm.: Lat. 4 $^1/_2$-10 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

OSSERVAZIONI. — I caratteri della granulosità si incontrano specialmente nei *Conospirus,* il che indica sempre più il nesso strettissimo che collega i *Conospirus* ai *Leptoconus.* Nella specie in esame tali caratteri osservansi su forme un po' diverse, specialmente su quelle affini alla var. *conicospirata,* e per lo più su esemplari piccoli, il che sembra indicare che le granulazioni in esame rappresentano un carattere saltuario, proprio specialmente degli individui giovani.

L. ALLIONII var. CONICOSPIRATA SACC.

(Tav. IV, fig. 8).

Spira plus minusve elatior, subregulariter conica.

Alt. 15-34 mm.: Lat. 8-15 mm.

Elveziano: Colli torinesi, Baldissero (frequente).

OSSERVAZIONI. — Passa gradualissimamente al tipo. Le si avvicina alquanto la forma figurata dall'Hoernes (Foss. Moll. tert. Beck, Wien. — Tav. V, Fig. 7), come *Conus Dujardini.*

L. ALLIONII var. PERCONICOSPIRATA SACC.

(Tav. IV, fig. 9).

Testa elongatior, subfusoidea; spira valde elatior.

Alt. 18-31 mm.: Lat. 7-12 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Collegasi gradualmente colla var. *conicospirata.*

L. Allionii var. discors (Micht.).

(Tav. IV, fig. 10).

Testa interdum crassior. Spira subinflata, subconvexa.

Alt. 20-45 mm.: Lat. 11-24 mm.

1847. *Conus discors Micht.* MICHELOTTI, *Descript. foss. mioc.*, pag. 338.
1890. " " " SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4385.

Elveziano: Colli torinesi (frequente).

Osservazioni. — Se si volesse considerare il *C. oblitus* come specie a sè, la forma *discors* se ne potrebbe considerare come la varietà più depressa; ma essa collegasi però affatto insensibilmente col *L. Allionii* e specialmente colla sua var. *conicospirata.* Quanto al carattere indicato del Michelotti, che cioè nel *C. discors* gli anfratti sono superiormente depresso-canalicolati, esso osservasi pure quasi sempre nel *C. Allionii.*

L. Allionii var. pupoidespira Sacc.

(Tav. IV, fig. 11).

Distinguunt hanc var. a var. *discors* (Micht.) sequentes notae:

Testa fusulatior; spira elatior, inflatior, pupoidea.

Alt. 22-42 mm.: Lat. 11-22 mm.

Elveziano: Colli torinesi (frequentissima).

Osservazioni. — Il rigonfiamento della regione spirale sembra specialmente caratteristico delle forme mioceniche, come vedesi pure nel gruppo del *C. antediluvianus.* Si collega colla var. *discors,* e col *C. oblitus.*

L. Allionii var. perpupoidespira Sacc.

(Tav. IV, fig. 12).

Distinguunt hanc var. a var. *discors* sequentes notae:

Testa valde fusulatior; spira valde elatior, inflatior, pagodaeformis.

Alt. 30-45 mm.: Lat. 14-19 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Rappresenta solo un'esagerazione, direi, dei caratteri della var. *pupoidespira.*

L. Allionii var. oblita (Micht.) (an species distinguenda?).

(Tav. IV, fig. 13).

Testa turbinata, conica, elongata, laevigata; basi laevigata; spira producta; anfractibus carinatis, scalariformibus; apertura angusta; labro arcuato, superne late marginato (Michelotti).

Distinguunt hanc var. a var. *discors* sequentes notae:

Testa fusulatior. Spira elatior, scalaratior; in regione marginali spirae funiculum minus visibile, minus erectum, deinde angulus magis acutus.

Alt. 25-50 mm.: Lat. 11-20 mm.

1847. *Conus oblitus Micht.* MICHELOTTI, *Descript. foss. mioc.*, pag. 340, Tav. XIV, fig. 2.
1847. „ „ „ SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1852. „ „ „ D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 57.
1890. „ „ „ SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4391.

Elveziano: Colli torinesi (frequentissima).

Osservazioni. — Come già ebbi ad accennare trattando del tipo del *L. Allionii*, la forma in esame appare specificamente affatto distinta da detta specie, ma dubito trattisi qui solo di estreme ed opposte modificazioni di una specie sola la cui forma più frequente sarebbe la *pupoidespira;* d'altronde sonvi passaggi così insensibili fra dette due forme, per quanto diverse alla comparazione diretta, che non sembra molto naturale il dividerle specificamente. Così, per esempio, quando gli esemplari del *C. oblitus* presentano la spira un po' meno inflata, cioè più regolarmente conica, ne riesce sovente incertissima la delimitazione dalla var. *perconicospirata* del *L. Allionii;* d'altronde sia il rigonfiamento della spira, sia l'essere questa più comunemente scalarata (ciò che per lo più osservasi nel gruppo del *C. oblitus*), non paionmi caratteri tali da appoggiare una distinzione specifica che all'atto pratico diventa molto arbitraria. Tale fatto sembra così chiaro che lo stesso Michelotti in questi ultimi anni riunì assieme, nella sua raccolta, gli esemplari di queste due cosidette specie. Notiamo infine come la forma in esame non sia da confondersi col gruppo del *C. Dujardini*, come potrebbe forse supporsi a primo tratto, distinguendosene in generale nettamente per la spira meno regolarmente acuta, per la parte superiore degli anfratti discendente meno regolarmente verso il basso e costituente un angolo assai meno acuto, con un accenno più o meno evidente di funicolo od almeno di leggerissimo rilievo.

L. Allionii var. perfuniculata Sacc.

(Tav. IV, fig. 14).

Distinguunt hanc var. a var. *oblita* Micht. sequentes notae:

Angulus anfractuum minus acutus; funiculo magis visibile, plus minusve conspicuo, munitus.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — È una semplice modificazione della var. *oblita,* alla quale passa insensibilissimamente, e che ricorda alquanto il *L. Brocchii.*

Leptoconus elatus (Micht.).

(Tav. IV, fig. 15).

Testa conica, elongata; spirae exertae; anfractubus funiformibus: sutura incavata distinctis; basi acuminata (Borson).

Testa conico-elongata, cylindrica; spira exerta; anfractibus supernis vix elatis, rotundatis, mediis subangulatis, postremo angulato, rugulosis, sulcis longitudinalibus oblique instructis (Michelotti).

Alt. 40-150 mm.: Lat. 17-55 mm.

1821.	*Conus elongatus Bors.*	BORSON, *Oritt. piemont.*, pag. 19 (198), Tav. I, fig. 4.
1830.	„ „ „	„ *Cat. Coll. min. Turin*, pag. 606.
1847.	„ *elatus Micht.*	MICHELOTTI, *Descript. foss. mioc.*, pag. 341, Tav. XIII, fig. 16.
1847.	„ „ „	SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1848.	„ *elongatus Bors.*	BRONN, *Index paleont.*, pag. 329.
1851.	„ *Haueri Partsch.*	HOERNES, *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, pag. 34.
1852.	„ *elatus Micht.*	D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 56.
1862.	„ *Haueri Partsch.*	DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. Ital. centr.*, pag. 25 (107).
1872.	„ „ „	LOCARD, *Descr. Faune tert. Corse*, pag. 69.
1890.	„ *elatus Micht.*	SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4387.

NB. Le indicazioni di *Conus Puschi Micht.* riguardanti fossili *tortoniani* rientrano generalmente nella sinonimia del *L. elatus.*

Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (non rara).

Osservazioni. — Il nome *elongatus* di Borson non può essere adottato già esistendo sin dal 1786 un *Conus elongatus* Chemnitz; quanto all'appellativo *Haueri,* quantunque già indicato nel 1842 dal Partsch, rimase solo nome di Catalogo sino al 1851 quando l'Hörnes figurò e descrisse la forma a cui esso era applicato, forma che quindi deve solo più considerarsi come una varietà del *C. elatus.* L'indicazione data dal Borson, che cioè questa forma si trovi nell'Astigiana è affatto errata, giacchè in quasi un secolo di continue ricerche non si trovò nell'Astigiana alcun individuo di questa specie, ed inoltre dall'esame dell'esemplare tipico su cui il Borson fondò il suo *C. elongatus* potei accertarmi che anche esso proviene dal *Tortoniano* del Tortonese. Nella parte superiore degli ultimi anfratti esiste talora un cordoncino trasverso più o meno depresso, che però generalmente scompare nell'ultimo anfratto degli esemplari completamente adulti. I primi anfratti sono generalmente più o meno granulosi. Notisi che nel tipo di questa specie gli anfratti sono alquanto angolosi e quindi la spira risulta scalarata, mentre che invece generalmente gli anfratti si presentano più o meno rotondeggianti.

Il riferimento del *C. elatus* ai *Leptoconus* può ancora presentare qualche dubbiezza, quantunque a tale sottogenere si riferiscano forme viventi, alquanto simili, così il *C. gradatus* Gray, il *C. acuminatus* Brug., ecc.; però alcuni caratteri avvicinano il *C. elatus* ai *Chelyconus.*

L. elatus var. depressulespirata Sacc.

(Tav. IV, fig. 16).

Spira minus elata, ratione habita, basi latiore; anfractus rotundatiores.

Alt. 80-95 mm.: Lat. 35-45 mm.

Tortoniano: Stazzano, Montegibbio (alquanto rara).

Osservazioni. — Si avvicina alla var. *Haueri* (Partsch.).

L. elatus var. taurobrevis Sacc.

(Tav. IV, fig. 17).

Testa minus elongata, spira minus elata; anfractus rotundatiores.

Alt. 55 mm.: Lat. 27 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Osservazioni. — Collegasi colla var. *depressulespirata.*

L. elatus var. tauroparva Sacc.

(Tav. IV, fig. 18).

Testa minor, gracilior; spira scalaratior.

Alt. 40 mm.: Lat. 16 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Osservazioni. — Ricorda alquanto il *L. extensus* (Partsch.), forma del Miocene (specialmente *tortoniano*) viennese che riscontrai nell'*Elveziano* della Sardegna, ma che finora non si incontrò in Piemonte.

L. elatus? var. taurotransiens Sacc.

(Tav. IV, fig. 19).

Testa plerumque minor; spira, ratione habita, elatior. Anfractus breviores.

Alt. 36-65 mm.: Lat. 16-26 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Sembra quasi far passaggio al *C. oboesus* Micht., per modo che la sua determinazione riesce alquanto incerta; alcuni esemplari hanno la spira superiormente assai gracile, tanto da ricordare in piccolo la var. *fusulatimspirata.*

L. elatus var. convexuloides Sacc.

(Tav. IV, fig. 21).

Spira minus scalarata, interdum aliquantulum elongatior. Anfractus convexiores, subrotundati.

Tortoniano: Stazzano, Montegibbio (non rara).

? *Piacenziano:* Borzoli (rarissima).

Osservazioni. — Un individuo gigantesco di questa varietà raggiunge la lunghezza di 150 mm. Spesso nella parte superiore gli anfratti presentano un cordoncino trasversale depresso.

Quanto all'unico ed incompleto esemplare già citato dal Della Campana (1890, *Conus Haueri?* Partsch, Pliocene Borzoli, pag. 28) conservato nel Museo geologico di Genova coll'indicazione di provenienza: *Borzoli,* credo opportuno mantenere qualche riserva sino ad ulteriori scoperte, trattandosi di una specie tanto schiettamente miocenica, nè parendomi impossibile che detto esemplare possa provenire invece dal tortonese.

L. ELATUS var. FUSULATIMSPIRATA SACC.

(Tav. IV, fig. 22).

Testa aliquantulum elongatior. Spira valde elongatior, fusiformis; anfractus saepe rotundatiores, ultimo excepto.

Alt. 70-125 mm.: Lat. 25-44 mm.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata fossili (alquanto frequente).

OSSERVAZIONI. — L'esemplare molto guasto su cui il Borson fondò il suo *C. elongatus* ricorda alquanto questa varietà. Ad essa sono in gran parte riferibili le forme figurate nella Tav. VIII dal Da Costa come *Conus Puschi.*

L. ELATUS var. FUSULOPARVA SACC.

(Tav. IV, fig. 23).

Testa minor, gracilis, fusiformis. Spira valde elongatior, fusulata. Anfractus rotundatiores.

Alt. 50 mm.: Lat. 15 mm.

Tortoniano: S. Agata fossili (rara).

OSSERVAZIONI. — Probabilmente è forma non ancora completamente sviluppata.

L. ELATUS var. PERCONICOSPIRATA SACC.

(Tav. IV, fig. 24).

Testa aliquantulum elongatior. Spira regulariter conica; anfractus rotundatiores.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata (non rara).

OSSERVAZIONI. — È interessante osservare come la tipica spira pupoide allungata, direi, si trasformi gradualmente in spira conica. Le è alquanto affine, ma più depressa, la var. *haueriana* SACC. (1851, *Conus Haueri* PARTSCH. — HOERNES, Foss. Moll. Tert. Beck. Wien. — Tav. IV, fig. 5 (non 4)).

L. ELATUS var. FUNIFORMISPIRATA SACC.

(Tav. IV, fig. 25).

Spira subregulariter conica; anfractus perrotundanti, funiformes, profundis suturis disjuncti.

Tortoniano: Stazzano (rara).

OSSERVAZIONI. — Collegasi specialmente colla var. *perconicospirata.*

L. ELATUS var. PERLONGESPIRATA SACC.

(Tav. IV, fig. 26).

Spira elongatior, in regione apicali constrictior, in regione basali valde dilatata. Anfractus ultimus subcanaliculatus.

Tortoniano: Stazzano (rara).

OSSERVAZIONI. — Passa gradualmente al tipo ed alla var. *fusulatimspirata.*

LEPTOCONUS TAUROELATUS SACC.

(Tav. IV, fig. 27).

Testa elongata, subgracilis, subclaviformis. Spira elato-pupoides, in parte superiore gracilis, subturrita, in regione externa rapide dilatata. Anfractus elongati, superne rotundati (exceptis primis subangulatis), suturis profundis disjuncti, caudam versus rapide imminuti. Apertura perlonga, perstricta.

Alt. 62 mm.: Lat. 22 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rara).

OSSERVAZIONI. — Sembra appartenere al gruppo del *L. elatus,* ricordandone specialmente la var. *perlongespirata;* ma nel complesso pare dover costituire specie a sè.

Sottogen. CONOSPIRUS DE GREGORIO, 1890.

Il De Gregorio nella sua " *Monogr. Faune eoc. Alabama* — pag. 21 „ istituisce questo nuovo sottogenere ponendovi a tipo il *C. antediluvianus* BRUG. Dobbiamo però subito notare come il De Gregorio riunisca in questo sottogenere forme assai distinte appartenenti a sottogeneri diversi e già prima distinti, così per es. il *C. stromboides* su cui nell'anno precedente (1889) il Cossmann aveva fondato il sottog. *Hemiconus.*

Inoltre, anche restringendo il sottog. *Conospirus* al gruppo del *C. antediluvianus* e forme affini, è certo che esso presenta graduali passaggi ai *Leptoconus,* per modo che tale distinzione mostrasi talora alquanto arbitraria. Contuttociò, pur riconoscendo la strettissima affinità dei *Conospirus* coi *Leptoconus,* tanto che probabilmente altri crederà opportuno tenerli riuniti, considerando però che le suddivisioni sottogeneriche presentano talora passaggi fra loro, accetto per ora tale distinzione, come quella che sembrami atta a meglio differenziare due gruppi di forme, bensì strettamente collegate, ma complessivamente distinte.

CONOSPIRUS ANTEDILUVIANUS (BRUG.).

1786.	*Volutilites*	WALCH u. KNORR, *Naturg. Verstein.*, II, pag. 160, Tav. CII, fig. 6.
1792.	*Conus antidiluvianus Brug.*	BRUGUIERE, *Encicl. meth. Vers*, I, pag. 637, Tav. 347, fig. 6.
1798.	*Volutilites n. 4*	BORSON, *Ad Oryct. pedem. auct.*, pag. 176.
1810.	*Conus antidiluvianus Brug.*	LAMARCK, *Ann. Mus. Hist. nat.*, tome XV, pag. 442.
1814.	„ „ „	BROCCHI, *Conch. foss. subapp.*, II, pag. 291, Tav. II, fig. 11.
1818.	„ „ „	DEFRANCE, *Dict. Sc. Nat.*, X, pag. 263.
1820.	„ „ „	BORSON, *Oritt. piemont.*, pag. 14 (193).
1824.	„ *antediluvianus* „	DESHAYES, *Descr. Coqu. foss. Paris*, II, pag. 749, 750 (pars).
1826.	„ *antidiluvianus* „	RISSO, *Hist. Nat. Europe mérid.*, IV, pag. 230.
1826.	„ „ „	BONELLI, *Cat. m. s. Museo Zool. Torino*, n. 296.
1827.	„ *antediluvianus* „	SASSO, *Sagg. geol. Bac. terz. Albenga*, pag. 482.
1830.	„ *antidiluvianus* „	BORSON, *Cat. Mus. min. Turin*, pag. 606.
1831.	„ *antediluvianus* „	BRONN, *Ital. tert. Gebild.*, pag. 12.
1831.	„ *antidiluvianus* „	DUBOIS DE MONTPÉREUX, *Conch. foss. Wolh.*, pag. 23 (pars).

1837. *Conus angutanculus Desh.* PUSCH, *Polens Paläontologie*, pag. 115 (pars).
1838. „ *appenninicus Bronn.* BRONN, *Lethaea geogn.*, II, pag. 1118, Tav. XLII, fig. 15.
1838. „ *antediluvianus* „ MICHELOTTI, *Geogn. zool. Ansicht tert. Bild. Piemonts*, pag. 397.
1842. „ *antidiluvianus Brug.* SISMONDA, *Syn. meth.*, 1ª ed., pag. 44.
1843. „ *Bruguierii Nyst.* NYST, *Coqu. et Polip. foss. Belgique*, pag. 585.
1845. „ *antediluvianus* „ DESHAYES in LAMARCK, *Hist. Nat. An.*, *s. vert.*, XI, pag. 155.
1847. „ *antidiluvianus* „ MICHELOTTI, *Descript. foss. mioc.*, pag. 336.
1847. „ „ „ SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 43.
1848. „ *antediluvianus* „ BRONN, *Index paleont.*, pag. 328.
1851. „ „ „ HOERNES, *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, pag. 38.
1852. „ *apenninensis Bronn.* D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 56.
1853. „ *antediluvianus Brug.* BRONN, *Lethaea Geogn.*, III, pag. 584, Tav. XLII, fig. 15.
1853. „ „ „ BEYRICH, *Conch. Nord-Deutsch. tert. Geb.*, pag. 19.
1857. „ „ „ NEUGEBOREN, *Tert. Moll. Ober-Lapugy*, pag. 228.
1859. „ „ „ CHENU, *Manuel de Conchiol.*, pag. 241, fig. 1432.
1862. „ „ „ DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. It. centr.*, pag. 25 (107).
1866. „ „ „ DESHAYES, *Descript. An. s. vert. Bassin Paris*, III, pag. 418.
1872. „ „ „ KOENEN, *Mioc. Nord-Deutschl. u. seine Moll. Fauna*, pag. 213.
1873. „ *antidiluvianus* „ COCCONI, *En. Moll. mioc. plioc. Parma e Piacenza*, pag. 154.
1877. „ „ „ LOCARD, *Descript. Faune tert. corse*, pag. 71.
1877. „ *antediluvianus* „ ISSEL, *Fossili marne Genova*, pag. 23.
1878. „ „ „ PARONA, *Plioc. oltrepó pavese*, pag. 66.
1884. „ „ „ DE GREGORIO, *Studi Conch. medit.*, pag. 360.
1885. „ „ „ SACCO, *Mass. elev. Plioc. mar. al piede delle Alpi*, pag. 7.
1885. „ „ „ „ *Studi geo-pal. territorio Bene Vagienna*, pag. 10.
1886. „ „ „ „ *Valle Stura di Cuneo*, pag. 66.
1890. „ *apenninensis Bronn.* „ *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4372.
1890. „ *antediluvianus Brug.* „ *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte*, n. 4370.
1890. „ „ „ DELLA CAMPANA, *Pliocene di Borzoli*, pag. 27.

Alt. 10-45-90 mm.: Lat. 4-17-30 mm.

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (rara).

Piacenziano: Astigiana, Chieri, Castelnuovo d'Asti, Bene Vagienna, Mondovì, Carrù, Pianfei, Cervere, Cherasco; Volpedo; Piacentino; Genova, Borzoli, Zinola, Albenga, R. Torsero, Bordighera, Bussana (abbondantissima).

Astiano: Astigiana, Piacentino (alquanto rara).

Osservazioni. — Questa bella specie è quasi caratteristica (colla sua grande abbondanza) del *Piacenziano*, per essere forma essenzialmente di mare alquanto profondo e tranquillo e dei fondi fangosi.

Originariamente si credette che questa specie appartenesse all'eocene del bacino parigino, mentre invece è quasi caratteristica del pliocene, dal che nacquero molti errori e non poche confusioni, sia colle forme consimili veramente eoceniche, sia col *C. Dujardini* e col *C. acutangulus,* donde la proposizione di nuovi nomi, come *appenninicus* e *Brughieri,* per la forma pliocenica in esame.

Il Brocchi ne diede tre figure le quali corrispondono giustamente ai 3 stadî principali di sviluppo di questa specie; è però notevole come nella regione della spira degli esemplari figurati dal Brocchi, gli anfratti siano più depressi e quindi la spira si presenti meno fusulata, più scalariforme, di quanto si verifichi in generale negli esemplari (circa mille) da me esaminati; quindi sugli esemplari che presentano più accentuati tali caratteri differenziali credetti opportuno fondare una varietà, la quale, in Piemonte ed in Liguria almeno, è assai più abbondante del tipo. Nella collezione

Brocchi esistono 10 esemplari di cui però la maggior parte giovani e parecchi appartenenti all'anom. *pseudogibbosa*.

Il Coppi (Paleont. mod., pag. 51) indica una var. *major* colle dimensioni di mm. 100 × 35.

Anom. *pseudogibbosa* Sacc. (Tav. IV, Fig. 28).

Anfractus ultimus, in regione medio-supera irregulariter ventricoso-inflata, gibbosa.

Tortoniano: S. Maria di Stazzano (rara).

Piacenziano: Piacentino, Bordighera (frequente).

C. ANTEDILUVIANUS var. DERTONENSIS Sacc.

(Tav. IV, fig. 29).

Testa plerumque minor. Anfractus in regione spirae aliquantulo depressiores, subcanaliculati. Granulationes perspicuiores; striolae transversae interdum etiam in regione ventrali anfractuum visibiles.

Alt. 15-30-75 mm.: Lat. 7-12-23 mm.

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (abbondantissima).

Piacenziano: Castelnuovo, Liguria (rara).

Osservazioni. — Per quanto questa forma passi gradualmente al tipo, specialmente agli individui giovani di esso, tuttavia sembrami che essa presenti nel complesso una *facies* propria tale da potersene costituire una varietà che è essenzialmente cararatteristica del *Tortoniano*. A questa forma avvicinasi alquanto il *C. Berwerthi* H. A., che però forse rappresenta solo individui giovani.

C. ANTEDILUVIANUS var. COMPRESSOSPIRA Sacc.

(Tav. IV, fig. 30).

Spira depressior; granulationes interdum parvuliores.

Alt. 15-32 mm.: Lat. 8-12 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rarissima).

Tortoniano: Montegibbio (rara).

Piacenziano: Castelnuovo d'Asti, Bussana (alquanto rara).

Osservazioni. — Alcuni esemplari a granulazioni poco visibili si avvicinano a certe forme di *Leptoconus* leggermente granulate.

C. ANTEDILUVIANUS var. DERTOGRANOSA Sacc.

(Tav. IV, fig. 31).

Testa plerumque minor; spira elatior, turritior. Granulationes perspicuiores, striolae transversae interdum etiam in regione ventrali anfractuum subvisibiles.

Alt. 14-45 mm.: Lat. 6-13 mm.

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (frequente).

Osservazioni. — Passa gradualmente alla var. *dertonensis*.

C. ANTEDILUVIANUS var. TURRITOSPIRA SACC.

(Tav. IV, fig. 32).

Testa elongatior; spira elatior, turritior. Anfractus, ultimi praecipue, in regione spirae aliquanto minus depressi.

Alt. 13-45-90 mm.: Lat. 4-14-27 mm.

Tortoniano: Stazzano (alquanto rara).

Piacenziano: Astigiana, Castelnuovo, Chieri, Vezza, Cherasco, Bene-Vagienna, Carrù, Masserano; Piacentino; Borzoli, Savona-Fornaci, Zinola, Albenga, R. Torsero, Bordighera, Bussana (abbondantissima).

OSSERVAZIONI. — Passa insensibilmente sia al tipo (di cui è quasi più comune), sia alla var. *turripina.*

C. ANTEDILUVIANUS var. TURRIPINA DE GREG.

(Tav. IV, fig. 33).

Testa elongatior, fusuloidea; spira elatior, minus scalarata. Anfractus, ultimi praecipue, in regione spirae valde minus depressi, valde obtusius angulati.

Alt. 22-50-80 mm.: Lat. 7-16-25 mm.

1884. *Conus antedil. Brug. var. turripinus De Greg.* — DE GREGORIO, *Studi Conch. medit.*, pag. 361.

Tortoniano: Montegibbio, Stazzano (alquanto rara).

Piacenziano: Astigiana, Castelnuovo, Chieri, Cherasco, Masserano; Piacentino; Borzoli, Savona, Zinola, Albenga, R. Torsero, Bordighera, Bussana.

Astiano: Astigiana (rara).

OSSERVAZIONI. — Collegasi gradualissimamente colla forma tipica e colla var. *turritospira.*

Anom. FUSULATISSIMA SACC. (Tav. IV, fig. 34). — *Testa fusulatior. Anfractus rotundatiores.*

Piacenziano: Castelnuovo d'Asti (rara).

OSSERVAZIONE. — Rappresenta solo un'esagerazione, direi, della var. *turripina.*

C. ANTEDILUVIANUS var. FASCIORNATA SACC.

(Tav. IV, fig. 35).

Anfractus ultimus tribus fasciis brunneo-ochraceis (media et infera sat regularibus, supera subbifida et interrupta) munitus.

Piacenziano: Zinola (rara).

OSSERVAZIONI. — Siccome generalmente il *C. antediluvianus* si presenta con tinta uniforme, così credetti opportuno segnalare questa forma, la quale potrebbe rappresentare o semplicemente un'anomalia, oppure un residuo della vera colorazione del *C. antediluvianus*, ciò che ne accrescerebbe l'importanza pur facendola discendere dal grado di varietà distinta.

C. ANTEDILUVIANUS var. DERTOBLITA SACC.

(Tav. IV, fig. 36).

Testa crassa, fusulatior. Spira conica, saepe subinflatula, valde minus scalarata. Anfractus ultimi in regione spirae declives, valde minus planato-depressi.

Alt. 30-66 mm.: Lat. 13-27 mm.

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (non rara).

Piacenziano: R. Torsero (rarissima).

OSSERVAZIONI. — A primo tratto parrebbe una specie a parte che ricorda alquanto il *C. oblitus* MICHT. per gli esemplari a spira più inflata, ma per graduali passaggi collegasi strettamente col solito tipo del *C. antediluvianus.* Questa forma deriva probabilissimamente dalla var. *tauroblitoides,* a cui è affinissima. Nel bacino viennese trovasi una forma simile come risulta dalla Fig. 2, di Tav. V, dell'opera di M. Hoernes: " Foss. Moll. tert. Beck. Wien. ".

C. ANTEDILUVIANUS var. CRASSOGRANOSA SACC.

(Tav. IV, fig. 37).

Testa crassa. Spira conica. Granulationes valde crassiores, subrotundatae.

Tortoniano: Stazzano (rara).

C. ANTEDILUVIANUS var. MIOBLITA SACC.

(Tav. IV, fig. 38).

Testa elongatior, fusulatior. Spira subscalarata, plus minusve conica. Anfractus in regione spirae declives, non scalarati, non, vel parum, depresso-canaliculati. Granulationes numero minores, depressae, plus minusve suboblitae.

Alt. 40-65 mm.: Lat. 11-25 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

OSSERVAZIONI. — Questa varietà sembrerebbe quasi formare passaggio al *C. oblitus* MICHT., tanto più che il *C. oblitus* si presenta talora leggermente subgranulato nei primi anfratti; ma d'altra parte sonvi variazioni simili in forme plioceniche di *C. antediluvianus,* come nella var. *subagranulata,* che è affinissima alla presente.

C. ANTEDILUVIANUS var. TAUROBLITOIDES SACC.

(Tav. IV, fig. 39).

Testa affinis var. dertoblita, *sed: minor; granulationes parvuliores, propinquiores, rotundatiores, in anfractibus ultimis interdum suboblitae vel oblitae.*

Alt. 15-40 mm.: Lat. 6 $^1/_2$-17 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

OSSERVAZIONI. — Passa assai gradualmente alla var. *dertoblita;* per alcuni caratteri ricorda il *C. oblitus* MICHT.

C. ANTEDILUVIANUS var. TAUROASCALARATA SACC.

(Tav. IV, fig. 40).

Testa affinis var. dertoblita, *sed: spira regulariter conica, ascalarata; granulationes parvuliores, depressiores, passim suboblitae.*

Alt. 40 mm.: Lat. 11 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rarissima).

Osservazioni. — È solo una modificazione della var. *tauroblitoides.*

C. antediluvianus var. miosubagranosa Sacc.

(Tav. IV, fig. 41).

Testa affinis var. dertoblita, *sed: minor; spira plerumque minus inflata, mucronata; granulationes parvuliores, depressiores, plus minusve suboblitae.*

Alt. 15-30 mm.: Lat. 6-11 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Collegasi assai bene colla var. *tauroblitoides,* e per la graduale scomparsa delle granulazioni sembra passare ad alcune forme del *L. Allionii* e del *C. Dujardini* (var. *pseudoantediluviana*). Le forme a spira turrita paiono mancare nell'*Elveziano* piemontese, ma esistettero altrove durante tutta l'epoca miocenica, come ce lo indicano la var. *junior* Grat. (= var. *scalata* Grat. a pie' della Tav. 45), la var. *princeps* Sacc. (1853 — *Conus antediluvianus* Brug — Beyrick — Conch. Norddeutsch. tert. Geb. Tav. I, Fig. 1), ecc.

C. antediluvianus var. taurocatenatoides Sacc.

(Tav. IV, fig. 42).

Testa minor; spira turritior. Anfractus in regione spirae minus depressi, decliviores. Anfractus ultimus transverse, irregulariter, seriatim granulosus.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Credo trattisi essenzialmente di forme giovanili, giacchè le suddette granulazioni osservansi specialmente negli esemplari giovani di *Conus* appartenenti a diversi sottogeneri, particolarmente ai *Conospirus;* è probabilmente in modo simile che credo debbasi interpretare la forma *excatenata* Sacc. (1851 — *Conus catenatus* Sow. — Hoernes — Foss. Moll. tert. Beck Wien, pag. 42, Tav. V, fig. 4) che sembrami assai diverso dal vero *C. catenatus,* il *Leptoconus Berwerthi* H. A. (probabilmente varietà del *C. antediluvianus*), il *Conus Jungi* Boett, il *C. clanculus* May., ecc.

Quindi io credo che tale carattere delle granulazioni, sul quale vennero fondate diverse specie, non sia un carattere essenziale, ma sovente solo di età od individuale, e quindi per lo più appena segnalabile a titolo di varietà, apparendo d'altronde qua e là in diverse forme, così nel *C. antediluvianus,* nel *C. Dujardini,* nel *C. Bronni,* nel *Leptoconus Allionii,* ecc., ecc.

C. antediluvianus var. empena De Greg.

(Tav. IV, fig. 43).

Spira brevior; in ultimis anfractibus granulationes oblitae.

1823. *Conus antidiluvianus* — BORSON, *Oritt. Piemont.*, pag. 172 (304).
1830. " " — " *Cat. Coll. Min. Turin,* pag. 607.
1884. " *antediluvianus var. empenus De Greg.* — DE GREGORIO, *Studi Conch. Medit.*, pag. 361.
1890. " " " " — SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte,* n. 4371, 5430.

Piacenziano: Astigiana, Masserano; Bordighera; Castellarquato (rara).

Osservazioni. — Il carattere di questa varietà è comunissimo negli esemplari adulti di *C. antediluvianus;* alcuni individui sembrano quasi far passaggio al *L. Brocchii var. antediluvianoides.*

Conospirus antediluvianus var. transiens Sacc.

(Tav. IV, fig. 44).

Testa fusulatior; angulus anfractuum crassus, subrotundus, granulationibus omnino destitutus.

Alt. 47 mm.: Lat. 20 mm.

Astiano: Astigiana (rarissima).

Osservazioni. — Questa forma per diversi caratteri avvicinasi moltissimo al *L. Brocchii,* tanto che altri potrebbe forse riferirlo a detta specie; però nell'assieme essa sembra piuttosto appartenere al gruppo del *C. antediluvianus.* Del resto credo trattisi di una forma anomala di non grande importanza.

C. antediluvianus var. subagranulata Sacc.

(Tav. IV, fig. 45).

Testa fusulatior. Spira plus minusve elatior, minus scalarata. Anfractus in regione spirae decliviores, minus depressi; granulationes in anfractibus primis depressiores, suboblitae, in anfractibus ultimis oblitae.

Alt. 26-73 mm.: Lat. 11-25 mm.

Piacenziano: Astigiana, Castelnuovo; Piacentino; Zinola, Rio Torsero, Bordighera (non rara).

Osservazioni. — I caratteri di questa varietà si riscontrano generalmente negli ultimi anfratti di tutti gli individui adulti; è la loro generalità in tutti gli anfratti ed anche nelle forme giovani, che, assieme agli altri caratteri sovraccennati, mi indusse ad elevare questa forma a varietà distinta; essa ricorda a primo tratto il *C. Dujardini,* ma anche il solo carattere del canaletto che osservasi sopra l'angolo degli anfratti, basta per distinguere nettamente le due forme; d'altra parte questa varietà si avvicina pure alquanto al *L. Brocchii.*

Conospirus Dujardini (Desh.).

(1831. DESHAYES (*C. acutangulus* Desh., non *C. acutangulus* Chemn. 1772) in *Appendix to Lyell's Principles of Geology,* pag. 40).
(1831. DU BOIS DE MONTPÉREUX (*C. antidiluvianus*), *Conch. foss. Volhyn.-Podol.,* Tav. I, fig. 1).
(1845. DESHAYES in LAMARCK (*C. Dujardini*), *Hist. Nat. An. s. vert.,* XI, pag. 158).

Osservazioni. — Questa forma credo sia molto importante costituendo quasi una specie-gruppo, specialmente caratteristica del Miocene, ed attorno alla quale raggruppansi molte e svariate forme. Sgraziatamente essa portò per lungo tempo un nome che cadeva in sinonimia, ed inoltre il suo autore ne diede per tipo una figura presentata dal Dubois come *C. antidiluvianus.* Ne seguì una notevole confusione che dura

tuttora, tant'è che a questa specie si attribuirono specie diverse e, viceversa, di molte sue semplici varietà si crearono nuove specie. Inoltre è a notarsi come la figura del Dubois, che dobbiamo prendere come tipo del *L. Dujardini*, come ha proposto l'autore di questa specie, non rappresenti una delle forme più comuni di questo gruppo; ad ogni modo il nome *subacutangulus* dato a questa forma nel 1852 dal D'Orbigny cade assolutamente in sinonimia di *C. Dujardini* (1845).

Nel *Tortoniano* di Stazzano osservai un esemplare che si avvicina molto al tipo, ma che per essere incompleto non è determinabile con certezza.

C. Dujardini var. taurostriolata Sacc.

(Tav. V, fig. 1).

Testa plerumque aliquantulo minor. Spira paullulo acutior, magis pagodaeformis. Anfractus acute angulati, sub angulo circumspirali striolati, plerumque bistriolati.

Alt. 5-28 mm.: Lat. 1 $^{1}/_{2}$-11 mm.

Elveziano: Colli torinesi (frequente); Sciolze (rara).

Osservazioni. — Questa forma (come in generale i *Conospirus*) sembra avere abitato specialmente i fondi melmosi, giacchè mentre essa fu sinora sconosciuta ai paleontologi piemontesi [il cui materiale di studio proviene specialmente dai depositi sabbiosi (*molasse*)], recentemente invece un raccoglitore dilettante il sig. Forma, me ne portò una gran quantità proveniente da uno speciale strato marnoso che trovasi al Monte dei Cappuccini.

La caratteristica presenza delle indicate striole (oltre alla forma generale ed alle granulazioni dei primi anfratti) costituisce un nuovo punto di ravvicinamento del *C. Dujardini* al *C. antediluvianus,* quantunque sovente queste striole non compaiano, come, per esempio, nell'esemplare tipico figurato dal Dubois.

C. Dujardini var. pseudoantediluviana Sacc.

(Tav. V, fig. 2).

Testa affinis var. taurostriolata, *sed: depressae granulationes etiam in ultimis anfractibus plus minusve visibiles.*

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Osservazioni. — Parrebbe quasi costituire un passaggio al *C. antediluvianus.*

C. Dujardini var. pseudocatenata Sacc.

(Tav. V, fig. 3).

Testa affinis var. pseudoantediluviana, *sed: spira minus scalarata; anfractus transversim seriis granularibus ornati.*

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Osservazioni. — Forma che da un lato indica sempre maggiormente il nesso esistente fra il *C. Dujardini* ed il *C. antediluvianus* e dall'altro fa sempre più riconoscere come il carattere delle granulosità sia spesso solo un carattere accidentale, come già si disse parlando dell'affine *C. antediluvianus* var. *taurocatenatoides.*

C. Dujardini var. depressulina Sacc.

(Tav. V, fig. 4).

Testa affinis var. taurostriolata, *sed spira depressior.*

Alt. 20 mm.: Lat. 9 mm.

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Osservazioni. — Collegasi insensibilmente colla var. *taurostriolata.*

C. Dujardini var. tauromior Sacc.

(Tav. V, fig. 5).

Testa minor, fusulatior. Anfractus in regione spirae plerumque decliviores; aliquantulo minus acute angulati.

Alt. 13-23 mm.: Lat. 5-10 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Le striole accennate nelle altre varietà dell'*Elveziano* torinese quasi sempre mancano in questa forma, che sembra avvicinarsi ad alcune varietà di *C. Bronni.*

C. Dujardini var. brevicaudata Sacc.

(Tav. V, fig. 6).

Testa magis fusiformis. Spira elongatior. Cauda brevior. Sub angulo anfractuum 2 striolae transversae conspiciuntur.

Alt. 26 mm.: Lat. 12 mm.

Elveziano: Bersano S. Pietro (rara).

C. Dujardini var. astensis Sacc.

(Tav. V, fig. 7).

Testa aliquantulum latior. Spira magis conica. Granulationes suboblitae. Sub angulo anfractuum 1 vel 2 striolae parvillimae perspiciuntur.

Alt. 50 mm.: Lat. 16 mm.

Astiano: Astigiana (rarissima).

Osservazioni. — È notevole il grande prolungarsi di questa specie nel tempo, quantunque a dire il vero le forme *tortoniane* e plioceniche attribuite al *C. Dujardini,* come anche questa, tendano più o meno nettamente verso il gruppo del *C. Bronni,* tanto che talora lasciano dubbi sulla loro precisa collocazione subgenerica. A questa categoria appartengono per esempio in parte le forme figurate (Tav. V, fig. 3) dall'Hoernes (*Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*) come *C. Dujardini* e che il De Gregorio (1884, *Studii Conch. Medit.*) appellò *asdensis,* mentre il *C. Brezinae* H. A. tende già più fortemente verso il *C. Bronni.* Qualche cosa di simile deve ripetersi pel *C. Dujardini* var. *funiculellata* Sacc. (1869, *Conus Dujardini* var.-Manzoni, *Fauna mar. due lembi mioc. Alta Italia,* pag. 482, tav. I, fig. 2).

In conclusione possiamo dire: 1° che il tipico *C. Dujardini* è specialmente caratteristico dell'*Elveziano,* mentre il tipico *C. Bronni,* di cui però esistono numerose varietà nell'*Elveziano,* diventa particolarmente caratteristico del *Tortoniano;* 2° che queste due specie presentano diverse forme di collegamento, le quali ne indicano gli stretti rapporti, quantunque in complesso sembri più logico tener specificamente distinte dette due forme.

CONOSPIRUS BRONNI (MICHT.).

(Tav. V, fig. 8).

Testa turbinato-elongata, turrita; spira dimidiam testacei partem efformante, scalariformi, exerta, acuta; anfractibus subcarinatis, infra carinam sulco praeditis; suturis distinctis (Michelotti).

1847. *Conus Bronnii Micht.* MICHELOTTI, *Descript. Foss. mioc.*, pag. 339, Tav. XIV, fig. 3.
1847. „ *oblitus Micht. var.* SISMONDA, *Syn. meth.*, 2ª ed., pag. 44.
1852. „ „ „ „ D'ORBIGNY, *Prodr. Pal. strat.*, III, pag. 57.
1890. „ *Bronnii Micht.* SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte,* n. 4381.

Tortoniano: Stazzano, S. Agata, Montegibbio (non rara).

OSSERVAZIONI. — Questa forma, che pur sembra collegarsi col *C. Dujardini,* pare se ne debba in complesso tener specificamente distinta; tale distinzione è certamente nettissima se si comparano le forme tipiche di ciascuna specie, ma va gradatamente diminuendo se si osservano le forme intermedie, specialmente quelle *elveziane.* Notisi inoltre come l'esemplare tipico, che rifiguro, rappresenti in verità una forma un po' aberrante a spira molto svolta.

Le figure date dall'Hoernes e specialmente dal Da Costa provano come nei terreni miocenici del Portogallo e di Vienna esistano numerose forme appartenenti a questo gruppo, le quali però finora vennero generalmente attribuite al *C. Dujardini,* al cui gruppo certamente si collegano. Negli esemplari meglio conservati si osserva sovente che i primi anfratti sono leggermente subgranulosi, carattere che collega sempre più il *C. Bronni* al *C. Dujardini.*

C. BRONNII var. STAZZANENSIS SACC.

(Tav. V, fig. 9).

Testa aliquantulum latior, minus elongato-fusulata. Spira minus elongata, magis conica.

Alt. 15-36 mm.: Lat. 7-14 mm.

1847. *Conus acutangulus Desh.* MICHELOTTI, *Descript. Foss. mioc.*, pag. 337.
1851. „ *Dujardini Desh.* HOERNES, *Foss. Moll. tert. Beck. Wien.*, pag. 40, 41.
1852. „ „ „ BRONN, *Lethaea geogn.*, III, pag. 584.
1862. „ „ „ DODERLEIN, *Giac. terr. mioc. It. centr.*, pag. 107 (25).
1866. „ „ „ DA COSTA, *Gast. terc. Portugal*, pag. 27.
1877. „ „ „ LOCARD, *Descript. Faune tert. Corse*, pag. 72.
1890. „ „ „ *var.* SACCO, *Cat. pal. Bac. terz. Piemonte,* n. 5455.

? *Elveziano:* Colli torinesi (rara).

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (frequentissima).

Piacenziano: Castelnuovo d'Asti (rarissima).

Osservazioni. — Questa forma dovrebbe considerarsi come il vero tipo del gruppo del *C. Bronnii,* se il Michelotti non avesse figurato per tipo di questa specie un esemplare alquanto aberrante. Le indicazioni indicate in sinonimia si riferiscono tutte alle forme *tortoniane* del *C. Bronnii* e non già al vero *C. Dujardini* che rimase finora sconosciuto nei depositi *elveziani* piemontesi. L'unico esemplare pliocenico che posseggo tende alquanto verso la var. *subascalarata.*

C. Bronnii var. evolutospira Sacc.

(Tav. V, fig. 10).

Testa fusoidea. Spira perelata, rapide evoluta. Anfractus ultimi interdum minus angulosi; striolae transversae sub angulo anfractuum suboblitae.

Alt. 17-30 mm.: Lat. 7-12 mm.

Elveziano: Colli torinesi, Albugnano (non rara).

Osservazione. — Si potrebbe considerare come la forma corrispondente, nel-l'*Elveziano,* alla forma tipica del *Tortoniano.*

C. Bronnii var. crassocolligens Sacc.

(Tav. V, fig. 11).

Testa crassior, latior, valde minus fusulata. Spira regularius conica.

Alt. 25-32 mm.: Lat. 11-13 mm.

Tortoniano: S. Agata, Stazzano, Montegibbio (non rara).

Osservazioni. — Paragonata col tipo del *C. Bronnii* ne parrebbe specificamente diversa, presentando invece maggior somiglianza col *C. Dujardini;* però credo debba piuttosto collegarsi colla prima specie.

C. Bronnii var. depressoastensis Sacc.

(Tav. V, fig. 12).

Testa latior, valde minus fusulata. Spira depressior, subconica, scalarata; striolae sub angulo anfractuum oblitae vel suboblitae.

Alt. 23 mm.: Lat. 11 mm.

Astiano: Astigiana (rarissima).

Osservazioni. — Nel complesso si avvicina alquanto alla var. *crassocolligens,* ma tende pure molto verso il *C. Dujardini.*

C. Bronnii var. subbiconica Sacc.

(Tav. V, fig. 13).

Testa affinis var. subascalarata, *sed anfractus minus elongati, magis angulati, ratione habita latiores, striolis sub angulo interdum muniti.*

Alt. 20-28 mm.: Lat. 10-12 mm.

Tortoniano: Stazzano (non rara).

Piacenziano: Astigiana (rara).

Osservazione. — Parrebbe quasi una esagerazione, direi, della var. *subascalarata.*

C. Bronnii var. obtusangulata Sacc.

(Tav. V, fig. 14).

Testa minus longo-fusulata. Spira minus rapide evoluta. Anfractus obtuse angulati, interdum fere subrotundati. Striolae sub angulo anfractuum plerumque suboblitae.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Tortoniano: Stazzano (non rara).

Osservazioni. — Le è forse affine il *C. strombellus* Grat. var. *minor* Grat.

C. Bronnii ? var. rotundulata Sacc.

(Tav. V, fig. 15).

Testa minus longo-fusulata. Spira minus elongata. Anfractus non angulati sed subrotundati, saepe transversim striolati, primi plus minusve subgranulosi. Striolae sub angulo anfractuum interdum suboblitae.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Per alcuni caratteri si avvicina alla var. *obtusangulata* ed alla var. *taurotransiens,* ma per altri ricorda assai alcuni esemplari giovani di *C. Puschi,* donde l'incertezza della sua determinazione; ciò tanto più che la forma in esame è assai variabile per lunghezza di spira, rotondità di anfratti, maggior o minor intensità ed estensione delle granulosità, ecc. Forse questa forma è alquanto affine al *C. laevis* (Grat.) o *C. praelongus* (Grat.) indicata dal D'Orbigny come *C. subalsiosus.*

C. Bronnii ? var. rotundospiratissima Sacc.

Tav. V, fig. 15 *bis.*

Testa affinis var. rotundulata, *sed magis fusiformis, spira valde elongatior.*

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

C. Bronnii ? var. exfusus Sacc.

(Tav. V, fig. 16).

Testa fusiformis, spirae exertae, anfractubus striatis, granulis marginalibus asperis, majori transversim subgranulato striato, basi acuta (Borson).

1823. *Conus fusus Bors.* BORSON, *Oritt. piemont.*, pag. 173 (305), fig. 22.
1831. „ *fuscus Bors.* „ *Cat. Coll. min. Turin,* pag. 607.
1848. „ *fusus* „ BRONN, *Index paleont.*, pag. 330.

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

Osservazioni. — Il nome del Borson non può mantenersi già esistendo un *Conus fusus* di Gmelin. La forma in esame è un po' variabile, poichè alcuni esemplari per il loro assieme si scostano alquanto dal tipo del Borson e si avvicinano, per la forma, alla var. *taurotransiens,* per modo che sembrano collegarsi a simili forme granulose osservate nel gruppo del *C. antediluvianus* e del *C. Dujardini.*

C. Bronnii? var. rotundulogranosa Sacc.

(Tav. V, fig. 17).

Testa affinis var. rotundulata Sacc., *sed: anfractus seriis granularibus in regione ventrali et infera ornati.*

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

Osservazioni. — Passa gradualissimamente alla var. *exfusus,* talora anzi ne rappresenta solo una differenza di età, poichè i primi anfratti sono sovente angolosi e gli ultimi subrotondati. D'altra parte essa non è altro che la var. *rotundulata* ornata di cingolelli granulari, ciò che sempre più dimostra il collegamento di queste varie forme e l'accidentalità delle granulazioni.

C. Bronnii? var. taurotransiens Sacc.

(Tav. V, fig. 18).

Testa minus longo-fusulata. Spira minus elongata. Anfractus minus ventrosi; primi interdum perdepresse subgranulosi. Striolae sub angulo anfractuum plerumque oblitae vel suboblitae.

Alt. 20-30 mm.: Lat. 7 $^1/_2$-11 $^1/_2$ mm.

Elveziano: Colli torinesi, Baldissero, Bersano, Albugnano (frequente).

Osservazioni. — Questa forma alquanto variabile sembra talora far passaggio al *C. Dujardini* (specialmente alla sua var. *taurominor*); alcuni esemplari a spira più largamente conica paiono passare al *C. Brezinae* H. A. che credo debba considerarsi piuttosto come una varietà che non come una specie a sè; collegasi d'altronde per diversi caratteri colla var. *subascalarata.*

C. Bronnii? var. subascalarata Sacc. (an species distinguenda).

(Tav. V, fig. 19).

Testa minus longo-fusulata. Spira regulariter conica, ascalarata vel subascalarata Anfractus minus ventrosi. Striolae sub angulo anfractuum oblitae vel suboblitae. Anfractus interdum transversim lineati.

Alt. 16-30-40 mm.: Lat. 7-12-14 mm.

Elveziano: Colli torinesi, Baldissero (straordinariamente comune).

Tortoniano: Stazzano (rara).

Osservazioni. — Parrebbe quasi una specie a sè, ma collegasi con altre varietà del *C. Bronnii.* Gli esemplari *elveziani* generalmente hanno gli anfratti più rettilinei, un po' meno ventrosi nella parte media e la spira più nettamente conica che non gli esemplari *tortoniani,* per modo che ne potrebbero forse distinguere specificamente. Se si volesse portare la forma in esame al grado di specie, la var. *tauroafusula* ne costituirebbe una buona varietà.

C. Bronnii? var. fusoliva Sacc.

(Tav. V, fig. 20).

Testa affinis var. subascalarata *sed fusulatior, olivaeformis; anfractuum angulus superus subobtusus vel subrotundatus.*

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).
Tortoniano: Stazzano (rara).

C. Bronnii ? var. tauroafusula Sacc.

(Tav. V, fig. 21).

Testa affinis var. subascalarata, *sed: saepe major et crassior; latior, minus fusoides; spira brevior, latius conica.*

Alt. 15-37 mm.: Lat. 7-16 mm.

Elveziano: Colli torinesi (frequente).

Osservazioni. — Questa forma collegasi colla var. *subascalarata* sempre più allontanandosi dal tipico *C. Bronni,* per modo che parrebbe quasi logico di staccarnela specificamente, tanto più che mancano le caratteristiche striole che nel *C. Bronni* stanno sotto all'angolo degli anfratti. Nel complesso essa ricorda alquanto alcune forme del gruppo del *C. striatulus* e del *C. pelagicus.*

Conospirus ? oblongoturbinatus (Grat.).

(1840. GRATELOUP (*Conus antediluvianus* var. *oblongoturbinata*), *Conch. Bassin Adour,* Pl. 44, fig. 2).

È questa forma una specie assai spiccata, finora poco conosciuta, forse anche perchè la sua conchiglia è così gracile, almeno negli esemplari del Piemonte, che facilmente si rompe. Seguendo il mio solito metodo ho conservato a questa forma l'antico nome datole dal Grateloup, quantunque egli l'indicasse come varietà di una specie ben diversa, mentre invece il D'Orbigny pensò di imporle un nuovo nome, *aquensis;* sembrami assolutamente logico conservare i nomi primitivi, anche se dapprima furono considerati come nomi di varietà, almeno quando le denominazioni si prestano, poichè in caso diverso si cade in una grande confusione che può trarre a pericolose conseguenze, potendo anche influire sulla debole natura umana riguardo al modo di considerare le specie e le varietà. La specie in esame sembra riferibile ai *Conospirus* quantunque per diversi caratteri ricordi pure i *Leptoconus,* sempre più dimostrandoci l'incertezza di tale distinzione sottogenerica.

La forma tipica manca in Piemonte ed è quindi desiderabile che di essa venga presentata una diagnosi che manca tuttora. Pel confronto mi riferisco quindi solo alla figura tipica data dal Grateloup.

C. oblongoturbinatus var. propegallica Sacc.

(Tav. V, fig. 22).

Testa minor, gracilior, minus inflata. Spira elongatior, fusulatior.

Alt. 40-58 mm.: Lat. 16-20 mm.

Elveziano: Colli torinesi (alquanto rara).

Osservazione. — È la forma piemontese che meglio si avvicina al tipo francese.

C. OBLONGOTURBINATUS var. TAUROGRACILIS SACC.

(Tav. V, fig. 23).

Testa minor, valde gracilior, perfusulata, spira elatior, acutior, gracilior. In regione spirae anfractus primi granuloso-angulati, medii angulati, externi subangulati, decliviores. Cauda valde gracilior et elongatior.

Alt. 12-60 mm.: Lat. 4 1/2-20 mm.

Elveziano: Colli torinesi (frequente).

OSSERVAZIONI. — Alcuni esemplari si presentano trasversalmente striolati in modo da ricordare assai il vivente *C. D'Orbignyi.*

Anom. ANGULATISSIMA SACC. (Tav. V, fig. 24). — *Spira perscalarata. Anfractus angulatissimi.*

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Anom. ROTUNDATISSIMA SACC. — *Spira perscalarata, sed anfractus rotundatissimi.*

Elveziano: Colli torinesi (rara).

C. OBLONGOTURBINATUS var. FUSOLAEVIS SACC.

(Tav. V, fig. 25).

Testa minor, gracilior, fusulatior, minus ventrosa. Spira minus scalarata. Anfractus magis involuti, rotundatiores, ad suturam non depressi.

Elveziano: Colli torinesi (frequente).

C. OBLONGOTURBINATUS var. BICONOLONGA SACC.

(Tav. V, fig. 26).

Testa minor, gracilior, fusulatior, valde minus ventrosa. Spira ascalarata, conico-elongatissima. Anfractus regulariter involuti, ad suturam nihil subcanaliculati, subangulati, suturis subsuperficialibus disjuncti.

Alt. 35-45 mm.: Lat. 11-14 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

OSSERVAZIONE. — Ricorda alquanto il gruppo del *C. Bronni.*

C. OBLONGOTURBINATUS var. PAUCISPIRALATA.

(Tav. V, fig. 27).

Testa affinis var. fusolaevis, *sed: brevior et latior; spira valde depressior, in regione externa subascalarata. Anfractus angulatiores.*

Alt. 33-52 mm.: Lat. 13-20 mm.

Elveziano: Colli torinesi (non rara).

C. OBLONGOTURBINATUS var. TAUROCHELYCONOIDES SACC.

(Tav. V, fig. 28).

Testa subovatior. Spira aliquantulum brevior. Anfractus, ultimus praecipue, ad suturam superam minus depressi, rotundatiores.

Elveziano: Colli torinesi (rara).

Osservazioni. — È quasi una forma intermedia fra il tipo e la var. *subfusiformis* Grat. Ricorda alcune forme di *Chelyconus.*

Avvertenza. — La fine, l'indice ed il resto delle Tavole della famiglia *Conidae,* nonchè le *Conorbidae,* si trovano nel fascicolo secondo della parte XIII, fascicolo che non potendo più essere inserito nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, durante il corrente anno accademico, fu stampato a spese dell'Autore, come le parti IX, X e XII, affinchè non fosse troppo ritardata la pubblicazione della presente Monografia.

Tali parti trovansi in vendita presso la Libreria E. Loescher di C. Clausen - Torino.

Quadro comparativo dei *LEPTOCONUS* e dei *CONOSPIRUS*

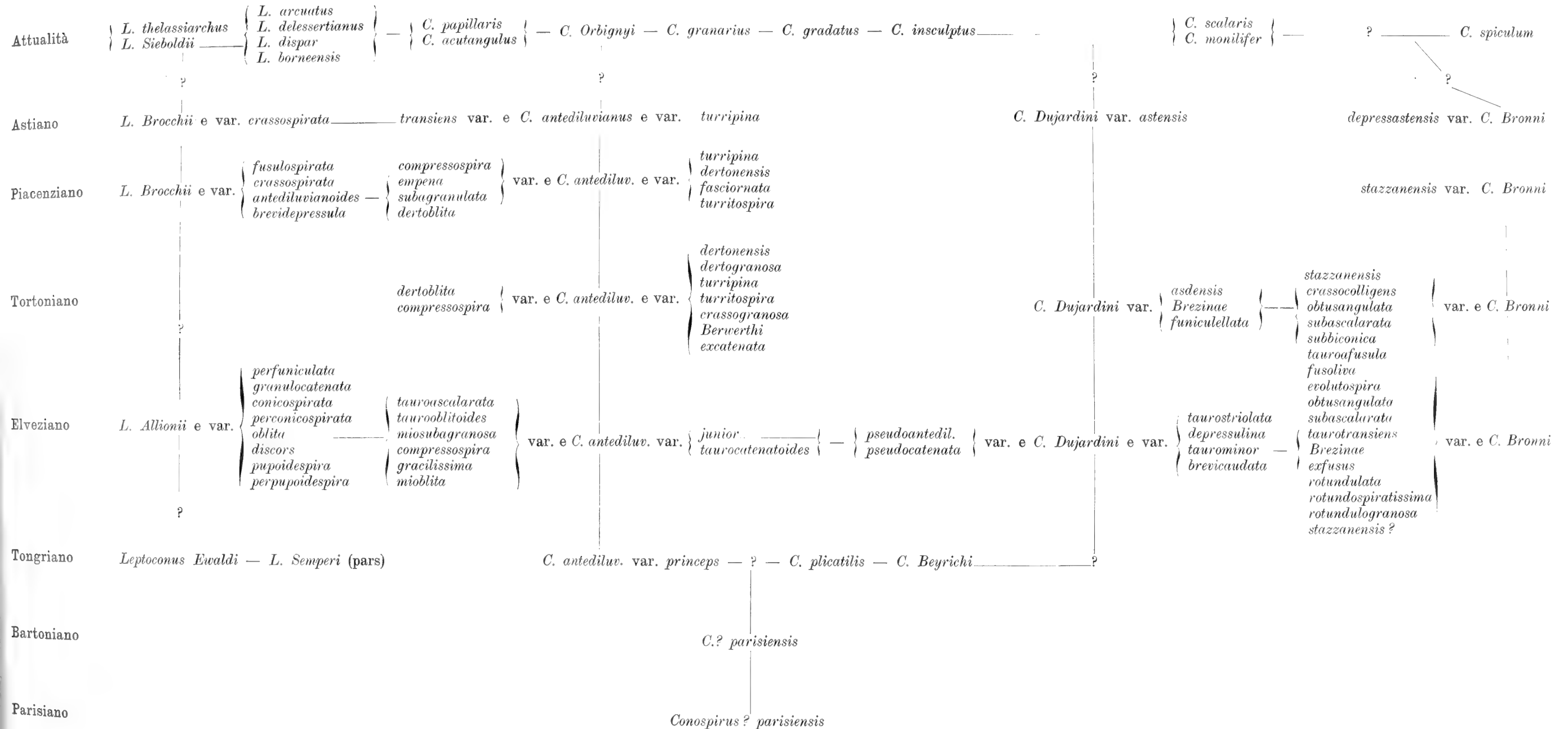
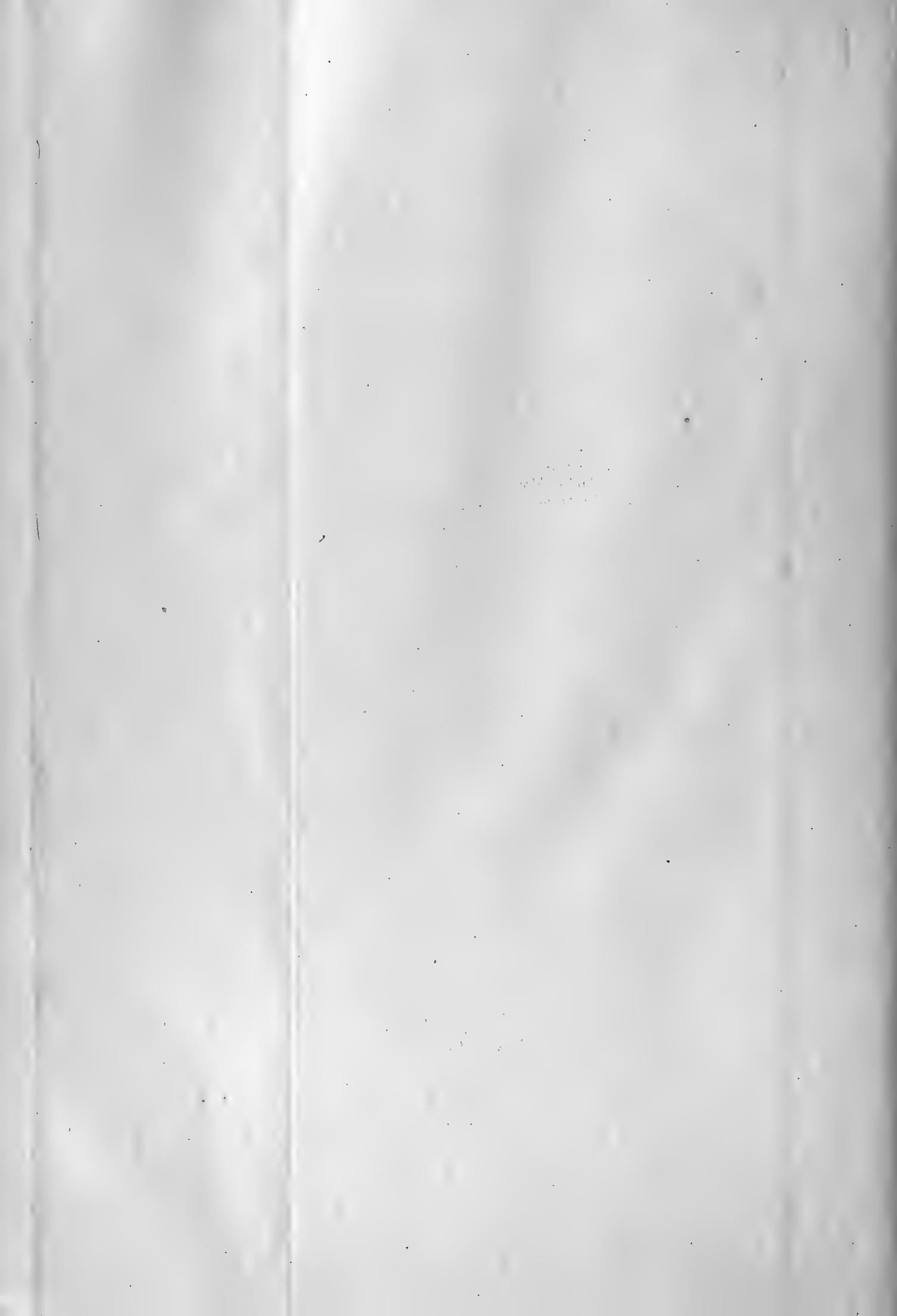
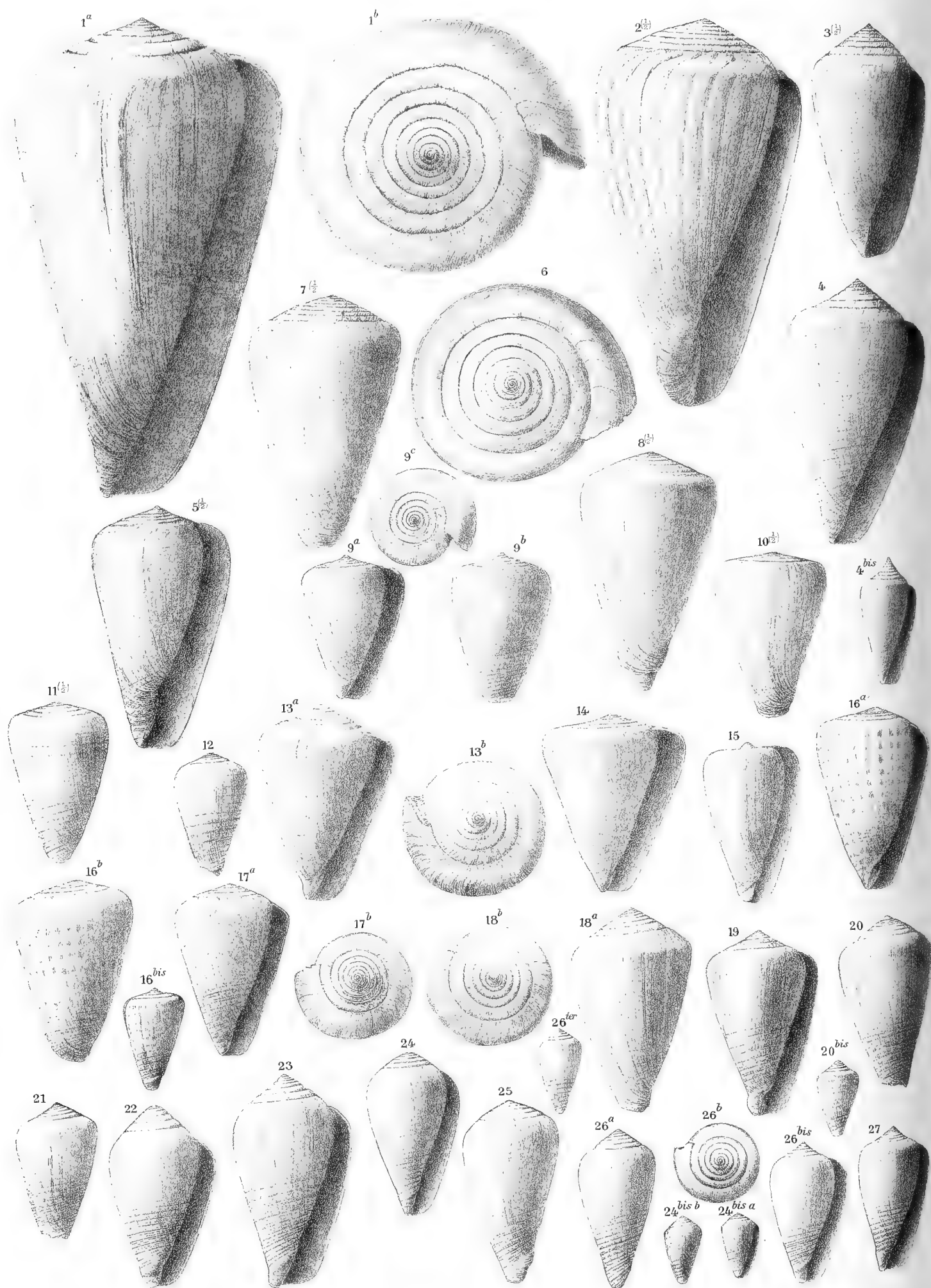
1a
1b
2(1/2)
3(1/2)
4
6
7(1/2)
8(1/2)
9c
5(1/2)
9a
9b
10(1/2)
4bis
11(1/2)
13a
14
15
16a
12
13b
16b
17a
17b
18b
18a
19
20
16bis
26ter
20bis
24
23
25
21
22
26a
26b
26bis
27
24bis b
24bis a

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I.

Fig.		Località	COLLEZIONE in cui è conservato l'esemplare figurato
1.	*Dendroconus betulinoides* (Lk.) [es. preso a tipo dal Brocchi] .	Astigiana	Coll. Brocchi (Milano)
2.	Id. Id. var. *supramamillata* Sacc.	Vezza d'Alba	Museo geol. Torino
3.	Id. Id. var. *chelyconoides* Sacc.	Id.	Id.
4.	Id. Id. var. *exlineata* Sacc. [tipo del *C. lineatus* Bors.]	Astigiana	Id.
4 *bis.*	Id. Id. Id. Id. *(juv.)*	Vezza d'Alba	Id.
5.	Id. Id. var. *concavespirata* Sacc.	Id.	Id.
6.	Id. Id. var. *dertosulculellata* Sacc.	S. Agata	Id.
7.	Id. Id. var. *dertomamillata* Sacc.	Stazzano	Museo geol. Roma
8.	Id. Id. var. *dertocanaliculata* Sacc.	Id.	Id.
9.	Id. *Berghausi* (Micht.) [esemplare tipico del Michelotti]	S. Maria-Stazzano	Id.
10.	Id. Id. var. *propebetulinoides* Sacc.	S. Agata	Museo geol. Torino
11.	Id. Id. var. *bifasciolata* Sacc.	Id.	Id.
12.	Id. Id. var. *exfuscocingulata*	Borzoli	Museo geol. Genova
13.	Id. Id. var. *moravicoides* Sacc.	Stazzano	Museo geol. Torino
14.	Id. Id. var. *triangularis* Sacc.	Id.	Id.
15.	Id. Id. var. *planocylindrica* Sacc.	S. Agata	Id.
16.	Id. Id. var. *percommunis* Sacc.	Stazzano	Id.
16 *bis.*	Id. Id. Id. Id. *(juv.)*	Id.	Id.
17.	Id. Id. var. *glandiformis* Sacc.	Id.	Id.
18.	Id. Id. var. *ccnotriangula* Sacc.	Id.	Id.
19.	Id. Id. var. *semisulcata* Sacc.	Montegibbio	Museo geol. Modena
20.	Id. Id. var. *conicospira* Sacc.	Stazzano	Museo geol. Torino
20 *bis.*	Id. Id. Id. Id. *(juv.)*	Id.	Id.
21.	Id. Id. var. *permucronata* Sacc.	S. Agata	Id.
22.	Id. *dertovatus* Sacc.	Stazzano	Id.
23.	Id. Id. var. *connectens* Sacc.	Id.	Id.
24.	Id. *Eschewegi* (Da Costa) var. *caelata* (Dod. Sacc.) . .	Montegibbio	Museo geol. Modena
24 *bis.*	Id. Id. Id. Id. *(juv.)*	Stazzano	Museo geol. Torino
25.	Id. Id. Id. var. *depressoastensis* (Sacc.) .	Astigiana	Id.
26.	Id. *pyruloides* (Dod. Sacc.)	S. Agata	Museo geol. Modena
26 *bis.*	Id. Id. Id.	Id.	Museo geol. Torino
26 *ter.*	Id. Id. Id. *(juv.)*	Id.	Id.
27.	Id. Id. var. *planacutispira* Sacc.	Id.	Id.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA II.

Fig.				Località	COLLEZIONE in cui è conservato l'esemplare figurato
1.	*Lithoconus*	*Mercatii*	(Br.) [esemplare tipico del Brocchi] . . .	S. Miniato	Coll. Brocchi (Milano)
1 *bis.*	Id.	Id.	*(juv.)*	Astigiana	Museo geol. Torino
2.	Id.	Id.	anom. *crasselabiata* Sacc.	Id.	Id.
2 *bis.*	Id.	Id.	anom. *anomalosulcata* Sacc.	Villanuova d'Asti	Id.
3.	Id.	Id.	var. *cincta* (Bors.)	Id.	Id.
4.	Id.	Id.	var. *Aldrovandi* (Br.) [esempl. tip. del Brocchi]	Crete senesi	Coll. Brocchi (Milano)
5.	Id.	Id.	var. *elongatofusula* Sacc.	Astigiana	Museo geol. Torino
6.	Id.	Id.	var. *depressulospira* Sacc.	Casaglia	Museo geol. Roma
7.	Id.	Id.	var. *longoastensis* Sacc.	Astigiana	Museo geol. Torino
8.	Id.	Id.	var. *Baldichieri* (Bors.)	Baldichieri (Astig.)	Id.
9.	Id.	Id.	var. *fusuloidea* Sacc.	Astigiana	Id.
10.	Id.	Id.	var. *crassovata* Sacc.	Id.	Id.
11.	Id.	Id.	var. *Caroli* (Fuc.)	Id.	Id.
12.	Id.	Id.	var. *turricula* (Br.) [esempl. tip. del Brocchi]	Crete senesi	Coll. Brocchi (Milano)
13.	Id.	Id.	var. *canaliculatodepressa* Sacc.	Astigiana	Museo geol. Torino
14.	Id.	Id.	var. *suprainflata* Sacc.	Albenga	Id.
15.	Id.	Id.	var. *subaustriaca* Sacc.	Stazzano	Museo geol. Roma
16.	Id.	Id.	? var. *tauromaxima* Sacc.	Colli torinesi	Museo geol. Torino
17.	Id.	Id.	? var. *compressicauda* Sacc.	Id.	Id.
18.	Id.	Id.	var. *acanaliculata* Sacc.	Savona-Fornaci	Id.

L. Righini dis.

Lit. Salussolia, Torino

SULLE

PROPRIETÀ TERMICHE

DEI VAPORI

PARTE V.

STUDIO DEL VAPORE DI ALCOOL

RISPETTO ALLE LEGGI DI BOYLE E DI GAY-LUSSAC

MEMORIA

DI

ANGELO BATTELLI

Professore di Fisica Sperimentale nella R. Università di Padova

Approvata nell'Adunanza dell'11 Giugno 1893

1. — Le presenti esperienze vennero eseguite collo stesso apparecchio che mi servì nello studio analogo del vapore di solfuro di carbonio.

La purificazione dell'alcool venne fatta con la massima cura; tenendo dapprima l'alcool già distillato sopra la calce viva polverizzata, per tre giorni, distillando poi il liquido decantato, e togliendo finalmente le ultime traccie di umidità con nuove distillazioni sopra la potassa caustica nel vuoto.

2. Risultati delle esperienze. — Le tabelle che seguono, — come nelle precedenti Memorie, — contengono nella colonna π i pesi del vapore espressi in grammi; nella colonna v i volumi di un gramma di vapore, espressi in cm.^{3}; nella colonna p le pressioni esercitate sul vapore, espresse in millimetri di mercurio; nella colonna pv i prodotti delle pressioni per i volumi; e finalmente nella colonna δ i valori delle densità del vapore, riferite all'aria. I valori p, v, δ, sono ridotti alla temperatura media per ciascuna serie di esperienze.

Tabelle A.

t	π	v	p	pv	δ
		Temperatura media = — 16°,24.			
—16°,21	0gr.,00101	112564,0	3,08	346697	1,5947
—16 ,22	"	104336,8	3,31	345355	1,6008
—16 ,23	"	98514,0	3,51	345784	1,5989
—16 ,25	"	91043,3	3,80	345965	1,6017
—16 ,25	"	88656,2	3,90	345759	1,5990
—16 ,27	"	86278,5	4,00	345114	1,6020
		Temperatura media = — 12°,06.			
—12°,01	0gr.,00101	99334,2	3,54	351643	1,5979
—12 ,01	"	91475,4	3,85	352180	1,5954
—12 ,04	"	86874,1	4,05	351840	1,5970
—12 ,06	"	80416,5	4,37	351420	1,5989
—12 ,06	"	75330,8	4,66	351042	1,6006
—12 ,08	"	69534,8	5,06	351846	1,5969
—12 ,10	"	67485,4	5,20	350924	1,6011
—12 ,11	"	65874,2	5,32	350451	1,6033
		Temperatura media = — 8°,54.			
—8°,52	0gr.,00101	84516,1	4,21	355813	1,6005
—8 ,52	"	78428,2	4,54	356064	1,5994
—8 ,52	"	72544,6	4,91	356194	1,5988
—8 ,52	"	66312,4	5,36	355435	1,6022
—8 ,53	"	65268,4	5,45	355713	1,6009
—8 ,54	"	61187,8	5,81	355501	1,6019
—8 ,56	"	54367,6	6,54	355564	1,6016
—8 ,56	"	53321,6	6,67	355655	1,6022
—8 ,57	"	51886,0	6,84	354900	1,6046
		Temperatura media = — 1°,85.			
—1°,80	0gr.,00101	72100,1	5,05	364105	1,6037
"	"	69800,2	5,22	364357	1,6026
"	"	60881,0	5,98	364068	1,6039
—1 ,84	"	52316,6	6,96	364123	1,6036
—1 ,82	"	49392,4	7,37	364022	1,6041
—1 ,86	"	46207,2	7,88	364113	1,6037
—1 ,88	"	43886,7	8,29	363821	1,6050
"	"	41353,3	8,80	363909	1,6046
"	"	40001,5	9,09	363614	1,6059
"	"	37453,3	9,71	363671	1,6056
—1 ,86	"	34956,7	10,40	363550	1,6061
—1 ,87	"	31258,2	11,63	363533	1,6062
"	"	30852,6	11,78	363444	1,6066

t	π	v	p	pv	δ
		Temperatura media = 5°,40.			
5°,40	0gr.,00101	47254,3	7,92	374269	1,6020
"	"	44809,2	8,35	374208	1,6023
"	"	42300,0	8,85	374368	1,6015
"	"	39863,3	9,39	374316	1,6017
5 ,42	"	35890,2	10,42	374206	1,6023
"	0,00284	31541,8	11,82	373853	1,6037
"	"	27442,0	13,60	373211	1,6065
5 ,39	"	24305,4	15,35	373088	1,6070
"	"	22005,5	16,95	372993	1,6074
5 ,38	"	21152,4	17,62	372705	1,6086
		Temperatura media = 8°,75.			
8°,74	0gr.,00284	38916,8	9,70	377493	1,6074
"	"	36331,6	10,39	377485	1,6074
"	"	34004,7	11,10	377452	1,6076
"	"	33266,2	11,35	377571	1,6071
8 ,75	"	30198,5	12,51	377783	1,6062
"	"	28453,6	13,26	377295	1,6082
8 ,76	"	22354,0	16,89	377559	1,6071
"	"	20428,1	18,47	377307	1,6082
"	"	17850,5	21,12	377002	1,6095
8 ,77	"	16806,3	22,42	376797	1,6104
		Temperatura media = 16°,22.			
16°,20	0gr.,00284	21335,8	18,16	387495	1,6075
"	"	18755,6	20,65	387303	1,6083
16 ,21	"	15963,2	24,27	387422	1,6078
"	"	14005,0	27,65	387238	1,6086
16 ,23	"	12541,4	30,85	386902	1,6100
16 ,24	"	11567,7	33,50	386603	1,6112
"	"	10975,5	35,21	386448	1,6119
		Temperatura media = 20°,41.			
20°,40	0gr.,00284	14144,2	27,67	391407	1,6125
"	"	12193,7	32,15	392028	1,6120
20 ,41	"	11434,5	34,26	391746	1,6131
"	"	10512,8	37,26	391706	1,6133
"	"	9133,4	42,85	391366	1,6147
"	"	8740,3	44,77	391303	1,6150
"	"	8589,8	45,55	391265	1,6151

t	π	v	p	pv	δ
		Temperatura media = 24°,33.			
24°,30	0gr.,00284	14251,6	27,88	397335	1,6117
24 ,31	"	12934,6	30,72	397351	1,6117
23 ,33	"	12003,7	33,10	397326	1,6118
"	"	10964,2	36,22	397123	1,6126
"	"	10004,8	39,65	396690	1,6143
24 ,34	"	9356,8	42,35	396261	1,6161
"	"	8831,0	44,86	396159	1,6165
"	"	7261,5	54,54	396042	1,6170
"	"	7042,8	56,21	395876	1,6177
24 ,36	"	6990,9	56,62	395825	1,6179
		Temperatura media = 58°,46.			
58°,52	0gr.,0248	4036,21	109,25	440956	1,6193
"	"	3625,14	121,80	441542	1,6172
58 ,50	"	3525,63	124,92	440422	1,6213
58 ,48	"	3140,61	140,20	440313	1,6217
58 ,46	"	2514,80	175,10	440341	1,6216
58 ,44	"	2196,40	200,22	439763	1,6237
"	"	2034,85	216,20	439935	1,6231
58 ,43	"	1983,41	221,58	439484	1,6248
"	"	1775,54	247,18	438878	1,6270
"	"	1631,14	269,05	438858	1,6270
"	"	1457,02	301,10	438709	1,6276
"	"	1316,40	332,45	437637	1,6316
		Temperatura media = 79°,10.			
79°,15	0gr.,0248	2190,61	211,70	463752	1,6358
"	"	1931,45	240,10	463741	1,6358
79 ,12	"	1725,33	268,92	463976	1,6350
"	"	1420,80	326,20	463465	1,6368
79 ,11	"	1075,35	431,10	463583	1,6364
79 ,10	"	816,27	567,00	462825	1,6390
79 ,08	"	704,35	655,75	461878	1,6424
79 ,07	"	643,27	717,00	461182	1,6449
"	"	630,26	731,10	460876	1,6463
"	"	617,81	745,65	460670	1,6467
"	"	602,51	764,10	460378	1,6477
"	"	582,82	789,65	460224	1,6483

t	π	v	p	pv	δ
		Temperatura media = 99°,83.			
99°,82	0gr.,0248	1235,30	398,20	491799	1,6334
"	"	1070,43	459,60	491970	1,6339
"	"	983,83	499,70	491620	1,6340
"	"	961,53	511,20	491534	1,6343
99°,83	"	948,33	518,15	491377	1,6348
"	"	905,36	542,70	491339	1,6349
"	"	781,26	627,35	490123	1,6390
"	"	725,30	675,20	489723	1,6403
"	"	645,27	757,80	488986	1,6428
"	"	532,68	915,15	487482	1,6479
99 ,84	0,0734	490,260	993,50	487073	1,6493
"	"	415,745	1167,20	485257	1,6554
"	"	375,264	1289,00	483715	1,6607
"	"	305,281	1575,30	480909	1,6704
"	"	283,152	1694,40	479771	1,6743
		Temperatura media = 134°,86.			
134°,85	0gr.,0734	908,10	595,7	540955	1,6247
"	"	837,26	645,6	540535	1,6259
"	"	803,64	672,2	540207	1,6269
"	"	772,09	700,05	540504	1,6261
"	"	684,46	788,1	539423	1,6293
"	"	603,28	892,3	538307	1,6327
134 ,86	"	523,27	1026,8	537294	1,6357
"	"	442,817	1210,4	535986	1,6397
134 ,87	"	314,659	1688,8	531396	1,6539
"	"	198,315	2630,55	521677	1,6847
"	"	175,264	2962,7	519255	1,6926
"	"	148,515	3462,4	514218	1,7091
"	"	126,100	4031,8	508410	1,7287
"	"	109,312	4597,7	502575	1,7487
"	"	100,900	4957,2	500182	1,7571
		Temperatura media = 150°,05.			
150°,02	0gr.,0734	891,33	633,5	564658	1,6145
"	"	804,52	702,1	564853	1,6140
150 ,03	"	671,81	838,4	563246	1,6186
150 ,04	"	584,32	964,95	562543	1,6206
"	"	502,26	1118,8	561929	1,6224
"	"	412,280	1356,6	559299	1,6303
150 ,05	"	294,614	1880,4	553992	1,6456
"	"	186,349	2918,2	543804	1,6764
150 ,06	0,2262	98,314	5300,5	521113	1,7494
"	"	76,616	6539,9	501061	1,8194
150 ,07	"	70,420	7140,7	502848	1,8130
150 ,08	"	68,358	7315,4	500066	1,8231
"	"	67,400	7415,1	499778	1,8241

t	π	v	p	pv	δ
		Temperatura media = 178°,41.			
178°,20	0gr.,2262	454,638	1325,3	602532	1,6146
"	"	421,368	1421,6	599017	1,6241
178 ,22	"	411,760	1457,3	600058	1,6212
178 ,28	"	385,648	1550,2	597832	1,6273
178 ,34	"	360,262	1653,6	595729	1,6330
178 ,38	"	312,486	1901,5	594192	1,6372
178 ,40	"	254,109	2326,6	591210	1,6455
178 ,44	"	210,751	2790,8	588164	1,6540
178 ,46	"	156,248	3720,5	581321	1,6735
"	"	128,650	4466,2	574577	1,6931
"	"	105,852	5368,7	568287	1,7129
"	"	87,480	6399,1	558506	1,7379
178 ,47	"	71,564	7650,9	547529	1,7768
"	"	59,247	9031,7	535101	1,8180
178 ,49	"	51,654	10162,3	524924	1,8533
"	"	47,256	10957,1	517789	1,8788
178 ,51	"	40,334	12501,4	504232	1,9294
"	"	36,518	13952,9	509532	1,9093
178 ,53	"	34,351	14203,5	487904	1,9939
		Temperatura media = 198°,22.			
198°,12	0gr.,2262	418,332	1498,1	626703	1,6205
"	"	406,815	1540,0	626495	1,6210
198 ,14	"	393,648	1591,6	626537	1,6210
"	"	385,461	1623,9	625950	1,6225
198 ,18	"	360,456	1733,8	624959	1,6250
198 ,18	"	325,492	1917,0	623968	1,6276
198 ,20	"	286,252	2172,2	621797	1,6333
198 ,21	"	267,451	2320,5	620620	1,6364
"	"	208,254	2957,1	615829	1,6491
198 ,23	"	175,267	3495,6	612663	1,6576
"	"	120,816	4971,8	600673	1,6907
198 ,25	"	89,312	6620,5	591290	1,7176
198 ,27	"	77,253	7533,4	581978	1,7451
"	"	52,348	10661,0	558082	1,8198
198 ,29	"	38,264	13902,7	531973	1,9091
198 ,32	"	29,816	16923,5	504591	2,0127
198 ,33	"	22,564	20649,1	465926	2,1797
		Temperatura media = 215°,64.			
215°,58	0gr.,2262	382,405	1698,0	649324	1,6219
215 ,59	"	361,580	1794,6	648892	1,6230
215 ,60	"	343,648	1886,9	648430	1,6242
215 ,62	"	316,905	2050,6	649845	1,6247
"	"	283,615	2282,9	647465	1,6266
"	"	242,310	2661,5	644908	1,6330

t	π	v	p	pv	δ
		Segue *Temperatura media* = 215°,64.			
215°,62	0gr.,2262	185,963	3440,5	639806	1,6461
215 ,63	"	161,564	3951,6	638436	1,6496
"	"	125,341	5029,9	630453	1,6705
215 ,64	"	95,374	6505,0	620408	1,6975
"	"	81,489	7520,8	612862	1,7184
"	"	64,562	9311,5	601169	1,7519
215 ,66	"	47,318	12260,0	580119	1,8154
215 ,67	"	28,574	18608,3	531715	1,9807
"	"	24,372	20961,3	510869	2,0615
215 ,68	"	20,155	23965,8	483031	2,1803
"	"	17,584	26156,4	459937	2,2898
"	"	15,618	28079,6	439558	2,3960
"	"	14,910	29100,2	433884	2,4273
		Temperatura media = 231°,46.			
231°,41	0gr.,2262	322,971	2057,5	664512	1,6362
231 ,42	"	304,622	2182,0	665078	1,6358
"	"	285,624	2326,3	664447	1,6364
"	"	261,504	2541,1	664508	1,6362
231 ,43	"	228,334	2898,4	661803	1,6429
"	"	215,005	3064,5	658883	1,6502
231 ,45	"	183,412	3572,9	655313	1,6592
"	"	160,516	4059,6	650132	1,6686
"	"	133,364	4847,8	645035	1,6856
231 ,46	"	108,157	5926,5	640993	1,6963
"	"	90,372	7031,2	635424	1,7111
"	"	75,262	8330,0	626933	1,7343
231 ,47	"	68,152	9133,4	622460	1,7468
"	"	52,314	11610,5	607392	1,7901
231 ,48	"	41,268	14298,1	590054	1,8427
231 ,49	0,4005	26,574	20640,3	548495	1,9823
231 ,50	"	21,348	24312,7	519028	2,0949
"	"	17,646	28695,9	506369	2,1473
"	"	12,912	33710,0	435264	2,4980
"	"	10,148	37515,2	380704	2,8561
		Temperatura media = 239°,52.			
239°,50	0gr.,4005	297,510	2280,5	678472	1,6282
"	"	283,264	2395,2	678474	1,6282
"	"	266,546	2541,2	677454	1,6306
"	"	250,118	2708,5	677445	1,6307
"	"	208,150	3230,4	672408	1,6429
239 ,51	"	191,102	3509,8	670730	1,6470
"	"	174,856	3812,5	666638	1,6571
"	"	140,257	4721,6	662238	1,6681
"	"	110,864	5908,7	655062	1,6864

t	π	v	p	pv	δ
		Segue *Temperatura media* = 239°,52.			
239°,52	$0^{gr.}$,4005	89,317	7284,0	650585	1,6980
"	"	80,182	8021,3	643164	1,7176
"	"	65,464	9538,2	624409	1,7692
"	"	48,648	12662,0	615981	1,7934
239 ,53	"	24,187	22846,9	552598	1,9991
"	"	18,206	28230,8	513970	2,1493
"	"	15,502	31512,4	488505	2,2614
"	"	14,048	33510,7	470758	2,3466
"	"	12,974	35121,0	455660	2,4244
"	"	11,250	37951,4	426953	2,5874
239 ,54	"	9,239	41580,0	384158	2,8756
"	"	8,622	42675,6	367949	3,0023
239 ,55	"	7,791	44151,8	344824	3,2037
		Temperatura media = 241°,66.			
241°,58	$0^{gr.}$,4005	280,416	2430,6	681579	1,6276
241 ,59	"	274,714	2480,2	681346	1,6281
241 ,60	"	251,180	2710,9	680924	1,6291
"	"	230,773	2941,2	678750	1,6343
"	"	215,710	3134,8	676208	1,6405
241 ,62	"	197,511	3406,9	672900	1,6485
241 ,65	"	168,334	3978,4	669700	1,6564
241 ,67	"	140,574	4732,0	665196	1,6676
"	"	131,875	5031,6	662016	1,6756
"	"	109,874	5997,5	658970	1,6834
"	"	96,310	6801,0	655005	1,6936
241 ,68	"	72,476	8882,4	643761	1,7232
"	"	65,264	9784,3	638562	1,7372
"	"	48,340	12808,7	619172	1,7916
"	"	33,255	17792,1	573884	1,9330
"	"	25,186	22302,1	561699	1,9749
"	"	20,314	26291,7	534090	2,0770
"	"	15,864	31400,0	498130	2,2270
"	"	12,915	35680,5	460814	2,4073
"	"	10,418	40065,2	417399	2,6577
"	"	8,751	43185,1	377913	2,9354
"	"	6,274	46134,6	289449	3,8325
241 ,69	"	5,258	47020,0	247231	4,4870
"	"	4,916	47305,4	232553	4,7702
"	"	4,314	47481,5	204835	5,4157
"	"	3,895	47851,8	186383	5,9519
"	"	3,153	49334,8	155553	7,1315
"	"	2,904	52908,3	153646	7,2200

t	π	v	p	pv	δ
		Temperatura media = 244°,83.			
244°,79	0gr.,4005	272,315	2524,1	687350	1,6238
"	"	231,334	2959,6	684656	1,6302
"	"	208,265	3280,5	683213	1,6337
244 ,80	"	164,831	4110,0	675897	1,6514
"	"	122,584	5471,7	670743	1,6640
244 ,81	"	97,362	6791,2	661205	1,6880
244 ,82	"	74,960	8680,3	650675	1,7154
244 ,83	"	51,305	12291,5	630615	1,7699
244 ,84	"	28,166	20619,0	580755	1,9219
244 ,85	"	17,426	29792,2	519159	2,1499
244 ,86	0,8620	10,742	40186,0	431678	2,5856
244 ,87	"	6,215	48256,0	299911	3,7216
"	"	4,883	49985,0	244077	4,5730
"	"	3,268	54244,1	177270	6,2964
"	"	2,754	64350,0	177220	6,2982

3. — Anche per il vapore d'alcool, come per quello delle altre sostanze da me studiate, si verifica il fenomeno, che la tensione del vapore va crescendo ancora, dopo cominciata la condensazione di mano in mano che il vapore si liquefa; sebbene per l'alcool ciò si riveli soltanto ad alta temperatura, e meno sensibilmente che per le altre sostanze.

Riferisco nel quadro seguente i valori dei volumi e delle tensioni del vapore, dopo cominciata la condensazione; e riferisco a lato i rapporti $\frac{p''}{p'}$ fra i valori p'' assunti dalla pressione nel primo momento della condensazione, e quelli p' corrispondenti alle tensioni massime, e i rapporti $\frac{\Delta p}{\Delta v}$ fra gli aumenti subìti dalle pressioni e i decrementi avvenuti nei volumi, fino a raggiungere le tensioni massime a partire dal primo momento della condensazione.

Tabelle B.

v	p	v	p	*Rapporti*
	Temperatura = — 16°,24; $p'' = 4^{mm},00$; $p' = 4^{mm},00$.			
86278,5	4,00	80315,6	4,00	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
84854,2	4,00	67461,2	4,00	

v	p	v	p	*Rapporti*
Temperatura = — 12°,06; p'' = 5^{mm},32; p' = 5^{mm},32.				
65874,2	5,32	62245,8	5,32	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
64186,8	5,32	49312,6	5,32	
Temperatura = — 8°,54; p'' = 6,84; p' = 6,84.				
51886,0	6,84	47234,0	6,84	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
49658,4	6,84	40316,8	6,84	
Temperatura = — 1°,85; p'' = 11,78; p' = 11,78.				
30852,6	11,78	22184,0	11,78	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
27484,5	11,78	17451,1	11,78	
Temperatura = 5°,40; p'' = 17,62; p' = 17,62.				
21152,4	17,62	17453,0	17,62	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
19374,8	17,62	12560,3	17,62	
Temperatura = 8°,75; p'' = 22,42; p' = 22,42.				
16806,3	22,42	11564,6	22,42	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
14324,0	22,42	9056,5	22,42	
Temperatura = 16°,22; p'' = 35,21; p' = 35,21.				
10975,5	35,21	7325,1	35,21	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
9731,4	35,21	5931,6	35,21	
Temperatura = 20°,41; p'' = 45,55; p' = 45,55.				
8589,8	45,55	5136,4	45,55	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
6934,6	45,55	4751,4	45,55	
Temperatura = 24°,33; p'' = 56,62; p' = 56,62.				
6990,9	56,62	5834,8	56,62	$\frac{p''}{p'} = 1,000$
6631,4	56,62	4136,8	56,62	
Temperatura = 58°,46; p'' = 332,44; p' = 332,45.				
1318,4	332,44	1220,5	332,45	$\frac{p''}{p'} = 0,99997$ (?)
1310,5	332,44	1108,0	332,45	
1285,0	332,45	831,4	332,45	$\frac{\Delta p}{\Delta v} = 0,000303$

Temperatura = 79°,10; p'' = 789,62; p' = 789,65.

v	p	v	p	*Rapporti*
582,93	789,62	560,5	789,64	$\frac{p''}{p'}$ = 0,99996 (?)
580,40	789,65	500,3	789,65	$\frac{\Delta p}{\Delta v}$ = 0,000349
574,00	789,64	404,6	789,65	

Temperatura = 99°,83; p'' = 1694,00; p' = 1694,40.

v	p	v	p	*Rapporti*
283,546	1694,00	278,456	1694,30	$\frac{p''}{p'}$ = 0,99976
283,340	1694,20	251,340	1694,30	$\frac{\Delta p}{\Delta v}$ = 0,0051948
283,050	1694,20	206,242	1694,40	
281,204	1694,30	184,218	1694,40	
		100,356	1694,40	

Temperatura = 134°,86; p'' = 4954,4; p' = 4957,2.

v	p	v	p	*Rapporti*
101,390	4954,4	90,156	4956,3	$\frac{p''}{p'}$ = 0,99944
101,055	4954,5	81,362	4957,0	$\frac{\Delta p}{\Delta v}$ = 0,088607
100,870	4954,7	70,050	4957,2	
98,334	4954,2	54,263	4957,2	
		40,370	4957,2	

Temperatura = 150°,05; p'' = 7401,2; p' = 7415,1.

v	p	v	p	*Rapporti*
67,554	7401,2	50,812	7415,1	$\frac{p''}{p'}$ = 0,99814
67,388	7408,3	41,362	7415,0	$\frac{\Delta p}{\Delta v}$ = 0,51482
66,282	7410,0	33,505	7415,1	
64,141	7414,0		7422,0	
56,314	7414,5			

Temperatura = 178°,41; p'' = 14188,7; p' = 14203,5.

v	p	v	p	*Rapporti*
34,610	14188,7	22,415	14203,3	$\frac{p''}{p'}$ = 0,99896
34,315	14196,5	20,186	14203,5	$\frac{\Delta p}{\Delta v}$ = 1,6444
33,200	14199,6	16,302	14203,5	
31,142	14202,0		14220,0	
26,208	14203,0			

Temperatura = 198°,22; p'' = 20604,0; p' = 20649,1.

v	p	v	p	*Rapporti*
22,855	20604,0	17,156	20649,0	$\frac{p''}{p'}$ = 0,99782
22,548	20621,5	15,310	20649,0	$\frac{\Delta p}{\Delta v}$ = 8,2000
22,004	20627,8	14,225	20649,1	
21,126	20633,4		20833,0	
19,304	20641,5			

v	p	v	p	*Rapporti*
Temperatura = 215°,64; p'' = 29048,0; p' = 29100,2.				
15,106	29048,0	11,318	29100,2	$\frac{p''}{p'} = 0,99821$
14,874	29069,5	9,340	29100,2	
14,121	29088,5			$\frac{\Delta p}{\Delta v} = 14,1081$
12,340	29092,0			
Temperatura = 231°,46; p'' = 37432,0; p' = 37515,2.				
10,301	37432,0	7,003	37515,2	$\frac{p''}{p'} = 0,99779$
10,151	37455,1	6,420	37515,2	
9,240	37471,4		37740,8	$\frac{\Delta p}{\Delta v} = 30,8148$
8,030	37502,0			
7,54	37514,0			
Temperatura = 239°,52; p'' = (?); p' = 44151,8.				

I risultati mostrano che i rapporti $\frac{p''}{p'}$ tendono a diminuire leggermente man mano che la temperatura s'innalza; mentre i rapporti $\frac{\Delta p}{\Delta v}$ vanno crescendo coll'aumentare della temperatura.

4. — Ho applicato la formola di Biot ai valori delle tensioni massime del vapore d'alcool:

$$\log. p = a + b\alpha^t + c\beta^t.$$

Le costanti sono rispettivamente uguali ad

$$a = 5,0751023$$

$$b = 0,0435271 \qquad \log. b = \bar{2},6387597$$

$$c = -4,0217800 \qquad \log. c = 0,6044184$$

$$\log. \alpha = 0,00336681$$

$$\log. \beta = \bar{1},99683015.$$

Per mostrare come la formola si adatti ai risultati sperimentali, riferisco nella seguente tabella i valori delle tensioni massime dati dall'osservazione nella colonna p'_0; e di fronte ad essi, nella colonna p'_c, i valori relativi ottenuti dal calcolo.

Tabella C.

t	p'_0	p'_c	t	p'_0	p'_c
— 16°,26	4,00	3,8511	79,10	789,65	790,803
— 12 ,06	5,32	5,2838	99,83	1694,40	1691,14
— 8 ,54	6,84	6,8277	134,86	4957,2	4954,76
— 1 ,85	11,78	12,003	150,05	7415,1	74144,35
5 ,40	17,62	17,943	178,41	14203,5	14287,37
8 ,75	22,42	22,335	198,22	20649,1	21414,22
16 ,22	35,21	35,642	215,44	29100,2	29743,5
20 ,41	45,55	45,824	231,46	37515,2	39369,7
24 ,33	56,62	57,605	239,52	44151,8	24991,7
58 ,46	332,45	330,282			

Anche Régnault (*) e Ramsay e Joung (**) determinarono fino ad alte temperature le tensioni massime del vapor d'alcool; e dedussero rispettivamente le costanti dalla formola di Biot.

Sarà bene porre a confronto nella tabella seguente i valori che si hanno dalla formola da me calcolata e dalle formole calcolate da Régnault e da Ramsay e Joung.

La colonna p'_R contiene i valori secondo Régnault, la p'_{RY} i valori secondo Ramsay e Joung, e la colonna p'_B i valori calcolati colla mia formola.

Tabella D.

t	p'_R		p'_{RY}	p'_B
	mm.	mm.		mm.
— 15°	4,69	5,10	—	4,234
— 10°	6,58	6,47	—	6,153
— 5	9,21	9,09	—	8,824
0	12,83	12,70	12mm,24	12,498
5	17,73	17,62	—	17,488
10	24,30	24,23	23,73	24,180
15	33,02	32,98	—	33,061
20	44,48	44,46	43,97	44,712
25	59,35	59,37	—	59,843
30	78,49	78,52	78,11	79,280
35	102,87	102,91	—	103,969
40	133,64	133,69	133,42	135,250
45	172,14	172,18	—	174,288
50	219,88	219,90	219,82	222,584

(*) *Mém. de l'Acad. des Sciences*, vol. 26, p. 349.

(**) *Philos. Trans. of the Roy. Society*, Parte I, 1886, p. 123.

t	p'_R		p'_{RY}	p'_B
	mm.	mm.		mm.
55°	278,61	278,59	—	281,646
60	350,26	350,21	350^{mm},21	353,798
65	436,99	436,90	—	440,952
70	541,21	541,15	540,91	546,721
75	665,52	665,54	—	671,545
80	812,76	812,91	811,81	817,115
85	985,97	985,40	—	994,066
90	1188,43	1189,30	1186,5	1196,409
95	1423,52	1425,13	—	1430,528
100	1694,92	1697,55	1692,3	1703,395
105	2006,34	2010,38	—	2013,907
110	2361,63	2367,64	2359,8	2373,984
115	2764,74	2773,40	—	2783,630
120	3219,68	3231,73	3223,0	3234,670
125	3730,41	3746,88	—	3757,954
130	4301,04	4323,00	4318,7	4330,719
135	4935,40	4964,22	—	4923,621
140	5637,00	5674,59	5686,6	5710,809
145	6410,62	6458,10	—	6508,531
150	7258,73	7318,40	7368,7	7392,517
160			9409,9	9423,804
170			11858	11904,63
180			14764	14777,09
190			18185	18183,05
200			22182	22183,05
210			26825	26812,25
220			32196	32173,50
230			38389	38387,37
240			45519	45482,81

L'accordo dei risultati della mia formola con quelli delle formole di Régnault e di Ramsay e Joung è assai soddisfacente.

5. — Ho ricavato di poi i valori dei volumi specifici del vapor saturo alle diverse temperature; e a tal uopo, identicamente a quanto avevo fatto per le precedenti sostanze, ho costruito le isotermiche fino al punto spettante al primo momento della condensazione; ed ho poi continuata ciascuna curva, secondo l'andamento che aveva, fino a incontrare la parallela all'asse delle ascisse condotta dall'ordinata della tensione massima. Il volume corrispondente al punto d'incontro rappresentava il volume del vapore allo stato di saturazione completa.

Tali volumi del vapore saturo si trovano riferiti nella seguente tabella, sotto la lettera v_s; mentre sotto la lettera v'_s si hanno i volumi del vapore nel primo momento della condensazione; nella stessa tabella le colonne δ_s e δ'_s contengono le densità rispetto all'aria rispondenti ai suddetti due stati del vapore.

Tabella E.

t	v_s	δ_s	v'_s	δ'_s
— 16,24	86278,5	1,60201		
— 12,06	65874,2	1,60335		
— 8,54	51886,0	1,60465		
— 1,85	30852,6	1,60665		
5,40	21152,4	1,60499		
8,75	16806,3	1,61041		
16,22	10975,5	1,61190		
20,41	8589,8	1,61514		
24,33	6990,9	1,61792		
58.46	1316,40	1,63161	1317,47	1,62922
79,10	582,82	1,64830	582,97	1,64793
99,83	283,152	1,67437	283,548	1,67242
134,86	100,900	1,75716	101,390	1,74964
150,05	67,400	1,82416	67,556	1,82335
178,41	34,351	1,99396	34,619	1,98059
198,22	22,564	2,17976	22,856	2,15660
215,64	14,910	2,42736	15,106	2,40017
231,46	10,148	2,85610	10,301	2,81983
239,52	7,791	3,20372		

Coi valori di v_s, v'_s, δ_s, δ'_s come ordinate, e prendendo le temperature come ascisse, ho descritto le curve che si trovano nella Tav. I, indicate successivamente coi numeri *1, 2, 3, 4.*

Il millimetro nelle ascisse rappresenta un grado di temperatura; e nelle ordinate rappresenta *100*$^{cc.}$ per le curve dei volumi, e il valore 0,01 per le curve delle densità. Inoltre l'origine dei volumi è *zero,* quello delle densità è *1,6000.* Come si vede le due curve dei volumi v_s e v'_s in così piccola scala, coincidono insieme.

6. — Nella Tav. II poi ho riportato i disegni delle isotermiche del vapore di alcool, in piccola scala. Esse sono distribuite in cinque gruppi.

Le curve del 1° gruppo corrispondono alle temperature —16°24, —12°,06, —8°,54, —1,85, +5°40. Esse sono disegnate a tratto continuo; nelle ascisse 1 mm. rappresenta 500$^{cc.}$, e nelle ordinate $\frac{1}{10}$ di millimetro di mercurio. L'origine degli assi cui è riferito il gruppo ha, rispetto al sistema di assi della tavola, le coordinate

$$v = -21152,4$$
$$p = -3,08.$$

Le isotermiche del secondo gruppo (segnate per punti) sono quelle delle temperature +8°,75; 16°,22; 20°,41; 24°,33. Esse sono riferite ad un sistema di assi la cui origine rispetto al sistema della tavola ha per coordinate

$$v = 0$$
$$p = -9,70;$$

e nelle ascisse 1 mm. equivale a 200$^{cc.}$, e nelle ordinate a $\frac{1}{4}$ di millimetro di mercurio.

Le curve spettanti alle temperature di 58°,46; 79°,1; 99°,83 compongono il 3° gruppo e sono disegnate a punti e tratti. L'origine degli assi di questo gruppo ha rispetto agli assi della tavola le coordinate

$$v = 0$$
$$p = 100;$$

e 1 mm. nelle ascisse rappresenta 20$^{cc.}$, e nelle ordinate la pressione di *10* millimetri di mercurio.

Le curve del 4° gruppo (disegnate a tratti interrotti) spettano alle temperature di 134°,86; 150°,05; 198°,22; 215°,64. Per esse non si è fatto trasporto di coordinate; e 1 mm. nelle ascisse vale *10*$^{cc.}$, e nelle ordinate 200 millim. di mercurio.

Infine il 5° gruppo di isotermiche è disegnato a tratti alternati con due punti. In esso 1 mm. nelle ascisse rappresenta 3$^{cc.}$, e nelle ordinate 500$^{cc.}$. L'origine degli assi cui sono riferite le curve ha rispetto agli assi della tavola le coordinate

$$v = -240$$
$$p = +35000.$$

Il quadro delle isotermiche porge il mezzo di determinare il punto critico. Però non avendo più ottenuto la condensazione a 241°,66, ho dovuto costruire brevi tratti di isotermica con determinazioni fatte alle temperature di 240°,1, 240°,8, 241°,2 temperature ottenute successivamente con grande stento dall'ebollizione di una stessa qualità di petrolio frazionato. I tratti di tali isotermiche si trovano in piccola scala nella Tav. I: così ho potuto riconoscere che la temperatura critica è posta fra 241°,2 e 241°,6. Ho preso come valore più approssimato

$$t_c = 241°,4.$$

Ad essa corrisponde

$$p_c = 47{,}348 \text{ mm.} \qquad v_c = 4{,}38 \text{ cc.}$$

Dallo stesso quadro delle isotermiche disegnate in grande scala, ho dedotto i volumi assunti dal vapore alle diverse temperature sotto le pressioni di 5^{mm}, 10^{mm}, 30^{mm}, 200^{mm}, 300^{mm}, 500^{mm}, 800^{mm}, 2000^{mm}, 5000^{mm}, 10000^{mm}, 20000^{mm}, 30000^{mm}; ed ho calcolato sotto ciascuna pressione i coefficienti di dilatazione per successivi intervalli di temperatura, mediante la solita formola:

$$k = \frac{v_1 - v_2}{v_2 t_1 - v_1 t_2}.$$

Nelle tabelle seguenti si trovano i valori di tali coefficienti.

Tabella F.

Pressione = 5 mm.

Temperature	Coefficienti
— 12° C.	
— 10	0,003806
— 8	0,003784
— 6	0,003762
— 4	0,003732
— 2	0,003724

Pressione = 10 mm.

Temperature	Coefficienti
— 2° C.	
+ 4	0,003821
+ 6	0,003778
+ 8	0,003752
+ 10	0,003730

Pressione = 30 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 16° C.	
18	0,003985
20	0,003866
22	0,003781
24	0,003740

Pressione = 200 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 58° C.	
60	0,004025
65	0,003950
70	0,003882
75	0,003766
80	0,003738

Pressione 300 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 58° C.	
60	0,004136
65	0,004100
70	0,003985
75	0,003868
80	0,003781
85	0,003764
90	0,003748
100	0,003710

Pressione = 500 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 70° C.	
75	0,004108
80	0,004037
85	0,003895
90	0,003801
95	0,003768
100	0,003749
110	0,003732
120	0,003720
130	0,003704

Segue **Tabella F.**

Pressione = 800 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 95° C.	0,004110
100	0,004050
110	0,003902
120	0,003820
130	0,003775
140	0,003741
150	

Pressione = 2000 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 130° C.	0,004435
140	0,004287
150	0,003920
160	0,003857
170	0,003795
180	0,003766
190	0,003752
200	0,003731
220	

Pressione = 10000 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 198° C.	0,004880
205	0,004621
210	0,004339
215	0,004107
220	0,003980
230	0,003906
240	

Pressione = 20000 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 200° C.	0,005328
205	0,004948
220	0,004731
230	0,004380
240	

Pressione = 30000 mm.

Temperature	Coefficienti
+ 230° C.	0,005178
235	0,004812
240	0,004668
245	

Da queste tabelle scaturiscono le medesime conclusioni a cui si giunse nello studio delle precedenti sostanze, che, cioè:

1° I coefficienti di dilatazione del vapore d'alcool sotto pressione costante aumentano col diminuire della temperatura e tanto più rapidamente quanto più il vapore si avvicina alla liquefazione;

2° I valori assoluti dei coefficienti medesimi e le loro variazioni fra gli stessi limiti di temperatura aumentano col crescere della pressione sotto cui trovasi il vapore.

7. — Dalle medesime isotermiche ho dedotto i valori delle pressioni corrispondenti a volumi eguali di un gramma di vapore, per le successive temperature; e con questi valori ho poi costruite le *curve di egual volume* o *isocore,* che trovansi disegnate in piccola scala nella Tav. IV, dove il millimetro nelle ascisse rappresenta un grado di temperatura, e nelle ordinate rappresenta *200* millimetri di pressione.

Nella medesima tavola si trova la curva delle tensioni massime del vapore, la quale congiunge le estremità di tutte le isocore. — Su ciascuna isocora ho scelto poi a diversi intervalli tante coppie di punti abbastanza vicini da poter calcolare con buona approssimazione il rapporto $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$, ossia il *coefficiente di aumento di pressione* a volume costante.

I valori di tali coefficienti si trovano nelle tabelle che seguono:

Tabelle G.

Volume di 1 gr. di vapore = 10cc

Temperature	Coefficienti
232° C.	
234	0,008195
236	0,008051
240	0,007940
244	0,007710

Volume di 1 gr. di vapore = 20cc

Temperature	Coefficienti
205° C.	
208	0,004510
212	0,004430
215	0,004400
220	0,004335
225	0,004280
230	0,004210
235	0,004160
240	0,004065

Volume di 1 gr. di vapore = 40cc

Temperature	Coefficienti
175° C.	
178	0,003480
185	0,003264
190	0,003150
200	0,003050
210	0,002970
220	0,002890
230	0,002815

Volume di 1 gr. di vapore = 60cc

Temperature	Coefficienti
156° C.	
160	0,003220
170	0,003185
180	0,003048
190	0,002920
200	0,002835
210	0,002740
220	0,002648
230	0,002563

Segue **Tabelle G.**

Volume di 1 gr. di vapore = 80^{cc}	
Temperature	Coefficienti
145° C.	0,003180
150	0,002990
160	0,002885
170	0,002795
180	0,002700
190	0,002615
200	0,002540
210	

Volume di 1 gr. di vapore = 100^{cc}	
Temperature	Coefficienti
138° C.	0,00306
140	0,002955
145	0,002850
150	0,002778
160	0,002705
170	0,002625
180	0,002565
190	0,002510
200	

Volume di 1 gr. di vapore = 400^{cc}	
Temperature	Coefficienti
95° C.	0,002825
100	0,002741
110	0,002690
120	0,002630
130	0,002580
140	0,002530
150	

Volume di 1 gr. di vapore = 800^{cc}	
Temperature	Coefficienti
80° C.	0,002710
85	0,002650
90	0,002605
100	0,002560
110	0,002520
120	0,002495
130	

Volume di 1 gr. di vapore = 1500^{cc}	
Temperature	Coefficienti
58° C.	0,002535
60	0,002495
65	0,002460
70	0,002430
75	0,002410
80	

Volume di 1 gr. di vapore = 12000^{cc}	
Temperature	Coefficienti
16° C.	0,002455
18	0,002428
20	0,002409
22	0,002389
24	

I valori riferiti ci dicono che:

1° I coefficienti di aumento di pressione, per un dato volume, vanno diminuendo col crescere della temperatura;

2° Tali variazioni si fanno più rapide di mano in mano che i volumi sono più piccoli;

3° Mentre i volumi vanno crescendo, diminuiscono i valori assoluti di questi coefficienti.

8. Comportamento del vapor d'alcool rispetto alla legge di Boyle. — Si può avere d'un colpo d'occhio l'idea del comportamento del vapor d'alcool rispetto alla legge di Boyle, descrivendo come per i vapori delle sostanze precedenti anche per esso le curve rappresentanti a ciascuna temperatura i valori dei prodotti pv in funzione delle pressioni. Tali curve si trovano riportate in piccola scala nella Tav. III, e sono distinte in cinque gruppi.

Quelle del 1° gruppo, disegnate a tratto continuo, corrispondono alle temperature di —16°,24; —12°,06; —8°,54; —1°,85. Per esse 1 millimetro sulle ascisse rappresenta la pressione di $\frac{1}{20}$ di millim. di mercurio, e sulle ordinate il valore *200*. L'origine del sistema cui sono riferite le curve ha, rispetto agli assi della tavola, le coordinate

$$x = 0$$
$$y = -\ 345.114.$$

Le curve del 2° gruppo, disegnate per punti, spettano alle temperature di +5°,40; 8°,75; 16°,22; 20°,41. Per esse 1 millim. sulle ascisse vale $\frac{1}{5}$ di millim. di mercurio, e sulle ordinate *100* unità pv. L'origine delle ordinate è stata trasportata verso il basso della quantità 372.705.

Nel terzo gruppo sono comprese le curve delle temperature di 24°,33; 58°,46; 79°,10; 99°,83, e sono segnate a tratti. Il millimetro sulle ascisse rappresenta *10* millim. di mercurio, e sulle ordinate *500* unità pv; mentre che l'origine delle ordinate è stata trasportata verso il basso di 395.825.

Le curve a punti e tratti alternati riguardano le temperature di

134°,8; 150°,05; 170°,41; 198°,22.

Nelle ascisse *1* millim. corrisponde a *100* millimetri di mercurio, e nelle ordinate a *1000* unità pv. L'origine delle ordinate poi è trasportata verso il basso di 465.926.

Finalmente al 5° gruppo appartengono le curve spettanti alle temperature di

215°,64; 231°,46; 239°,52; 241°,66.

Per esse *1* millim. rappresenta sulle ascisse *200* millim. di mercurio, e sulle ordinate *200* unità pv.

L'origine degli assi cui le curve sono riferite ha, rispetto agli assi della tavola, le coordinate

$$x = 0$$
$$y = -\ 344.824.$$

Da queste curve poi ho ricavato i valori dei prodotti $p_1 v_1$ corrispondenti per ciascuna temperatura allo stato di gas; ed ho calcolato quindi i valori di α nella formola $\frac{p_1 v_1}{pv} = 1 + \alpha$. Essi trovansi riferiti in parte nella tabella che segue:

Tabella H.

Temperatura = — 1°,85.

p	α
6,96	0,00021
7,37	0,00048
7,88	0,00023
8,29	0,00104
8,80	0,00079
9,09	0,00159
9,71	0,00145
10,40	0,00178
11,63	0,00183
11,78	0,00208

Temperatura = + 24°,33.

p	α
33,10	0,00006
36,22	0,00057
39,65	0,00166
42,35	0,00272
44,86	0,00305
54,54	0,00332
56,21	0,00372
56,62	0,00385

Temperatura = 58°,46.

p	α
124,92	0,00133
140,20	0,00158
175,10	0,00152
200,22	0,00284
216,20	0,00347
221,58	0,00486
247,18	0,00490
269,05	0,00525
332,45	0,00771

Temperatura = 99°,83.

p	α
511,20	0,00044
518,15	0,00076
542,70	0,00084
627,35	0,00332
675,20	0,00414
757,80	0,00565

Segue *Temperatura* = 99°,83.

p	α
915,15	0,00876
993,50	0,00960
1167,20	0,01338
1289,00	0,01661
1575,30	0,02254
1694,40	0,02497

Temperatura = 134°,86.

p	α
672,2	0,00128
700,05	0,00019
788,1	0,00274
892,3	0,00482
1026,8	0,00671
1210,4	0,00917
1688,8	0,01788
2630,55	0,03682
2962,7	0,04169
3462,4	0,05189
4031,8	0,06391
4597,7	0,07626
4957,2	0,08141

Temperatura = 178°,41.

p	α
1550,2	0,00530
1653,6	0,00885
1901,5	0,01146
2326,6	0,01656
2790,8	0,02184
3720,5	0,03385
4466,2	0,04599
5368,7	0,05756
6399,1	0,07361
7650,9	0,09766
9031,7	0,12315
10162,3	0,14493
10957,1	0,16070
12501,4	0,19191
13952,9	0,17951
14203,5	0,23180

Segue Tabella **H.**

p	α	p	α
Temperatura = 215°,64.		*Temperatura* = 239°,52.	
2282,9	0,00253	2541,6	0,00150
2661,5	0,00650	2708,5	0,00151
3440,5	0,01453	3230,4	0,00902
3951,6	0,01670	3509,8	0,01154
5029,9	0,02958	3812,5	0,01775
6505,0	0,04625	4721,6	0,02451
7520,8	0,05913	5908,7	0,03573
9311,5	0,07974	7284,0	0,04286
12260,0	0,11891	8021,3	0,05489
18608,3	0,22077	9538,2	0,08658
20961,3	0,27052	12662,0	0,10145
23965,8	0,34381	22846,9	0,22778
26156,4	0,37367	28230,8	0,32006
28079,6	0,43289	31512,4	0,38887
29100,2	0,46112	33510,7	0,44123
		35121,0	0,48898
		37951,4	0,58910
		41580,0	0,76612
		42675,6	0,84392
		44151,8	0,96758

I presenti dati bastano per mostrare:

1° Che i valori di α aumentano per ciascuna temperatura sempre più rapidamente, man mano che si avvicina lo stato di saturazione;

2° Che gli stessi valori, nelle vicinanze della saturazione, vanno crescendo coll'aumentare della temperatura.

9. — Dalle medesime curve dei prodotti pv in funzione delle pressioni, ho ricavato i valori delle pressioni p_1 e quindi dei volumi v_1, a cui può dirsi che il vapore comincia a comportarsi come un gas ordinario.

Essi trovansi qui sotto riferiti:

Tabella I.

t	p_1	v_1
— 16°,24	3,40	101765
— 12 ,06	4,00	87975,0
— 8 ,54	4,90	72673,5
— 1 ,85	5,90	61728,8
+ 5 ,40	8,45	44307,7
8 ,75	11,20	33714,3
16 ,22	20,00	19372,4
20 ,41	29,10	13460,5
24 ,33	35,40	11224,6
58 ,46	121,00	3644,71
79 ,10	265,00	1750,00
99 ,83	490,00	1003,57
134 ,86	650,50	832,154
150 ,05	830,00	680,241
178 ,41	1368,0	439,328
198 ,22	1598,0	392,053
215 ,64	1790,0	362,627
231 ,46	2050,0	324,390
239 ,52	2300,0	294,987
241 ,66	2400,0	283,958

La tabella dimostra, come trovai pure pei vapori delle precedenti sostanze, che i valori delle pressioni p_1 vanno continuamente crescendo e quelli dei volumi v_1 continuamente diminuendo coll'aumentare della temperatura.

10. — Ho fatto l'applicazione anche dei presenti risultati alle formole di Herwig e di Clausius; o per meglio dire, ho calcolato alle diverse temperature i valori del coefficiente che Herwig aveva creduto invariabile, ed ho determinato le costanti della formola di Clausius, sotto la forma che avevo adottata pei vapori da me precedentemente studiati.

Formola di Herwig. — In questa formola:

$$\frac{p_1 v_1}{p' v'} = c \sqrt{T},$$

$p_1 v_1$ rappresenta il prodotto della pressione pel volume, allorchè il vapore comincia a comportarsi come un gas, e $p'v'$ il corrispondente prodotto spettante al vapore nello stato di saturazione; c è una costante, e T è la temperatura assoluta.

Qui sotto sono riportati i valori di c che risultano dalle mie esperienze:

$$\frac{p_1 v_1}{p' v'} = 0,062568 \sqrt{273 - 16,24}$$
$$" = 0,062161 \sqrt{273 - 12,06}$$
$$" = 0,061700 \sqrt{273 - 8,54}$$
$$" = 0,060855 \sqrt{273 - 1,85}$$
$$" = 0,060067 \sqrt{273 + 5,40}$$
$$" = 0,059702 \sqrt{273 + 8,75}$$
$$" = 0,058954 \sqrt{273 + 16,22}$$
$$" = 0,058445 \sqrt{273 + 20,41}$$
$$" = 0,058217 \sqrt{273 + 24,33}$$
$$" = 0,055350 \sqrt{273 + 58,46}$$
$$" = 0,053701 \sqrt{273 + 79,10}$$
$$" = 0,053083 \sqrt{273 + 99,83}$$
$$" = 0,053547 \sqrt{273 + 134,86}$$
$$" = 0,054925 \sqrt{273 + 150,05}$$
$$" = 0,057977 \sqrt{273 + 178,41}$$
$$" = 0,061943 \sqrt{273 + 198,22}$$
$$" = 0,067677 \sqrt{273 + 215,64}$$
$$" = 0,077772 \sqrt{273 + 231,46}$$

Si vede adunque che i valori di c pel vapore d'alcool vanno diminuendo fino a 100° circa; dopo di che prendono a crescere continuamente colla temperatura. L'andamento di queste variazioni è ben rappresentato dalla curva controdistinta colla lettera h nella Tav. I, la quale è costruita prendendo come ascisse le temperature e come ordinate i valori di c. Un millimetro nelle ascisse rappresenta un grado, e nelle ordinate il numero *0,0002*. Inoltre l'origine delle ordinate è trasportata di 0,05 verso il basso.

11. Formola di Clausius. — Ho adottato per essa la forma da me usata per l'innanzi:

$$p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{mT^{\mu} - nT^{\nu}}{(v + \beta)^2}.$$

Le costanti hanno i valori seguenti:

$$R = 1343,80$$
$$m = 432.449.000$$
$$n = 14.10^{-8}$$
$$\mu = 0,71373$$
$$\nu = 4,7151$$
$$\alpha = 0,941$$
$$\beta = 0,851$$

Nelle seguenti tabelle si trovano corrispondentemente a ciascun volume i valori delle pressioni osservate e quelli delle pressioni calcolate colla presente formola.

Tabelle L.

v	p	p_c
Temperatura = — 16°,24.		
112564,0	3,08	3,07
104336,8	3,31	3,31
98514,0	3,51	3,50
91043,3	3,80	3,79
88656,2	3,90	3,89
86278,5	4,00	4,00
Temperatura = — 12°,06.		
99334,2	3,54	3,53
91475,4	3,85	3,84
86874,1	4,05	4,04
80416,5	4,37	4,36
75330,8	4,66	4,65
69534,8	5,06	5,04
67485,4	5,20	5,19
65874,2	5,32	5,32
Temperatura = — 8°,54.		
84516,1	4,21	4,20
78428,2	4,54	4,53
72544,6	4,91	4,90
66312,4	5,36	5,35
65268,4	5,45	5,44
61187,8	5,81	5,80
54367,6	6,54	6,53
53321,6	6,67	6,67
51886,0	6,84	6,84
Temperatura = — 1°,85.		
72100,1	5,05	5,05
69800,2	5,22	5,22
60881,0	5,98	5,98
52316,6	6,96	6,96
49392,4	7,37	7,37
46207,2	7,88	7,88
43886,7	8,29	8,29
Segue *Temperatura* = — 1°,85.		
41353,3	8,80	8,80
40001,5	9,09	9,10
37453,3	9,71	9,72
34956,7	10,40	10,41
31258,2	11,63	11,64
30852,6	11,78	11,79
Temperatura = + 5°,40.		
47254,3	7,92	7,90
44869,2	8,35	8,33
42300,0	8,85	8,84
39863,3	9,39	9,38
35890,2	10,42	10,39
31541,8	11,82	11,81
27442,0	13,60	13,62
24305,4	15,35	15,38
22005,5	16,95	16,99
21152,4	17,62	17,67
Temperatura = 8°,75.		
38916,8	9,70	9,68
36331,6	10,39	10,41
34004,7	11,10	11,13
33266,2	11,35	11,38
30198,5	12.51	12,54
28453,6	13,26	13,30
22354,0	16,89	16,92
20428,1	18,47	18,51
17850,5	21,12	21,19
16806,3	22,42	22,50
Temperatura = 16°,22.		
21335,8	18,16	18,21
18755,6	20,65	20,70
15963,2	24,27	24,32
14005,0	27,65	27,71
12541,4	30,85	30,94
11567,7	33,50	33,54
10975,5	35,21	35,35

v	p	p_c
Temperatura = 20°,41.		
14144,2	27,67	27,82
12193,7	32,15	32,29
11434,5	34,26	34,42
10512,8	37,26	37,44
9133,4	42,85	43,08
8740,3	44,77	45,02
8589,8	45,55	45,80
Temperatura = 24°,33.		
14251,6	27,88	28,00
12934,6	30,72	30,89
12003,7	33,10	33,24
10964,2	36,22	36,38
10004,8	39,65	39,87
9356,8	42,35	42,62
8831,0	44,86	45,15
7261,5	54,54	54,89
7042,8	56,21	56,59
6990,9	56,62	57,00
Temperatura = 58°,46.		
4036,21	109,25	109,97
3625,14	121,80	122,39
3525,63	124,92	125,83
3140,61	140,20	141,18
2514,80	175,10	176,12
2196,40	200,22	200,55
2034,85	216,20	217,37
1983,41	221,58	222,97
1775,54	247,18	248,86
1631,14	269,05	270,70
1457,02	301,10	302,74
1316,40	332,45	334,32
Temperatura = 79°,10.		
2190,61	211,70	214,71
1931,45	240,10	243,38
1725,33	268,92	272,24
1420,80	326,20	330,08
1075,35	431,10	434,87
816,27	567,00	570,75
704,35	655,75	659,81
643,27	717,00	721,28
630,26	731,10	735,81
Segue *Temperatura* = 79°,10.		
617,81	745,65	750,33
602,51	764,10	768,99
582,82	789,65	794,40
Temperatura = 99°,83.		
1235,30	398,20	402,00
1070,43	459,60	463,11
983,83	499,70	503,40
961,53	511,20	514,94
948,33	518,15	522,02
905,36	542,70	546,49
781,26	627,35	632,03
725,30	675,20	680,03
645,27	757,80	762,88
532,68	915,15	920,66
490,260	993,50	998,47
415,745	1167,20	1172,49
375,264	1289,00	1295,10
305,281	1575,30	1580,81
283,152	1694,40	1699,28
Temperatura = 134°,86.		
908,10	595,7	597,51
837,26	645,6	647,32
803,64	672,2	674,08
772,09	700,05	700,91
684,46	788,1	789,85
603,28	892,3	894,47
523,27	1026,8	1028,67
442,817	1210,4	1211,71
314,659	1688,8	1690,38
198,315	2630,55	2634,68
175,264	2962,7	2963,03
148,515	3462,4	3461,16
126,10	4031,8	4028,94
109,312	4597,7	4592,72
100,900	4957,2	4951,7
Temperatura = 150°,05.		
891,33	633,5	630,90
804,52	702,1	699,05
671,81	838,4	855,39
584,32	964,95	958,62
502,26	1118,8	1112,52

Segue *Temperatura* = 150°,05.

v	p	p_c
412,280	1356,6	1350,22
294,614	1880,4	1873,56
186,389	2918,2	2911,10
98,314	5300,5	5298,25
76,616	6539,9	6515,56
70,420	7140,7	7112,40
68,358	7315,4	7297,96
67,400	7415,1	7388

Temperatura = 178°,41.

v	p	p_c
454,638	1325,3	1312,65
421,368	1421,6	1414,49
411,760	1457,3	1446,90
385,648	1550,2	1542,97
360,262	1653,6	1649,46
312,486	1901,5	1895,64
254,109	2326,6	2318,35
210,751	2790,8	2778,39
156,248	3720,5	2701,16
128,650	4466,2	4448,68
105,852	5368,7	5338,40
87,480	6399,1	6362,15
71,564	7650,9	7625,99
59,247	9031,7	9005,12
51,654	10162,3	10129,15
47,256	10957,1	10914,55
40,334	12501,4	12420,57
36,518	13952,9	13882,98
34,351	14203,5	14124,07

Temperatura = 198°,22.

v	p	p_c
418,332	1498,1	1489,88
406,815	1540,0	1531,38
393,648	1591,6	1581,73
385,461	1623,9	1614,76
360,456	1733,8	1724,70
325,492	1917,0	1906,17
286,252	2172,2	2161,40
267,451	2320,5	2309,56
208,254	2957,1	2945,07
175,267	3495,6	3478,25
120,816	4971,8	4959,32
89,312	6620,5	6603,06
77,253	7533,4	7513,92
52,348	10661,0	10628,16
38,264	13902,7	13840,26
29,816	16923,5	16844,98
22,564	20649,1	20562,3

Temperatura = 215°,64.

v	p	p_c
382,415	1698,0	1690,45
361,580	1794,6	1786,19
343,648	1886,9	1877,76
316,905	2050,6	2035,75
283,615	2282,9	2266,83
242,310	2661,5	2643,67
185,963	3440,5	3418,86
161,564	3951,6	3916,93
125,341	5029,9	4993,30
95,374	6505,0	6463,04
81,489	7520,8	7482,40
64,562	9311,5	9262,87
47,318	12260,0	12201,86
28,574	18608,3	18518,96
24,372	20961,3	20887,65
20,155	23965,8	23885,35
17,584	26156,4	26094,4
15,618	28079,6	27999,3
14,910	29100,2	28937,1

Temperatura = 231°,46.

v	p	p_c
322,971	2057,5	2048,75
304,622	2182,0	2184,40
285,624	2326,3	2328,28
261,504	2541,1	2538,56
228,334	2898,4	2898,54
215,005	3064,5	3073,69
183,412	3572,9	3587,42
160,516	4059,6	4081,74
133,364	4847,8	4878,42
108,157	5926,5	5958,56
90,372	7031,2	7060,31
75,262	8330,0	8374,81
68,152	9133,4	9177,63
52,314	11610,5	11666,64
41,268	14298,1	14374,51
26,574	20640,3	20713,9
21,348	24312,7	24455,7
17,646	28695,9	27959,6
12,912	33710,0	33834,5
10,148	37515,2	37639,2

Temperatura = 239°,52.

v	p	p_c
297,510	2280,5	2275,16
283,264	2395,2	2387,49
266,546	2541,6	2534,33

v	p	p_c
Segue *Temperatura* = 239°,52.		
250,118	2708,5	2697,36
208,150	3230,4	3227,62
191,102	3509,8	3507,87
174,856	3812,5	3826,61
140,257	4721,6	4732,81
110,864	5908,7	5929,20
89,317	7284,0	7296,85
80,182	8021,3	8035,85
65,464	9538,2	9556,48
48,648	12662,0	12723,46
24,187	22846,9	22932,1
18,206	28230,8	28333,5
15,502	31512,4	31603,2
14,048	33510,7	33637,2
12,974	35121,0	35274,8
11,250	37951,4	38143,8
9,239	41580,0	40281,2
8,622	42675,6	46196,1
7,791	44151,8	44341,1
Temperatura = 241°,66.		
280,416	2430,6	2421,98
274,714	2480,2	2471,32
251,180	2710,9	2698,15
230,773	2941,2	2931,50
215,710	3134,8	3131,39
197,511	3406,9	3412,47
168,334	3978,4	3986,39
140,574	4732,0	4744,71
131,875	5031,6	5044,49
109,874	5997,5	6009,08
96,310	6801,0	6810,55
72,476	8882,4	8893,24
Segue *Temperatura* = 241°,66.		
65,264	9784,3	9798,89
48,340	12808,7	12869,43
33,255	17792,1	17821,28
25,186	22302,1	22370,55
20,314	26291,7	26399,7
15,864	31400,0	31434,4
12,915	35680,5	35775,9
10,418	40065,2	40172,9
8,751	43185,1	43370,4
6,274	46134,6	47624,1
5,258	47020,0	48590,0
4,916	47305,4	48732,0
4,314	47481,5	48875,0
3,895	47851,8	49179,4
3,153	49334,8	52817,4
2,904	52908,3	56873,3
Temperatura = 244°,83.		
272,315	2524,1	2509,07
231,334	2959,6	2943,92
208,265	3280,5	3262,20
164,831	4110,0	4094,86
122,584	5471,7	5463,38
97,362	6791,2	6789,90
74,960	8680,3	8684,46
51,305	12291,5	12302,51
28,166	20619,0	20667,84
17,426	29792,2	29881,9
10,742	40186,0	40353,0
6,215	48256,0	49448,7
4,883	49985,0	51254,1
3,268	54244,1	56275,8
2,754	64350,1	66898,0

L'accordo fra i valori sperimentali e i valori calcolati può dirsi almeno discreto: esso sarebbe più che soddisfacente, se non si incontrassero notevoli divergenze alle più alte temperature sotto grandissime pressioni.

12. — Colla formola di Clausius si possono calcolare approssimativamente i valori degli elementi critici. Sebbene le più recenti esperienze inducano a ritenere che alla temperatura critica (definita dall'isotermica che non possiede più il tratto rettilineo) non si abbia l'uguaglianza di densità fra il liquido ed il vapore, tuttavia tale isotermica può sempre considerarsi come quella che presenta un punto d'inflessione, ove la tangente è parallela all'asse dei volumi. E allora si ha dalla formola di Clausius:

$$v_c = \alpha + 2\gamma;$$

$$\frac{m T_c^{-\mu} - n T_c^{\nu}}{T_c} = \frac{27}{8} R\gamma;$$

$$p_c = \frac{1}{8} \frac{R T_c}{\gamma};$$

dove $\gamma = \alpha + \beta$.

Sostituendo i valori sopra notati delle costanti, si ottiene

$$v_c = 4^{cc},525$$

$$T_c = 513^{\circ},1 \quad \text{(contata dallo zero assoluto)}$$

$$p_c = 48,096 \text{ mm.}$$

Dall'esperienza si era ottenuto

$$v_c = 4^{cc},38\,; \quad T_c = 514^{\circ},4\,; \quad p_c = 47.348 \text{ mm.}$$

L'accordo fra i risultati dell'esperienza e del calcolo può ritenersi assai buono.

13. — Un'altra verificazione della formola di Clausius si avrà dalla relazione:

$$R' = \frac{2153,05}{1,59479} = 1349,7$$

dove il numeratore: 2153,05 è il valore di R spettante all'aria, e 1,59479 è la densità teorica del vapore d'alcool.

Il valore di R' dato da questa relazione concorda bene con quello adoperato nella formola di Clausius.

14. — Ho finalmente calcolato anche pel vapore d'alcool il numero di gruppi molecolari di due molecole che nello stato di incipiente condensazione si possono formare alle diverse temperature. Tali numeri si trovano nella tabella seguente, e si riferiscono ciascuno a mille molecole semplici, ossia sono stati calcolati mediante la formola:

$$n = \frac{d_1 - d}{d} 1000\,;$$

dove n è il numero delle molecole doppie sopra mille molecole del vapore, e d e d_1 sono rispettivamente la densità teorica e la densità nel primo momento della condensazione:

Tabella P.

t	p	n
	mm.	
— 16°,24	4,00	4,5272
— 12 ,06	5,32	5,3675
— 8 ,54	6,84	6,1826
— 1 ,85	11,78	7,4367
+ 5 ,40	17,62	8,7159
8 ,75	22,42	9,7944
16 ,22	35,21	10,729
20 ,41	45,55	12,760
24 ,33	56,62	14,503
58 ,46	332,44	21,589
79 ,10	789,62	33,321
99 ,83	1694,00	48,677
134 ,86	4954,4	97,097
150 ,05	7401,2	143,32
178 ,41	14188,7	241,91
198 ,22	20604,0	352,28
215 ,64	29048,0	505,01
231 ,46	37432,0	768,15
239 ,52	44151,8	1008,9

La tabella mostra che il numero dei gruppi molecolari di due molecole che si formano nel vapore d'alcool nel primo momento della condensazione, cresce rapidamente colla temperatura quando questa è elevata; e che al di sopra della temperatura critica si debbono formare, per sufficienti compressioni, anche molecole triple, quadruple, ecc.

Conclusioni.

15. — Le esperienze riferite possono riassumersi nelle seguenti conclusioni:

1° La tensione del vapore d'alcool nel primo momento della condensazione, a temperature superiori ai 50° C., si manifesta alquanto più piccola della tensione massima dello stesso vapore: i rapporti fra le due tensioni tendono a diminuire man mano aumenta la temperatura. Invece il rapporto fra la differenza delle tensioni medesime e la corrispondente diminuzione di volume del vapore cresce colla temperatura.

2° Le tensioni massime del vapore di alcool sono bene rappresentate dalla formola di Biot, da —16° a +240° C.

3° I valori dei prodotti pv della pressione per il volume, spettanti allo stato di saturazione vanno dapprima aumentando col crescere della temperatura, fino a circa 140° C., e da questa temperatura in su vanno poi sempre diminuendo.

4° I coefficienti di dilatazione del vapore d'alcool sotto pressione costante aumentano col diminuire della temperatura e tanto più rapidamente quanto più il vapore si avvicina alla saturazione. Aumentando la pressione sotto cui trovasi il vapore, aumentano fra gli stessi limiti di temperatura i valori assoluti dei coefficienti, non che le loro variazioni.

5° I coefficienti di aumento di pressione per un dato volume, vanno diminuendo col crescere della temperatura. Man mano poi che i volumi diventano più piccoli, i valori assoluti di questi coefficienti divengono più grandi, e le loro variazioni si fanno più rapide.

6° Le differenze $\alpha = \frac{p_1 v_1}{pv} - 1$ (essendo $p_1 v_1$ spettante allo stato di gas e pv a quello di vapore) per ciascuna temperatura vanno aumentando di man in mano che il vapore si avvicina allo stato di saturazione; e alle diverse temperature, in prossimità della saturazione, essi vanno crescendo rapidamente coll'innalzarsi delle temperature stesse.

7° Anche per l'alcool, come per le sostanze da me precedentemente studiate, i prodotti pv spettanti al principio dello stato di gas vanno continuamente crescendo colla temperatura.

8° Il rapporto $\frac{p_1 v_1}{p'v' \sqrt{T}}$ della formola di Herwig (appartenendo $p_1 v_1$ allo stato di gas, e $p'v'$ a quello di vapore saturo) va per l'alcool via via diminuendo fino a circa 110° C., dove tocca un minimo; e quindi comincia a crescere.

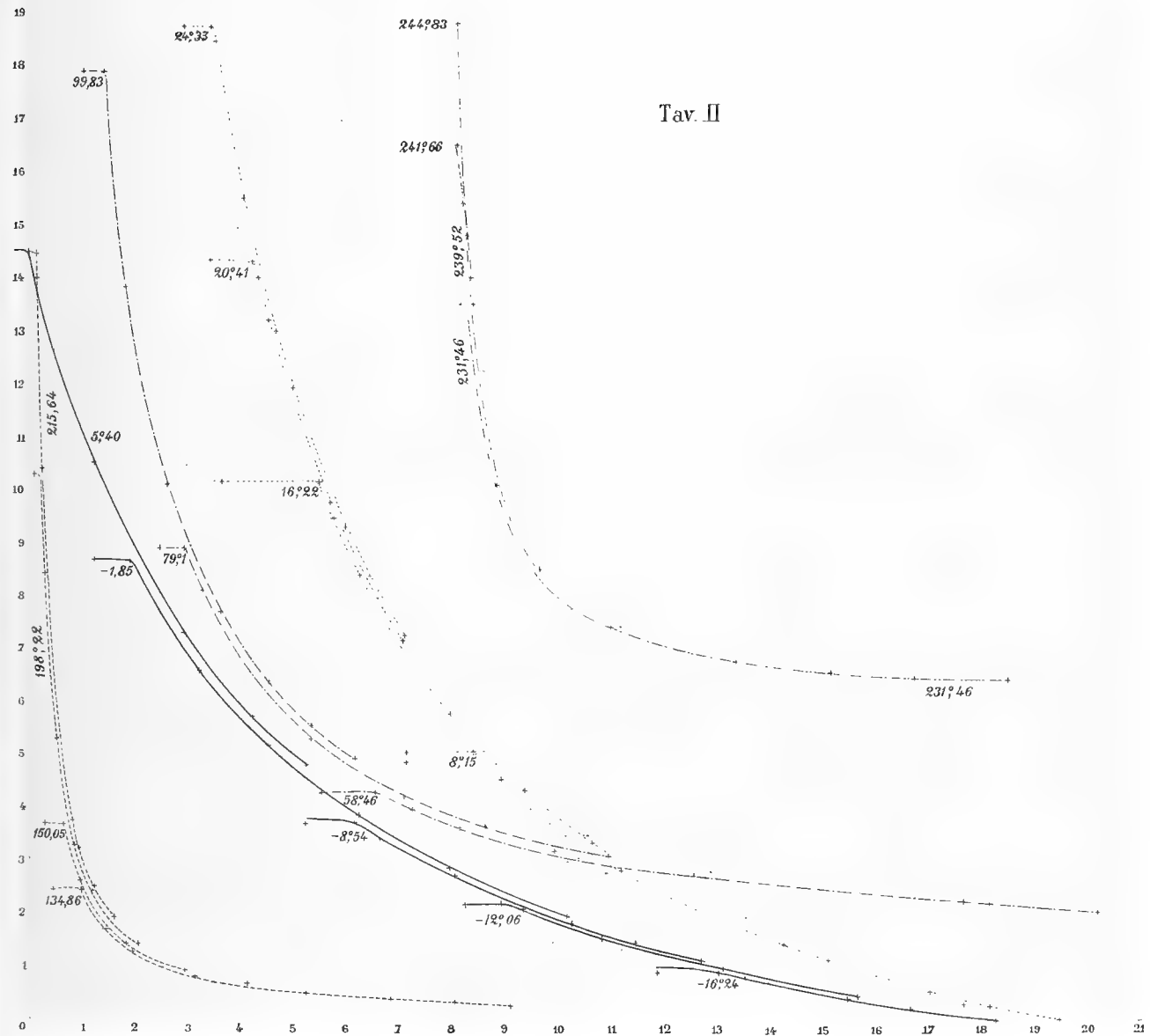
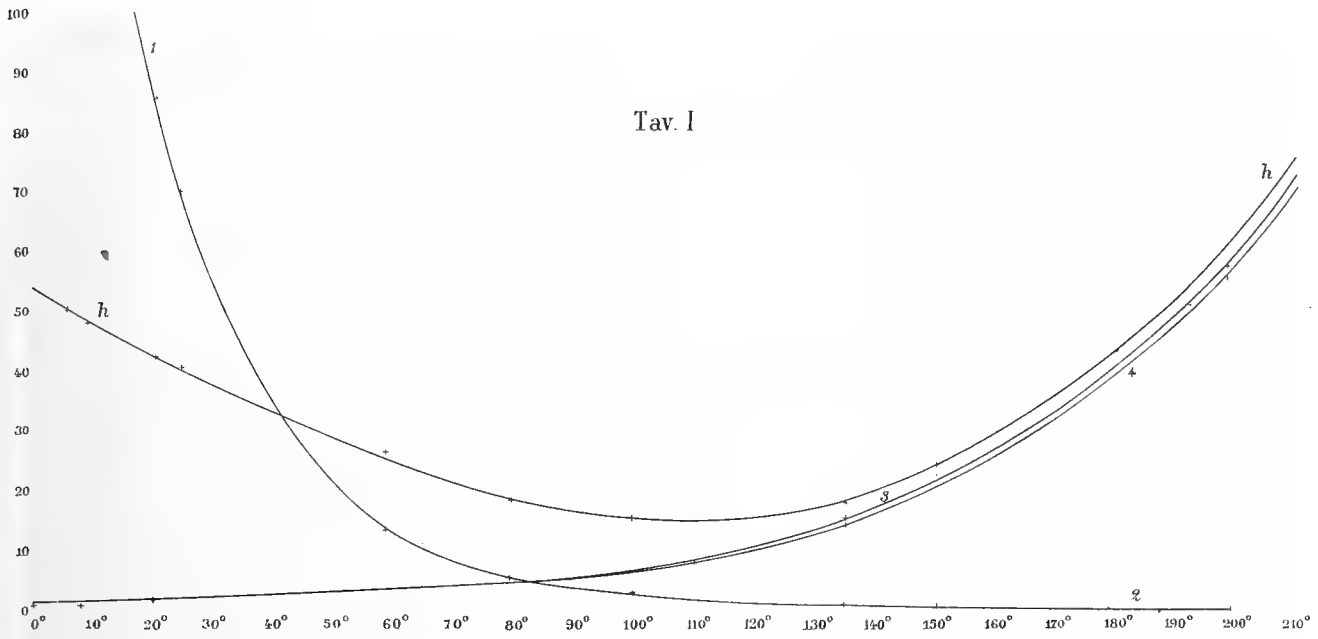
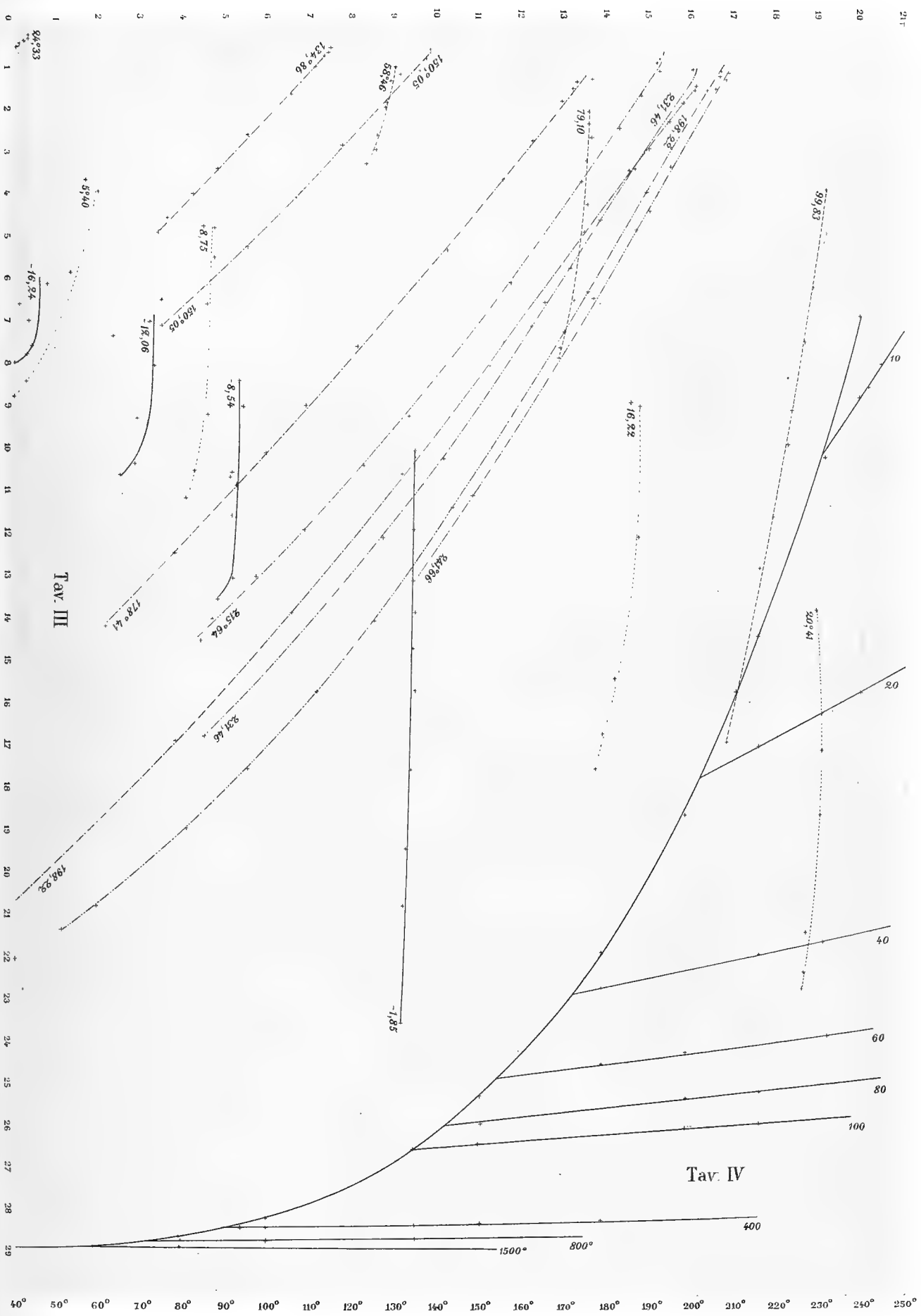
9° La formola di Clausius si adatta discretamente ai risultati delle esperienze sull'alcool, quando le si dia la forma, che le diedi nel caso degli altri vapori da me studiati, cioè

$$p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{mT^{-\mu} - nT^{\nu}}{(v + \beta)^2}.$$

10° Il numero dei gruppi molecolari di due o più molecole che si formano nel vapore d'acqua nel primo momento della condensazione cresce rapidamente colla temperatura quando questa è elevata; e per lo meno al di sopra della temperatura critica, si debbono per certo formare, a sufficienti compressioni, oltrechè molecole doppie, anche molecole triple, quadruple, ecc.

Istituto Fisico dell'Università di Padova, Aprile 1893.

Lit. Salussolia - Torino

Lit Salussolia -Torino

LATITUDINE DI TORINO

DETERMINATA COI METODI DI GUGLIELMO STRUVE

DA

F. PORRO

Approvata nell'Adunanza del 25 Giugno 1893.

INTRODUZIONE

Una *Comunicazione Preliminare* " sulle determinazioni di latitudine eseguite negli anni 1888, 1889, 1890 all'Osservatorio di Torino " è stata presentata all'Accademia nell'adunanza del 27 aprile 1890 ed accolta nel volume XXV degli Atti. La discussione definitiva dell'intero materiale d'osservazione, ivi annunziata, forma oggetto della Memoria che oggi sollecita il medesimo onore.

Alle 120 osservazioni allora pubblicate (ed eseguite tutte, secondo il metodo di *Guglielmo Struve,* con doppia inversione del cannocchiale) altre 12 qui si aggiungono, nelle quali la estrema vicinanza della stella allo zenit rese necessario l'uso del filo mobile, pure suggerito da Struve. Così l'intera determinazione fu condotta in conformità alle classiche norme dettate dal grande astronomo di Dorpat, e può considerarsi come un modesto, ma sincero omaggio che io sono lieto di rendere a tanto maestro, mentre della sua nascita si commemora solennemente il centesimo anniversario.

Ben sessantotto osservazioni mancano ad esaurire il programma prestabilito. Otto di esse, tutte relative alla stella ψ *Ursae majoris,* che culmina circa due minuti d'arco al Nord dello zenit, furono eseguite nel 1888 all'istrumento Repsold C della Commissione Geodetica, ma non poterono poi essere ridotte, essendosi guastato il reticolo prima che io ne avessi compiuto il necessario studio. Alle altre ho rinunziato per tre motivi, che non credo inutile esporre. Anzitutto me ne distolse la lunga interruzione dovuta alle misure astronomiche e geodetiche dell'azimut assoluto di Monte Vesco, che mi occuparono dall'aprile 1890 al settembre 1891. Ultimate queste, avrei potuto ritornare alla latitudine, se non me lo avesse impedito lo stato di quasi assoluta rovina del Cupolino Occidentale, destinato a proteggere la stazione. A stento si riuscì dal 1885 in poi a riparare dalle intemperie gli strumenti collocati in questo Cupolino, che ora va in isfacelo, come del resto più o meno tutta la vecchia ed infelice costruzione del Plana; collocarvi adesso uno strumento delicato come il nostro Repsold sarebbe un'imprudenza che io non oso commettere. Così l'Osservatorio di Torino è costretto a tenere nelle casse l'unico apparecchio atto ad una ricerca astronomica di alta precisione!

Il terzo motivo che mi ha indotto a sospendere le determinazioni merita maggiore spiegazione, perchè si connette ad una questione astronomica di grande attualità ed importanza. È noto come nel 1888 il signor Küstner, astronomo a Berlino (ora meritamente chiamato a Bonn quale successore di Argelander e di Schönfeld), abbia pubblicato un poderoso lavoro, avente per oggetto una nuova determinazione della costante dell'aberrazione (1). Ritiene il Küstner (e ne discusse profondamente le ragioni) che la forte discordanza del valore da lui ottenuto, rispetto a quelli determinati da Struve e da Nyren a Pulkova, non possa attribuirsi ad altra causa, che ad un leggero spostamento dell'asse terrestre nell'interno del globo, per il quale la latitudine di Berlino fu per due decimi di secondo inferiore nella primavera del 1885 di quanto fu nella primavera precedente. Un simile risultato non era nuovo, perchè già molti astronomi, segnatamente italiani, avevano discusso le possibilità teoriche di un movimento relativo delle verticali e dell'asse di rotazione della Terra, dovuto all'influenza delle azioni geologiche e meteorologiche; e non erano mancati indizi di effettive sensibili variazioni in molte serie di osservazioni di latitudine, fra le quali meritano speciale menzione quelle del Nobile a Capodimonte (2). Ad ogni modo il risveglio nelle ricerche teoriche e pratiche su tale importantissimo problema data dalla pubblicazione del Küstner, e dalla conseguente deliberazione dell'Associazione Geodetica Internazionale di istituire un sistema di osservazioni contemporanee in differenti punti sopra la superficie del globo, eseguite con rigorosa uniformità di metodo e con tutte le cautele atte ad eliminare le cause di errore. Dalla prima serie di tali osservazioni concordate risultò una diminuzione di circa 0″,5, riconosciuta simultaneamente a Berlino, a Potsdam ed a Praga fra il settembre 1889 ed il febbraio 1890; mentre la seconda serie, nella quale era inclusa una stazione molto lontana in longitudine dalle tre ora citate (Honolulu nelle isole Sandwich) rivelò in questa un andamento della latitudine affatto opposto a quello ottenuto nelle altre, confermando così l'ipotesi di un effettivo spostamento dell'asse di rotazione entro la massa del globo.

Con rapidità veramente americana il dott. S. C. Chandler ha approfittato di queste scoperte per raccogliere e discutere in una serie di articoli dell'*Astronomical Journal* tutte le più importanti determinazioni di latitudine eseguite dalla metà del secolo scorso in poi da molti astronomi con vari metodi e con diversi strumenti in differenti Osservatorii; ed il risultato mirabile cui è giunto si riassume nelle due leggi seguenti, da lui enunciate nel settimo de' suoi articoli (3):

“ 1. La variazione osservata della latitudine è la curva che risulta da due flut-
“ tuazioni periodiche sovrapposte l'una all'altra. La prima di esse, e generalmente
“ la più considerevole, ha un periodo di circa 427 giorni, ed una semiamplitudine di
“ circa 0″,12. La seconda ha un periodo annuo, con un'ampiezza variabile da 0″,04
“ a 0″,20 durante l'ultimo mezzo secolo. Durante un'epoca intermedia di questo

---

(1) *Neue Methode zur Bestimmung der Constante der Aberration nebst Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Polhöhe* (Berlin 1888, in-4°).

(2) Una estesa bibliografia di quanto si è pubblicato sull'argomento prima del 1890 si trova a pagina 449 del tomo VI del *Bulletin Astronomique.*

(3) “ Astronomical Journal „, N. 277, Vol. XII, 1892 novembre 4.

" intervallo, caratterizzata all'ingrosso come compresa fra il 1860 e il 1880, prevalse
" il valore rappresentato dal limite inferiore, ma prima e dopo queste date, il superiore. Il minimo ed il massimo di questa componente annua della variazione accadono, sul meridiano di Greenwich, circa dieci giorni avanti, rispettivamente, agli equinozi di primavera e di autunno, e il suo annullarsi prima dei solstizi di altrettanto.

" 2. Come risultante di questi due movimenti la variazione effettiva della latitudine è soggetta ad una alterazione sistematica in un ciclo della durata di sette anni, che risulta dalla commensurabilità dei due periodi. Secondo che essi cospirano od interferiscono, l'ampiezza totale varia fra un massimo di due terzi di secondo, ed un minimo che, generalmente parlando, non è superiore a pochi centesimi di secondo ".

Non è questo il luogo di investigare le ragioni teoriche che si possono addurre a spiegazione di queste singolari variazioni. Il Newcomb (1) ed il Gylden (2) hanno ripreso in esame la teoria del movimento dell'asse istantaneo di rotazione della Terra intorno all'asse di massimo momento od asse d'inerzia; ed hanno trovato che il classico periodo di 305 giorni, stabilito da Eulero nell'ipotesi dell'assoluta rigidità della Terra, si può aumentare sino a differire di pochissimo dal periodo del Chandler (427 giorni), quando a quell'ipotesi inammessibile altre se ne sostituiscano, più consentanee alle nozioni che la geografia fisica possiede (3). D'altra parte il periodo secondario di un anno che si sovrappone al primo trova la sua spiegazione ovvia in fenomeni aventi lo stesso periodo, come sarebbero ad esempio i fenomeni meteorologici. Che poi l'una e l'altra variazione siano dovute ad un effettivo spostamento dell'asse istantaneo entro il globo, e non ad un trasporto del polo astronomico (e quindi di tutta la Terra insieme co' suoi poli) è ingegnosamente dimostrato dal Chandler col mettere in evidenza l'accordo delle determinazioni assolute colle relative

Quanto alle variazioni secolari, che furono le prime in ordine di data ad essere sospettate (4), gli ultimi risultati delle ricerche del Chandler e delle conclusioni teoriche del Newcomb e del Gylden si accordano nel dimostrarle affatto problematiche; nè gli argomenti dati dal Comstock nell'ultimo volume dell'*Astronomical Journal* (passim) sembrano resistere alle acute obbiezioni del Chandler.

Da questi cenni sommarii sulla storia della questione nell'ultimo quinquennio, appare chiaro che lo stato delle cose ha subìto una radicale mutazione dal giorno in cui comparve la mia Comunicazione Preliminare ad oggi; ed a questa mutazione

---

(1) *On the Dynamics of the Earth's Rotation, with respect to the Periodic Variations of Latitude* (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. LII, March 1892).

(2) *Ueber die Erklärung der periodischen Veränderungen der Polhöhen* (Astronomische Nachrichten, N. 3157).

(3) È curioso notare che il periodo di Chandler supera la durata di una rivoluzione della Terra esattamente di quanto questa supera il ciclo euleriano.

(4) Fergola, *Determinazione novella della latitudine del R. Osservatorio di Capodimonte* (Napoli, 1872). A proposito di questa Memoria scrive il D'Abbadie nel nono volume del *Bulletin Astronomique:* " C'est peut-être à M. Fergola, astronome de Naples, que les historiens futurs de la Géodésie " décerneront l'honneur d'avoir mis en question l'invariabilité attribuée aux latitudes terrestres " quand on les détermine par l'observation des astres; il a certainement le mérite d'avoir porté " dernièrement cette affaire à l'ordre du jour et l'on s'en préoccupe enfin ".

corrispondere doveva un cambiamento nei criteri ai quali si ispirava il mio lavoro. Già in quella Comunicazione ho esposto per quali motivi non era possibile far concorrere l'opera mia (iniziata con più modeste intenzioni) alla ricerca delle leggi di variazione dell'altezza del polo, che allora erano affatto sconosciute; ora, dopo che una rappresentazione empirica di notevole precisione ci fa conoscere (appunto per l'epoca abbracciata dalle mie osservazioni) l'ampiezza ed il periodo di quelle oscillazioni, il contributo delle mie misure, eseguite nelle condizioni più sfavorevoli, non potrebbe essere che illusorio. Senza discutere se variazioni superiori (e spesso doppie e triple) dell'amplitudine massima determinata dal Chandler trovino o non trovino la loro giustificazione in cause più o meno conosciute di errori sistematici locali, strumentali o personali, credo onesto dichiarare francamente che serie di latitudine affette da variazioni così cospicue *non debbono* contribuire allo studio delle variazioni realmente spettanti a spostamenti del polo. Come ben nota il Chandler in una sua Nota successiva alle già citate, le variazioni periodiche della latitudine rimettono in questione molti valori numerici ritenuti come fondamentali per l'astronomia, primo fra tutti quello della costante di aberrazione; ed il voler fare concorrere una serie di latitudine allo studio delle variazioni equivale al farla pure concorrere simultaneamente alla ricerca di questa costante, della parallasse delle stelle osservate e di altre minute correzioni del medesimo ordine di grandezza, legate fra loro da equazioni di condizione. Si vede quindi che lo studio di quelle variazioni è ormai diventato uno dei problemi più delicati dell'astronomia fondamentale, riservato a quei fortunati che non hanno una stazione a 42 metri sul suolo, circondata da vie frequentatissime, in una piazza percorsa da vetture, da carri e da tramways a vapore. Quand'anche le mie condizioni d'osservazione fossero meno sfortunate, non sarebbe quello un lavoro da intraprendersi così per incidenza, come corollario di altro lavoro meno preciso e meno importante!

Ma se ho creduto conveniente di rinunziare all'attraente speranza di poter dire anch'io una parola nell'argomento oggi di moda, non ritenni poi inutile di tener conto per il mio scopo più modesto dei risultati già raggiunti da altri. Prescindere dai risultati del Chandler non è più permesso; fortunatamente la sua formula empirica si applica all'epoca delle mie osservazioni meglio che ad ogni altra, grazie alla influenza predominante che nel determinarla ebbero le due serie di osservazioni corrispondenti istituite dall'Associazione Geodetica intorno all'epoca stessa. Come dunque ho preso per la mia determinazione le declinazioni dal *Berliner Jahrbuch,* l'aberrazione da Struve, e così via, così mi parve consentaneo al carattere relativo della determinazione stessa prendere le variazioni della latitudine dal Chandler. Dirò a luogo opportuno come il calcolo sia stato effettivamente condotto.

Ritornando alle osservazioni propriamente dette ed ai metodi di riduzione, esporrò nelle due parti che seguono ordinatamente ciò che è necessario a dar ragione dei risultati, destinando la prima parte alle osservazioni fatte col metodo di doppia inversione e la seconda alle rimanenti, fatte col filo mobile. Nella terza parte saranno raccolti e discussi i risultati definitivi.

Debbo qui una parola di sincero ringraziamento ai signori ing. Tomaso Aschieri e dott. Alberto Manaira, che mi coadiuvarono efficacemente nelle riduzioni. L'opera dell'ultimo in particolare mi fu veramente preziosa.

PARTE PRIMA

Osservazioni eseguite col metodo dell'inversione su entrambi i verticali.

Poco ho da aggiungere circa queste osservazioni a quanto ho detto nella Comunicazione Preliminare, che appunto ad esse è destinata. Tutti i trattati di astronomia contengono un'esposizione del metodo di Struve, e sarebbe affatto superfluo riportarla. Ciò che nessuno ha messo in evidenza, e che mi sembra meriti essere detto e ripetuto, è l'incontestabile superiorità di questo metodo sopra ogni altro che si possa applicare in osservazioni allo strumento dei passaggi in primo verticale. Tutta la genialità del creatore di Pulkova si è trasfusa in questa pur semplice e, quasi direi, ovvia modificazione del metodo di Bessel; eppure ancor oggi gli astronomi tedeschi (ed anche italiani) vanno in cerca di ragioni più o meno fondate per non abbandonare le norme dettate dal grande maestro di Königsberg. L'Albrecht (al quale nessuno può certo negare profonda competenza in materia) scrive a questo proposito le seguenti parole (1):

" Rispetto alla bontà di questo procedimento a paragone di quello dianzi accen-
" nato, si deve riconoscere un reale inconveniente nella grande molteplicità del
" numero delle inversioni, perchè in un caso simile l'ipotesi della invariabilità del-
" l'azimut, che per osservazioni di questa natura è condizione indispensabile, è molto
" meno garantita, che nel modo di procedere, per il quale il numero delle inversioni
" è ridotto ad una o due per sera ".

Questa obbiezione dell'illustre osservatore prussiano, ribadita da tutti coloro che si trovarono a dar la preferenza al metodo di Bessel sopra il metodo di Struve, mi pare non giustificata. Ammetto con lui che ogni inversione disturbi l'azimut dell'istrumento, e quindi che il numero delle inversioni debba essere ridotto al minimo, sempre quando il vantaggio di questa precauzione non superi il danno dovuto ad altre cause. Ma quando — come è raccomandato nelle Istruzioni dettate dallo stesso Albrecht (2) — per evitare scosse all'istrumento lo si lascia per alcune ore di seguito nella medesima posizione, osservando successivamente i passaggi di parecchie stelle ad un Verticale, per poi riosservarli a cannocchiale invertito nell'altro Verticale, mi domando se le scosse accidentali che l'istrumento riceve durante tutte queste operazioni non siano più nocive alla stabilità azimutale di quella scossa dovuta alla

(1) *Formeln und Hülfstafeln für Geographische Ortsbestimmungen* — Zweite Auflage (Leipzig, 1879).

(2) *Astronomisch-Geodätische Arbeiten in den Jahren 1881 und 1882* (Publication des k. Preuss. Geodätischen Institutes. Berlin 1883; pag. 9).

inversione, che un osservatore scrupoloso e prudente, adoperando un istrumento solido e munito di un buon apparecchio di rovesciamento, può rendere piccola quanto si vuole. Si noti poi che un brusco leggerissimo spostamento in azimut per effetto dell'inversione può contribuire a far variare apparentemente l'errore di collimazione, e può quindi eliminarsi per effetto di simmetria quasi completamente, come le considerazioni seguenti mostrano senz'altro.

Uno spostamento in azimut per effetto di scosse dovute all'inversione può ascriversi a due cause, un urto ricevuto dai sostegni ed uno spostamento effettivo dell'asse di rotazione. Questa, che, se l'istrumento è sorretto da solidi piedritti, sarà inevitabilmente assai maggiore dell'altra causa, si comporrà alla sua volta di due cause, una accidentale, che varierà da caso a caso senza legge alcuna, ed una costante, dovuta alle irregolarità di figura dei perni e dei guanciali, che agirà in senso inverso nelle due inversioni necessarie per ogni stella, secondo il metodo di Struve, e che sarà l'unica alla quale sia applicabile una teoria. Esaminiamone l'effetto. Esso è di aumentare l'azimut di una piccola quantità α (e quindi di ritardare l'appulso ai singoli fili) per la seconda parte della osservazione ad Est e per la prima parte della osservazione ad Ovest. Detti t_1, t_2, t_3 e t_4 i quattro istanti degli appulsi, avremo per questa causa sostituito a t_2 e t_3: $t_2 - \alpha \operatorname{cosec} \varphi$, $t_3 - \alpha \operatorname{cosec} \varphi$, dove il termine correttivo sarà certamente una piccola frazione di secondo siderale, che potremo indicare con τ. Allora, se ricordiamo la formula che dà la latitudine

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \delta \sec \Delta \sec \sigma,$$

dove

$$\Delta = \frac{(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)}{4}, \quad \sigma = \frac{(t_4 - t_1) + (t_3 - t_2)}{4},$$

vediamo senz'altro che la doppia inversione elimina la correzione τ. L'effetto di questo errore sistematico rimane invece tutto quando si inverta una volta sola, nell'intervallo fra i passaggi ad Est e ad Ovest.

Che poi la parte accidentale si possa rendere piccola assai, quando si inverte, è cosa che non si può immediatamente dimostrare, senza lunghi calcoli sopra i risultati delle osservazioni. Fortunatamente mi è facile trovare altrove argomenti che confortano questa mia affermazione, così nel caso dell'istrumento Repsold C (che servì alla piccola serie gennaio-giugno 1888), come in quello del nuovo Repsold, adoperato dal novembre di quell'anno in poi. Il primo fu studiato in moltissime determinazioni della Commissione Geodetica, e segnatamente nella determinazione di azimut assoluto eseguita a Milano dal prof. Rajna (1); dell'altro mi resi ben conto nell'analoga determinazione a Torino (2). Già nelle operazioni del Rajna e nelle successive di longitudine le inversioni si sono moltiplicate senza scrupolo alcuno, e gli effetti ne furono tutt'altro che tali da diminuire la precisione dei risultati; ma nelle mie determinazioni di azimut sono arrivato al punto di invertire su ogni stella,

---

(1) *Azimut Assoluto del Segnale trigonometrico del Monte Palanzone sull'orizzonte di Milano* (Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano, N. XXXI).

(2) Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Torino, N. I.

portando il numero delle inversioni ad una ventina per sera, senza il menomo danno apprezzabile alla stabilità dell'istrumento, facilmente controllabile in osservazioni di questa natura. Un'altra conferma dell'innocuità assoluta delle inversioni si ha nell'uso ormai generale di eseguire le livellazioni con inversione dell'asse senza sollevarne il livello: data l'estrema mobilità di questo, e la squisita perfezione colla quale presentemente lo si lavora, esso dovrebbe rivelare ben gravi anomalie ad ogni inversione. Invece, come hanno mostrato molti osservatori (1), la determinazione dell'errore di inclinazione con inversione dell'asse presenta molto minori cause d'errore di quella con inversione del livello sui perni. Se adunque scomponiamo l'effetto dell'urto prodotto dall'inversione in due parti, troviamo che quella verticale (presumibilmente la più grande) è insensibile o quasi; e possiamo quindi inferirne che anche l'altra non sarà molto grande.

Rimossa (od almeno grandemente attenuata) l'unica obbiezione seria al metodo di Struve, non è chi non veda le forti ragioni che gli fanno avere la preferenza sopra il besseliano. E sono:

I. L'eliminazione rigorosa su ogni verticale delle distanze dei fili, dell'errore di collimazione e delle eventuali variazioni di questo col tempo (essendo ogni passaggio osservato in pochi minuti, durante i quali soltanto la collimazione si deve ritenere invariabile).

II. La tranquillità assoluta nella quale l'istrumento rimane durante l'intervallo fra il passaggio della Stella ad Est e ad Ovest; osservandosi ad una parte soltanto del reticolo, non è neppur necessario trasportare l'oculare successivamente innanzi ai fili colla vite di Maskeline.

III. La facilità e speditezza dei calcoli di riduzione.

IV. La semplicità colla quale si elimina l'errore di azimut, quando questo sia tanto considerevole da dover essere tenuto in conto. Basta infatti moltiplicare $tg\,\varphi$ per il coseno di $\alpha - \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4}$.

Premesse queste giustificazioni relative alla scelta del metodo (che sarebbero troppo prolisse veramente, se non fossero rese necessarie dall'opposizione che esso incontra ancor oggi), passiamo all'esame delle correzioni istrumentali.

Collimazione. — Questo errore si elimina, come vedemmo, da ogni passaggio osservato su di un verticale. Ad ogni modo, per curiosità, e per rendermi conto del suo effetto nelle poche osservazioni eseguite coll'altro metodo, non ritenni inutile determinarne alcuni valori, i quali mostrano colla loro costanza e regolarità di andamento le eccellenti condizioni del nostro Repsold da questo punto di vista, dovute, oltre che alla solida costruzione di ogni pezzo e dell'insieme, al felice accorgimento di collocare le viti di correzione dell'asse ottico non (come si usava dianzi) all'oculare, bensì nell'interno del cubo; di guisa che la correzione si fa toccando il prisma.

---

(1) Vedasi ad esempio la pag. 5 della Memoria di Rajna sulla “ Determinazione della Latitudine dell'Osservatorio di Brera in Milano e dell'Osservatorio della R. Università in Parma „ (Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano, N. XIX).

Ecco le collimazioni, calcolate dalle stesse osservazioni di latitudine mediante la formula (1):

$$\sin c = \sin \sigma \sin \Delta \cos \delta \sin \varphi:$$

Data	c.	Data	c.	Data	c.
1888 Novembre 25	$+52'',47$	1889 Febbraio 16	$-\ 8'',65$	1889 Maggio 31	$-\ 9'',12$
1889 Gennaio 7	$-16\ ,96$	19	$-\ 9\ ,45$	Ottobre 23	$-\ 3\ ,00$
19	$-\ 7\ ,54$	24	$-\ 8\ ,42$	Novem. 8	$-\ 3\ ,61$
27	$-\ 5\ ,19$	Marzo 14	$-\ 8\ ,51$	15	$-\ 5\ ,74$
31	$-\ 7\ ,73$	16	$-10\ ,62$	17	$-\ 8\ ,81$

Avverto che i due primi valori, troppo forti e discordi, appartengono al periodo di prova, dopo il quale le viti di correzione non furono più toccate.

Inclinazione. — La grande importanza che in tutte le determinazioni di latitudine spetta al livello, è inerente alla natura del problema; che si vuol conoscere in fatti se non la posizione della verticale rispetto alle direzioni fondamentali della sfera celeste? Io credo che tutti gli sforzi degli artefici e degli osservatori per fissare con esattezza la verticale senza ricorrere al livello a bolla d'aria (2) non abbiano ancora raggiunto il loro intento, anzi ne siano ben lontani; pur ammirando gli espedienti ingegnosissimi ideati a tale scopo, trovo che nelle mani del Küstner e degli altri astronomi di Berlino il livello ha dato recentemente risultati di alta precisione, che dimostrano ingiustificato o, quanto meno, prematuro l'ostracismo che gli si vuol dare. Nè mi sembra che procedimenti simili a quelli usati ora per il telescopio zenitale (e segnatamente l'uso di un livello di controllo) siano inapplicabili all'istrumento dei passaggi in primo verticale, dove l'errore delle livellazioni forma tanta parte dell'errore totale di una determinazione.

Nelle mie osservazioni ho cercato di eliminare tutte le cause perturbatrici delle indicazioni del livello; e, lasciando questo permanentemente appeso all'asse di rotazione, lo osservai con molta frequenza per ricavarne il valore possibilmente più esatto dell'inclinazione. Non di meno, debbo riconoscere che le condizioni della stazione mi impedirono di curare, come avrei voluto, questo elemento; credo anzi che l'incertezza di esso e delle variazioni accidentali dell'azimut (delle quali parlerò in seguito) abbia la massima parte nelle anomalie presentate dalle osservazioni. Nella discussione finale mostrerò come l'imperfetta conoscenza degli errori strumentali spieghi il valore relativamente forte di alcune divergenze di valori singoli dalla media; per ora mi

(1) Questa formula è valida quando l'inclinazione b e l'azimut k si ritengano zero. L'errore che si commette trascurando queste correzioni strumentali è dato da

$$-b \sin 1'' \cos \delta \cos \varphi \sin \Delta + k \sin 1'' \cos \delta \cos \sigma \sin \Delta,$$

ed è quindi trascurabile affatto.

(2) Scrive il D'Abbadie (Bulletin Astronomique, IX, pag. 93): " L'emploi du niveau à bulle d'air " doit être exclu désormais de toutes les observations astronomiques où l'on voudra atteindre la " dernière limite de l'exactitude ".

limito ad esprimere la mia convinzione che tutte queste minute cause d'errore, trattate come accidentali, abbiano potuto compensarsi nella media finale.

Il valore di una divisione angolare del livello annesso al Repsold C risulta dalle misure eseguite sull'esaminatore della Specola di Milano nel corso dell'anno 1885 per opera del prof. Rajna e mia. I risultati di queste misure sono rappresentati (1) dalla formula:

$$(1) \qquad 1^p = 1'',5300 + 0'',0046\,(l - 35^p,0),$$

dove l rappresenta la lunghezza della bolla (in divisioni del livello). Da una comunicazione posteriore del medesimo collega Rajna risulta che anche le determinazioni fatte nell'estate 1888 (quando l'istrumento fu adoperato nella determinazione della differenza di longitudine Milano-Napoli) diedero valori quasi identici. Coi risultati della formula (1), tenendo conto della lunghezza della bolla per calcolare il termine dipendente dalla temperatura, si sono ridotte tutte le inclinazioni determinate fra il gennaio ed il giugno 1888.

Quanto al nuovo Repsold, ecco i risultati delle determinazioni eseguite in parecchie occasioni all'Osservatorio di Torino:

Data			Temperatura	Valore di una parte	Osservatore
1888	Novembre	12,13	+ 2°,8	1'',7235	Porro
1889	Aprile	12-16	+ 14 ,9	1 ,6948	Aschieri
1890	Giugno	15-17	+ 23 ,0	1 ,7019	Porro
1891	Ottobre	15-16	+ 7 ,0	1 ,6960	Rizzo
1891	Dicembre	13	+ 2 ,0	1 ,7050	Rizzo

Se si pensa che queste determinazioni vennero eseguite in anni ed in stagioni differenti, da tre diversi osservatori, con due diversi esaminatori (v. le mie citate memorie sulla latitudine di Torino e sull'azimut di Monte Vesco), e che fra il 1890 e il 1891 fu cambiato il liquido nella bolla, si trova che il valore medio 1'',71, adottato per calcolare tutte le osservazioni di latitudine fatte a questo strumento, non si può ragionevolmente ritenere errato di più di un centesimo di secondo.

Nella prima serie la somma delle inclinazioni positive risultò di 8'',057, quella delle inclinazioni negative di 12'',501; abbiamo un'eccedenza negativa di 4'',444, ripartita sopra 16 osservazioni.

Invece nella seconda serie si ebbe una somma di inclinazioni positive uguale a 102'',056 ed una somma di negative uguale a 68'',965: differenza positiva 33'',091, che si riparte sopra 104 osservazioni.

Nell'uno e nell'altro caso sono osservate mediocremente le due prescrizioni di tenere l'inclinazione possibilmente piccola e di equilibrare possibilmente i suoi valori negativi e positivi. Meglio si sarebbe fatto, senza le oscillazioni periodiche ed acci-

(1) Porro, *Determinazione della latitudine della Stazione Astronomica di Termoli mediante passaggi di stelle al primo verticale* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXII, adunanza del 20 febbraio 1887).

dentali del livello, dovute all'ubicazione; ad ogni modo, data la cura colla quale si è studiato l'uno e l'altro livello, si può essere certi che la latitudine non può riuscire errata, per un errore nella conversione delle letture in arco, di più di qualche millesimo di secondo.

Azimut. — La correzione dovuta all'azimut non fu applicata alle osservazioni pubblicate nella *Comunicazione preliminare.* Avendo poi riconosciuto che il suo effetto doveva essere sensibile, sopratutto per il periodo maggio-giugno 1888, nel quale, non so come, inavvertentemente lasciai l'istrumento molto fuori dal Primo Verticale, mi decisi a calcolarla con rigore nel seguente modo.

Il logaritmo volgare di tg φ deve essere sommato con

$$\log \cos \left[\alpha - \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)\right],$$

essendo t_1, t_2, t_3, t_4 i tempi degli appulsi, corretti per l'inclinazione e per l'errore dell'orologio. E perchè quel coseno è molto vicino all'unità, si potrà utilmente invece sottrarre il logaritmo della secante. Questo termine negativo, in unità dell'ultima decimale, è d'altra parte:

$$d \log \operatorname{tg} \varphi = \frac{2M}{\sin 2\varphi} d\varphi, \text{ essendo M il modulo dei logaritmi volgari,}$$

donde

$$d\varphi'' = \frac{d \log \operatorname{tg} \varphi}{2M} \frac{\sin 2\varphi}{\sin 1''} = [5{,}3756096]\, d \log \operatorname{tg} \varphi = 237490{,}44\, d \log \operatorname{tg} \varphi.$$

Data quindi, in unità della settima decimale, la correzione da applicarsi a log tg φ (sempre negativa, ed uguale a $\log \sec [\alpha - \frac{1}{4}(t_1+t_2+t_3+t_4)]$, la correzione (pure negativa) della latitudine si ottiene senz'altro, espressa in secondi, con una semplice moltiplicazione per quel coefficiente costante.

L'esecuzione di questo calcolo per ciascuna delle 120 stelle ha potuto dare una idea degli spostamenti dell'istrumento in azimut. Detto t il valore della media dei quattro appulsi corretti come ho detto, l'andamento dei valori di $\alpha - t$ dà indizio di forti sbalzi, più accidentali che progressivi, che si sottraggono fatalmente ad ogni previsione e ad ogni interpretazione, e formano il più efficace commento alle mie geremiadi sulla instabilità della Specola di Torino.

Formando le differenze fra valori successivi di $\alpha - t$ in una medesima sera, ho trovato i seguenti numeri, che rappresentano le variazioni dell'azimut; per gli opportuni confronti ho posto a fronte anche le variazioni corrispondenti dell'inclinazione.

1888		$\Delta(\alpha - t)$	Δi	1889		$\Delta(\alpha - t)$	Δi
Gennaio	19	$+ 2^s,23$	$- 0'',016$	Gennaio	8	$- 0^s,05$	$+ 0'',305$
Giugno	5	$- 0,64$	$- 0,914$		17	$+ 0,16$	$- 0,666$
	5	$- 0,44$	$- 1,203$		18	$+ 0,12$	$+ 0,301$
	8	$- 0,49$	$- 1,553$	Marzo	6	$+ 0,40$	$- 0,169$

1888		$\Delta(\alpha - t)$	Δi	1889		$\Delta(\alpha - t)$	Δi
Dicembre	1	— 1 ,43	+ 0 ,996	Marzo	12	— 0 ,20	+ 0 ,056
	1	— 0 ,10	+ 0 ,304		17	+ 0 ,41	— 0 ,362
	3	— 0 ,11	+ 0 ,602		25	+ 0 ,18	— 0 ,183
	7	— 0 ,11	+ 0 ,469	Giugno	6	+ 0 ,04	— 0 ,866
	10	— 0 ,16	+ 0 ,564		6	+ 0 ,92	— 1 ,039
					15	+ 0 ,09	— 1 ,482
					17	+ 0 ,48	— 0 ,688
					19	— 0 ,93	— 0 ,903
				Ottobre	23	— 0 ,65	+ 0 ,208
				Novembre	8	— 0 ,49	+ 0 ,124
					9	— 0 ,81	+ 0 ,236

Grandi conclusioni non si possono ricavare da questi numeri: irregolari tutti, però dinotanti coll'aggruppamento di certi segni la persistenza di certe cause ad operare per qualche tempo in una determinata direzione.

Passiamo ora alla esposizione dei risultati. Nel primo e più lungo quadro che segue sono dati, stella per stella, i tempi dei quattro appulsi, e la latitudine che se ne è ricavata, filo per filo, calcolata colle note tavole di Otto Struve (1), senza tener conto dell'andamento dell'orologio e degli errori strumentali. Ogni osservazione consta per lo più di trentadue appulsi ad otto fili; il quadretto relativo è seguìto dal valore corrispondente di $\alpha - t$ in secondi di tempo, dalla delinazione apparente della stella osservata e dall'error medio ϵ_1, calcolato esclusivamente in base all'accordo dei fili. Si vedrà nell'ultima parte di questo lavoro che l'error medio ϵ di un'osservazione, calcolata in base all'accordo dei valori di latitudine forniti dalle diverse osservazioni di una medesima stella, è uguale a $\pm 0'',405$, mentre in generale le ϵ_1 si aggirano intorno a $\pm 0'',100$: dunque di gran lunga la parte maggiore di ϵ è imputabile all'imperfetta correzione degli errori strumentali, e solo dal numero considerevole delle osservazioni, distribuite in anni e mesi differenti, si può sperare una compensazione di questi errori.

Il secondo quadro raccoglie i valori medii della latitudine φ' dati da ciascuna stella, le correzioni relative all'inclinazione i dell'asse e all'azimut istrumentale, il termine dovuto all'andamento dell'orologio (che si è dedotto a vista da alcune tavolette calcolate per le singole stelle secondo le norme date a pag. v dell'introduzione alle citate tavole di Struve) e finalmente il valore concluso della latitudine φ.

Come ho detto nella *Comunicazione preliminare*, le declinazioni si sono dedotte esclusivamente dal *Berliner Jahrbuch:* per interpolazione dalle effemeridi decadiche quelle delle Fondamentali di Pulkova, calcolando la riduzione al luogo apparente quelle delle altre stelle (*Zusatz-Sterne*). Furono calcolati rigorosamente i piccoli termini della nutazione lunare.

---

(1) *Tabulae Auxiliares ad transitus per planum primum verticale reducendos inservientes* — Edidit Otto Struve, Speculae Pulcovensis director (Petropoli, 1868).

QUADRO PRIMO

TEMPI DEGLI APPULSI E LATITUDINI DEDOTTE

1888 Gennaio 19 — β *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$5^h\ 21^m\ 4^s.63$	$5^h\ 41^m\ 12^s.27$	$6^h\ 0^m\ 40^s.39$	$6^h\ 20^m\ 55^s.54$	45° 4′ 9″.98
21 58 .63	39 9 .25	2 50 .41	20 9 .03	8 .10
22 50 .64	37 23 .24	4 37 .92	19 22 .03	7 .15
24 19 .65	34 20 .22	7 40 .44	17 40 .52	9 .74
25 12 .66	33 1 .71	8 57 .45	16 48 .01	9 .14
26 8 .67	31 45 .70	10 16 .46	15 53 .00	9 .76

$\alpha - t = -\ 8^s.89$ $\delta = 44^\circ\ 56'\ 3''.42$ $\epsilon_1 = 0''.4595$

1888 Gennaio 19 — λ *Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$8^h\ 50^m\ 23^s.50$	$8^h\ 57^m\ 59^s.07$	$11^h\ 21^m\ 57^s.54$	$11^h\ 29^m\ 34^s.10$	45° 4′ 11″.40
50 42 .30	57 37 .56	22 18 .04	29 14 .59	9 .19
51 0 .01	57 18 .06	22 37 .65	28 56 .09	9 .29
51 32 .81	56 43 .76	23 12 .05	28 23 .99	8 .62
51 50 .71	56 24 .95	23 31 .05	28 6 .08	8 .41
52 8 .02	56 5 .85	23 50 .26	27 49 .08	9 .74
52 26 .82	55 46 .05	24 9 .56	27 30 .08	9 .43

$\alpha - t = -\ 6^s.56$ $\delta = 43^\circ\ 28'\ 13''.10$ $\epsilon_1 = 1''.4090$

1888 Gennaio 20 — β *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$5^h\ 20^m\ 57^s.00$	$5^h\ 41^m\ 0^s.22$	$6^h\ 0^m\ 38^s.84$	$6^h\ 20^m\ 40^s.51$	$45^\circ\ 4'\ 9''.16$
21 44 .51	38 52 .20	2 48 .36	19 53 .00	9 .26
22 33 .72	37 2 .68	4 34 .37	19 4 .49	9 .12
23 24 .53	35 24 .16	6 12 .38	18 12 .48	9 .14
24 14 .04	34 1 .14	7 35 .39	17 24 .47	9 .52
25 7 .05	32 40 .63	8 54 .40	16 30 .96	9 .52
26 1 .56	31 25 .62	10 8 .91	15 34 .45	9 .54
27 58 .58	29 12 .60	12 24 .93	13 39 .44	9 .45

$\alpha - t = - 5^s.27$ $\delta = 44^\circ\ 56'\ 3''.56$ $\epsilon_1 = 0''.2089$

1888 Gennaio 22 — β *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$5^h\ 19^m\ 19^s.50$	$5^h\ 47^m\ 8^s.25$	$5^h\ 53^m\ 40^s.30$	$6^h\ 21^m\ 45^s.33$	$45^\circ\ 4'\ 7''.70$
20 44 .72	40 44 .22	6 0 19 .35	20 21 .02	7 .34
21 32 .52	38 36 .70	2 28 .87	19 34 .01	7 .48
22 21 .83	36 47 .68	4 17 .89	18 44 .50	7 .28
23 11 .74	35 7 .16	5 55 .90	17 53 .99	8 .19
24 2 .05	33 48 .14	7 20 .11	17 2 .98	7 .36
24 55 .86	32 28 .13	8 38 .42	16 8 .97	7 .01
25 51 .07	31 13 .62	9 53 .13	15 14 .16	7 .24
27 46 .08	28 54 .60	12 7 .44	13 18 .45	8 .19

$\alpha - t = - 4^s.93$ $\delta = 44^\circ\ 56'\ 3''.83$ $\epsilon_1 = 0''.2311$

1888 Maggio 3 — 33 *Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 3^m\ 17^s.29$	$14^h\ 30^m\ 24^s.41$	$14^h\ 47^m\ 2^s.57$	$15^h\ 14^m\ 11^s.39$	$45^\circ\ 4'\ 8''.88$
3 55 .68	28 0 .20	49 29 .65	13 31 .17	9 .09
4 34 .12	26 7 .39	51 20 .97	12 53 .93	9 .21
5 57 .73	22 50 .31	54 37 .96	11 31 .45	9 .79
6 39 .20	21 28 .87	55 59 .28	10 48 .76	9 .60
7 22 .17	20 14 .36	57 17 .14	10 5 .71	9 .58
9 40 .16	16 48 .47	15 0 31 .99	7 48 .59	7 .95
10 29 .02	15 45 .43	1 42 .96	6 58 .29	9 .30

$\alpha - t = + 52^s.72$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 17''.16$ $\epsilon_1 = 0''.2441$

1888 Maggio 6 — *33 Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 3^m\ 20^s.57$	$14^h\ 30^m\ 35^s.16$	$14^h\ 46^m\ 56^s.58$	$15^h\ 14^m\ 11^s.39$	45° 4′ 7″.62
3 58 .13	28 8 .06	49 21 .53	13 34 .28	8 .69
4 36 .76	26 13 .97	51 15 .16	12 55 .12	8 .36
5 59 .39	22 57 .61	54 32 .89	11 31 .20	8 .55
6 41 .73	21 34 .59	55 56 .24	10 49 .27	8 .69
7 24 .69	20 19 .46	57 13 .82	10 6 .64	8 .79
8 9 .81	19 4 .69	58 27 .98	9 20 .43	8 .93
8 55 .49	17 57 .31	59 33 .98	8 36 .16	8 .81
9 41 .89	16 52 .81	15 0 38 .35	7 49 .36	8 .88
10 31 .75	15 50 .37	1 42 .35	7 0 .29	8 .93

$\alpha - t = + 52^s.08$ $\delta = 44° 53' 17''.98$ $\epsilon_1 = 0''.1250$

1888 Maggio 9 — *33 Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$14^h\ 7^m\ 48^s.40$	$14^h\ 19^m\ 29^s.40$	$14^h\ 57^m\ 50^s.79$	$15^h\ 9^m\ 32^s.31$	45° 4′ 8″.31
8 32 .80	18 19 .43	59 0 .37	8 44 .23	7 .83
9 19 .67	17 14 .56	15 0 7 .52	7 59 .07	8 .07
10 9 .24	16 11 .79	1 11 .39	7 11 .05	7 .71
10 58 .94	15 10 .31	2 10 .83	6 20 .76	7 .55

$\alpha - t = + 52^s.74$ $\delta = 44° 53' 17''.86$ $\epsilon_1 = 0''.1342$

1888 Maggio 25 — *33 Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$14^h\ 4^m\ 14^s.90$	$14^h\ 27^m\ 21^s.14$	$14^h\ 50^m\ 0^s.67$	$15^h\ 13^m\ 10^s.49$	45° 4′ 10″.00
4 59 .51	25 16 .82	52 4 .68	12 26 .61	10 .55
6 17 .17	22 26 .99	54 54 .97	11 8 .79	9 .81
6 59 .33	21 4 .59	56 16 .79	10 24 .88	10 .02
7 44 .05	19 49 .40	57 32 .57	9 40 .98	9 .79
8 29 .69	18 37 .71	58 42 .30	8 57 .60	10 .10
9 16 .13	17 30 .99	59 51 .50	8 10 .57	10 .24
10 2 .91	16 27 .87	15 0 55 .29	7 22 .64	10 .29
10 52 .84	15 25 .67	1 57 .43	6 33 .89	10 .60

$\alpha - t = + 45^s.72$ $\delta = 44° 53' 23''.08$ $\epsilon_1 = 0''.0970$

1888 Maggio 29 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
14h 59m 3s.38	15h 5m 12s.26	18h 4m 6s.18	18h 10m 13s.02	45° 4′ 10″.60
59 18 .34	4 56 .47	4 23 .02	9 58 .70	11 .10
59 34 .60	4 39 .93	4 38 .98	9 42 .48	9 .67
15 0 0 .54	4 11 .28	5 6 .93	9 16 .47	11 .17
0 15 .18	3 56 .74	5 23 .53	9 1 .86	11 .90
0 30 .17	3 41 .86	5 37 .60	8 49 .37	12 .29
0 43 .93	3 26 .76	5 51 .26	8 32 .59	10 .14
0 58 .90	3 11 .69	6 7 .69	8 19 .09	11 .98
1 14 .18	2 56 .57	6 22 .04	8 4 .12	10 .86
1 28 .79	2 41 .19	6 38 .07	7 50 .69	12 .38

$\alpha - t = + 44^s.88$ $\delta = 42^\circ\ 40'\ 8''.52$ $\epsilon_1 = 0''.1837$

1888 Giugno 2 — 33 *Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
14h 3m 44s.35	14h 30m 55s.79	14h 47m 3s.71	15h 14m 19s.87	45° 4′ 9″.14
4 23 .58	28 30 .42	49 30 .22	13 39 .69	8 .64
5 1 .60	26 36 .68	51 25 .32	13 1 .78	8 .86
6 26 .10	23 19 .14	54 46 .73	11 38 .48	9 .12
7 9 .07	21 55 .94	56 9 .19	10 56 .00	8 .95
7 52 .39	20 39 .42	57 26 .55	10 12 .86	9 .02
8 34 .59	19 31 .42	58 34 .16	9 29 .89	8 .64
9 23 .27	18 17 .34	59 47 .43	8 41 .02	8 .74
10 10 .16	17 12 .69	15 0 50 .99	7 53 .48	8 .74
11 0 .45	16 9 .80	1 54 .00	7 3 .72	8 .48
12 41 .04	14 15 .93	3 48 .83	5 25 .33	8 .79

$\alpha - t = + 46^s.41$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 24''.84$ $\epsilon_1 = 0''.0635$

1888 Giugno 5 — 33 *Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
14h 5m 1s.74	14h 27m 52s.28	14h 50m 32s.09	15h 13m 29s.99	45° 4′ 4″.88
5 45 .67	25 54 .42	52 35 .36	12 45 .72	4 .88
7 3 .88	23 2 .26	55 27 .60	11 27 .86	4 .67
7 47 .26	21 41 .36	56 50 .63	10 44 .11	4 .69
8 32 .42	20 25 .32	58 7 .79	9 58 .58	4 .50
9 16 .80	19 15 .18	59 11 .04	9 15 .56	4 .02

$\alpha - t = + 44^s.04$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 25''.62$ $\epsilon_1 = 0''.1312$

1888 Giugno 5 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
14h 59m 41s.50	15h 5m 29s.94	18h 4m 40s.38	18h 10m 29s.52	45° 4′ 6″.90
59 55 .35	5 16 .44	4 54 .87	10 15 .71	5 .93
15 0 24 .39	4 45 .33	5 25 .07	9 46 .83	6 .24
0 38 .53	4 30 .50	5 40 .16	9 32 .19	6 .19
1 21 .99	3 46 .07	6 24 .57	8 48 .83	5 .57
1 36 .60	3 31 .19	6 39 .93	8 34 .59	6 .14
1 51 .72	3 16 .37	6 55 .19	8 19 .83	5 .62

$\alpha - t = + 43^s.40$ $\delta = 42° 40' 10''.55$ $\epsilon_1 = 0''.2225$

1888 Giugno 5 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
19h 9m 6s.09	19h 32m 25s.28	19h 59m 44s.22	20h 23m 5s.24	45° 4′ 7″.76
9 43 .17	30 51 .14	20 1 16 .93	22 25 .47	6 .83
10 18 .78	29 25 .93	2 41 .16	21 49 .59	7 .88
11 39 .54	26 51 .17	5 17 .17	20 30 .46	7 .69
12 19 .59	25 42 .10	6 24 .73	19 49 .91	7 .38
13 0 .52	24 37 .54	7 29 .77	19 8 .68	7 .12
13 42 .89	23 43 .88	8 33 .13	18 26 .47	5 .50
14 25 .20	22 35 .09	9 32 .74	17 43 .18	7 .21
15 10 .14	21 37 .40	10 30 .97	16 59 .61	7 .33
15 54 .96	20 39 .29	11 27 .86	16 11 .97	7 .74
17 28 .40	18 57 .28	13 11 .26	14 40 .37	7 .43

$\alpha - t = + 42^s.96$ $\delta = 44° 51' 23''.06$ $\epsilon_1 = 0''.2001$

1888 Giugno 7 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
19h 10m 18s.27	19h 29m 28s.73	20h 2m 44s.39	20h 21m 54s.45	45° 4′ 10″.24
11 35 .97	26 54 .02	5 19 .55	20 34 .06	10 .33
12 18 .53	25 44 .89	6 27 .96	19 54 .65	9 .77
12 58 .37	24 39 .04	7 32 .69	19 13 .99	10 .10
13 40 .33	23 35 .89	8 33 .19	18 34 .77	10 .55
14 23 .73	22 35 .11	9 35 .52	17 48 .74	10 .29
15 8 .97	21 37 .71	10 32 .86	17 4 .83	9 .98
15 54 .38	20 41 .69	11 29 .10	16 18 .27	9 .88
17 26 .00	18 59 .41	13 12 .16	14 47 .98	10 .19

$\alpha - t = + 44^s.62$ $\delta = 44° 51' 23''.78$ $\epsilon_1 = 0''.0808$

1888 Giugno 8 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 59^m\ 26^s.37$	$15^h\ 5^m\ 47^s.63$	$18^h\ 4^m\ 25^s.26$	$18^h\ 10^m\ 46^s.17$	45° 4′ 8″.83
59 41 .03	5 32 .28	4 40 .85	10 31 .53	8 .60
59 55 .22	5 17 .77	4 55 .44	10 17 .65	8 .02
15 0 23 .71	4 47 .13	5 25 .21	9 48 .75	8 .07
0 37 .91	4 32 .40	5 40 .19	9 33 .10	6 .98
0 52 .63	4 17 .57	5 55 .29	9 19 .97	7 .76
1 6 .40	4 2 .98	6 9 .59	9 5 .35	7 .43
1 22 .07	3 46 .35	6 25 .06	8 50 .77	8 .21
1 36 .26	3 32 .76	6 40 .09	8 36 .00	7 .52
1 51 .00	3 16 .92	6 55 .26	8 21 .29	8 .29

$\alpha - t = + 44^s.86$ $\delta = 42° 40' 11''.53$ $\epsilon_1 = 0''.3032$

1888 Giugno 8 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$19^h\ 9^m\ 3^s.98$	$19^h\ 32^m\ 30^s.58$	$19^h\ 59^m\ 37^s.29$	$20^h\ 23^m\ 6^s.00$	45° 4′ 8″.24
9 40 .67	30 55 .36	20 1 14 .21	22 29 .31	8 .83
10 18 .29	29 32 .43	2 38 .42	21 52 .67	8 .67
11 37 .40	26 56 .57	5 13 .95	20 33 .62	8 .83
12 18 .27	25 46 .11	6 25 .79	19 52 .91	9 .07
12 58 .41	24 40 .58	7 31 .45	19 12 .23	9 .42
13 49 .99	23 40 .12	8 31 .58	18 31 .12	6 .26
14 22 .35	22 38 .11	9 33 .47	17 47 .08	9 .53
15 8 .08	21 41 .72	10 32 .00	17 2 .99	9 .07
15 54 .21	20 43 .47	11 28 .37	16 17 .24	9 .44
17 25 .99	19 1 .69	13 11 .95	14 43 .38	8 .86

$\alpha - t = + 44^s.37$ $\delta = 44° 51' 24''.06$ $\epsilon_1 = 0''.2735$

1888 Novembre 19 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$22^h\ 14^m\ 54^s.21$	$22^h\ 28^m\ 10^s.41$	$0^h\ 33^m\ 42^s.89$	$0^h\ 47^m\ 0^s.45$	45° 4′ 3″.40
15 24 .76	27 32 .78	34 20 .83	46 29 .61	4 .57
15 43 .47	27 10 .99	34 42 .14	46 11 .00	4 .12
16 8 .09	26 42 .40	35 11 .44	45 45 .99	4 .12
16 33 .08	26 12 .81	35 40 .84	45 20 .60	4 .62
16 52 .52	25 51 .44	36 1 .87	45 2 .38	4 .36
17 24 .27	25 15 .96	36 38 .11	44 30 .42	4 .36
18 28 .50	24 5 .09	37 49 .02	43 26 .62	5 .05

$\alpha - t = + 6^s.40$ $\delta = 44° 43' 16''.66$ $\epsilon_1 = 0''.1698$

1888 Novembre 21 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
22ʰ 15ᵐ 8ˢ.88	22ʰ 27ᵐ 15ˢ.47	0ʰ 34ᵐ 4ˢ.77	0ʰ 46ᵐ 12ˢ.50	45° 4′ 3″.86
15 27 .79	26 53 .40	34 26 .99	45 54 .27	4 .12
15 52 .44	26 24 .21	34 56 .08	45 28 .27	3 .71
16 17 .34	25 55 .93	35 25 .57	45 3 .29	3 .88
16 35 .77	25 34 .48	35 46 .59	44 45 .58	4 .62
17 8 .63	24 58 .48	36 22 .07	44 13 .51	3 .76
18 12 .56	23 48 .29	37 32 .86	43 9 .59	4 .07
18 53 .76	23 3 .90	38 17 .06	42 27 .93	4 .02
19 5 .96	22 51 .39	38 29 .68	42 17 .09	4 .45
19 50 .66	22 5 .28	39 15 .62	41 32 .31	3 .76

$\alpha - t = + 6^s.89$ $\delta = 43^\circ\ 43'\ 16''.88$ $\epsilon_1 = 0''.0969$

1888 Novembre 22 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
22ʰ 14ᵐ 26ˢ.13	22ʰ 27ᵐ 45ˢ.73	0ʰ 33ᵐ 17ˢ.19	0ʰ 46ᵐ 36ˢ.02	45° 4′ 4″.64
14 57 .81	27 8 .13	33 54 .11	46 4 .81	4 .31
15 15 .98	26 46 .49	34 16 .22	45 46 .20	4 .50
15 41 .19	26 17 .25	34 45 .33	45 21 .25	4 .38
16 6 .49	25 48 .17	35 13 .87	44 56 .22	4 .19
16 25 .27	25 27 .07	35 34 .65	44 37 .39	3 .64
16 57 .38	24 51 .50	36 11 .19	44 5 .57	3 .74
18 1 .03	23 41 .59	37 21 .88	43 1 .29	3 .74
18 42 .59	22 56 .68	38 5 .39	42 20 .36	3 .76
18 53 .09	22 44 .41	38 17 .66	42 9 .75	5 .02
19 38 .78	21 57 .69	39 5 .07	41 24 .03	4 .29

$\alpha - t = + 7^s.29$ $\delta = 43^\circ\ 43'\ 16''.97$ $\epsilon_1 = 0''.1324$

1888 Novembre 23 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
22ʰ 14ᵐ 16ˢ.07	22ʰ 27ᵐ 34ˢ.99	0ʰ 33ᵐ 6ˢ.93	0ʰ 46ᵐ 26ˢ.77	45° 4′ 5″.52
14 47 .75	26 57 .07	33 44 .75	45 55 .31	5 .67
15 6 .13	26 35 .64	34 6 .40	45 36 .51	5 .24
15 31 .39	26 7 .09	34 35 .36	45 11 .19	4 .45
15 56 .38	25 37 .79	35 4 .49	44 46 .59	5 .14
16 15 .16	25 16 .55	35 25 .55	44 27 .86	4 .90
16 47 .12	24 40 .56	36 1 .96	43 55 .87	5 .14
17 51 .14	23 29 .93	37 11 .76	42 52 .25	5 .24
18 32 .47	22 46 .29	37 57 .87	42 9 .71	5 .43
18 43 .48	22 33 .57	38 10 .00	41 57 .81	5 .55
19 28 .84	21 46 .96	38 55 .01	41 14 .72	5 .12

$\alpha - t = + 7^s.26$ $\delta = 43^\circ\ 43'\ 17''.06$ $\epsilon_1 = 0''.0946$

1888 Novembre 24 — α *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$19^h\ 56^m\ 49^s.73$	$20^h\ 27^m\ 33^s.81$	$20^h\ 38^m\ 2^s.25$	$21^h\ 8^m\ 56^s.78$	$45^\circ\ 4'\ 7''.57$
57 29 .46	24 14 .04	41 27 .00	8 19 .03	7 .90
58 23 .40	21 9 .91	44 32 .46	7 24 .12	7 .60
59 18 .99	18 44 .66	46 59 .55	6 29 .42	7 .83
20 0 0 .63	17 12 .96	48 31 .76	5 46 .68	7 .36
1 14 .47	14 52 .04	50 53 .52	4 32 .85	7 .40
3 49 .99	10 56 .81	54 47 .60	1 57 .70	7 .02
4 36 .18	9 57 .08	55 47 .68	1 11 .05	7 .24
4 47 .17	9 44 .13	56 0 .02	1 0 .21	6 .98
5 11 .38	9 15 .75	56 29 .40	0 37 .10	7 .21

$\alpha - t = + 9^s.24$ $\qquad \delta = 44^\circ\ 53'\ 15''.11$ $\qquad \epsilon_1 = 0''.1018$

1888 Novembre 25 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$22^h\ 14^m\ 28^s.41$	$22^h\ 26^m\ 28^s.71$	$0^h\ 33^m\ 30^s.50$	$0^h\ 45^m\ 25^s.46$	$45^\circ\ 4'\ 6''.67$
14 58 .86	25 53 .33	34 5 .80	44 55 .67	6 .74
15 21 .56	25 26 .83	34 32 .50	44 33 .14	7 .17
15 46 .30	24 58 .03	35 0 .03	44 8 .30	6 .98
16 12 .57	24 28 .79	35 30 .62	43 41 .85	7 .17
16 34 .39	24 4 .37	35 54 .50	43 19 .88	6 .83
17 6 .75	23 28 .95	36 30 .20	42 48 .12	7 .17
18 10 .89	22 20 .31	37 38 .50	41 43 .20	6 .07

$\alpha - t = + 8^s.80$ $\qquad \delta = 43^\circ\ 43'\ 17''.18$ $\qquad \epsilon_1 = 0''.1321$

1888 Dicembre 1 — α *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$19^h\ 25^m\ 42^s.5$	$19^h\ 56^m\ 5^s.5$	$20^h\ 7^m\ 10^s.5$	$20^h\ 37^m\ 43^s.5$	$45^\circ\ 4'\ 6''.29$
26 38 .0	51 58 .5	11 22 .0	36 48 .5	5 .31
27 24 .5	49 31 .5	13 53 .0	36 2 .0	5 .67
28 34 .0	46 40 .0	16 48 .0	34 51 .5	5 .79
31 0 .0	42 9 .5	21 16 .5	32 26 .5	6 .26

$\alpha - t = + 10^s.00$ $\qquad \delta = 44^\circ\ 53'\ 13''.97$ $\qquad \epsilon_1 = 0''.1855$

1888 Dicembre 1 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$21^h\ 51^m\ 7^s.07$	$21^h\ 58^m\ 43^s.49$	$0^h\ 56^m\ 30^s.98$	$1^h\ 4^m\ 11^s.63$	$45°\ 4'\ 5''.24$
51 31 .37	58 17 .59	56 57 .30	3 46 .91	4 .81
51 45 .59	58 2 .20	57 12 .99	3 32 .29	5 .00
52 5 .26	57 41 .84	57 33 .78	3 12 .61	4 .48
52 24 .28	57 20 .89	57 54 .90	2 53 .40	5 .95
52 39 .78	57 5 .87	58 9 .89	2 38 .12	4 .05
53 3 .63	56 40 .26	58 35 .81	2 14 .24	5 .48
53 52 .91	55 48 .87	59 25 .73	1 24 .92	5 .38

$\alpha - t = +\ 8^s.57$ $\delta = 42°\ 39'\ 20''.05$ $\epsilon_1 = 0''.2421$

1888 Dicembre 1 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$1^h\ 49^m\ 4^s.79$	$1^h\ 55^m\ 17^s.44$	$5^h\ 9^m\ 54^s.08$	$5^h\ 16^m\ 9^s.93$	$45°\ 4'\ 4''.24$
49 23 .79	54 57 .53	10 13 .79	15 51 .46	4 .26
49 39 .20	54 41 .33	10 29 .95	15 36 .17	4 .36
50 2 .17	54 17 .68	10 54 .04	15 13 .29	4 .24
50 46 .96	53 30 .89	11 40 .59	14 28 .39	4 .79

$\alpha - t = +\ 8^s.47$ $\delta = 42°\ 13'\ 35''.35$ $\epsilon_1 = 0''.1054$

1888 Dicembre 2 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$21^h\ 50^m\ 29^s.61$	$21^h\ 59^m\ 20^s.73$	$0^h\ 55^m\ 54^s.05$	$1^h\ 4^m\ 43^s.20$	$45°\ 4'\ 6''.00$
50 53 .08	58 55 .40	56 19 .52	4 19 .21	5 .29
51 10 .96	58 36 .16	56 38 .16	4 1 .82	5 .10
51 29 .80	58 15 .43	56 58 .97	3 43 .13	6 .02
51 49 .87	57 54 .29	57 20 .44	3 22 .99	5 .76
52 6 .82	57 36 .35	57 37 .67	3 5 .67	4 .83
52 31 .05	57 10 .76	58 3 .80	2 41 .78	5 .67
53 20 .01	56 19 .53	58 54 .57	1 52 .64	5 .69

$\alpha - t = +\ 8^s.46$ $\delta = 42°\ 39'\ 20''.10$ $\epsilon_1 = 0''.1518$

1888 Dicembre 3 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
22h 14m 21s.58	22h 26m 17s.96	0h 33m 21s.15	0h 45m 16s.75	45° 4' 6''.50
14 51 .87	25 42 .51	33 56 .99	44 46 .50	6 .64
15 15 .29	25 16 .20	34 23 .62	44 24 .03	6 .57
15 39 .59	24 47 .38	34 51 .58	43 58 .92	6 .76
16 5 .68	24 17 .73	35 22 .00	43 32 .55	7 .24
16 27 .58	23 53 .40	35 45 .67	43 10 .95	6 .98
16 59 .82	23 18 .69	36 20 .67	42 38 .40	6 .07
18 4 .10	22 8 .76	37 30 .05	41 34 .15	6 .76

$\alpha - t = + 8^s.63$ $\delta = 43° 43' 17''.42$ $\epsilon_1 = 0''.1145$

1888 Dicembre 3 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
1h 48m 3s.16	1h 56m 14s.80	5h 8m 50s.50	5h 17m 2s.27	45° 4' 5''.36
48 25 .13	55 51 .63	9 14 .40	16 40 .37	5 .24
48 41 .22	55 34 .03	9 31 .60	16 23 .94	5 .29
48 59 .01	55 15 .10	9 50 .25	16 6 .22	5 .14
49 17 .79	54 55 .66	10 10 .01	15 47 .67	4 .95
49 33 .35	54 39 .32	10 26 .38	15 32 .19	5 .02
49 56 .10	54 15 .61	10 49 .71	15 9 .82	4 .93
50 40 .82	53 29 .17	11 36 .50	14 24 .45	5 .00

$\alpha - t = + 8^s.52$ $\delta = 42° 13' 35''.65$ $\epsilon_1 = 0''.0584$

1888 Dicembre 4 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
22h 15m 3s.70	22h 25m 21s.98	0h 34m 10s.49	0h 44m 29s.43	45° 4' 6''.98
15 35 .50	24 45 .30	34 47 .17	43 57 .20	7 .02
15 53 .95	24 23 .89	35 8 .23	43 38 .52	7 .26
16 19 .62	23 55 .60	35 36 .87	43 12 .97	7 .07
16 45 .10	23 26 .81	36 4 .83	42 47 .46	7 .29
17 4 .31	23 6 .32	36 25 .79	42 28 .50	7 .14
17 37 .15	22 31 .27	37 1 .31	41 56 .10	7 .24
18 42 .22	21 22 .43	38 10 .25	40 50 .78	7 .57

$\alpha - t = + 8^s.98$ $\delta = 43° 43' 17''.46$ $\epsilon_1 = 0''.0670$

1888 Dicembre 5 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$21^h\ 50^m\ 55^s.20$	$21^h\ 58^m\ 34^s.87$	$0^h\ 56^m\ 22^s.17$	$1^h\ 4^m\ 1^s.50$	$45°\ 4'\ 6''.52$
51 19 .20	58 8 .27	56 48 .80	3 37 .21	7 .71
51 34 .13	57 52 .83	57 3 .76	3 22 .33	6 .55
51 53 .45	57 31 .07	57 24 .71	3 2 .70	7 .64
52 12 .95	57 10 .43	57 45 .51	2 43 .10	7 .79
52 27 .45	56 55 .90	58 0 .27	2 28 .58	7 .00
52 52 .52	56 30 .37	58 26 .47	2 4 .05	6 .88
53 41 .73	55 39 .93	59 17 .30	1 14 .63	6 .71

$\alpha - t = + 9^s.14$ $\delta = 43°\ 39'\ 20''.26$ $\epsilon_1 = 0''.1943$

1888 Dicembre 6 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$21^h\ 51^m\ 14^s.00$	$21^h\ 58^m\ 6^s.02$	$0^h\ 56^m\ 44^s.18$	$1^h\ 3^m\ 35^s.35$	$45°\ 4'\ 8''.50$
51 29 .63	57 50 .70	56 59 .56	3 20 .77	8 .10
51 49 .27	57 29 .89	57 20 .38	3 1 .49	7 .64
52 8 .65	57 9 .20	57 40 .74	2 41 .84	8 .10
52 23 .28	56 54 .36	57 55 .64	2 27 .65	7 .10
52 47 .90	56 28 .06	58 21 .55	2 2 .62	7 .45
53 37 .60	55 37 .69	59 12 .41	1 12 .92	6 .60

$\alpha - t = + 8^s.98$ $\delta = 42°\ 39'\ 20''.29$ $\epsilon_1 = 0''.1885$

1888 Dicembre 7 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$21^h\ 51^m\ 14^s.00$	$21^h\ 58^m\ 0^s.70$	$0^h\ 56^m\ 42^s.84$	$1^h\ 3^m\ 29^s.46$	$45°\ 4'\ 6''.90$
51 34 .26	57 39 .34	57 5 .00	3 9 .42	7 .26
51 50 .83	57 21 .71	57 22 .74	2 52 .45	7 .14
52 15 .22	56 56 .02	57 48 .20	2 28 .46	7 .31
53 4 .05	56 5 .07	58 39 .11	1 39 .37	7 .31

$\alpha - t = + 9^s.71$ $\delta = 42°\ 39'\ 20''.30$ $\epsilon_1 = 0''.0775$

1888 Dicembre 7 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$1^h\ 47^m\ 51^s.87$	$1^h\ 56^m\ 0^s.79$	$5^h\ 8^m\ 39^s.20$	$5^h\ 16^m\ 48^s.73$	$45^\circ\ 4'\ 6''.33$
48 13 .35	55 37 .60	9 2 .65	16 26 .66	6 .17
48 29 .79	55 20 .20	9 20 .10	16 10 .68	6 .38
48 47 .33	55 1 .50	9 38 .75	15 53 .05	6 .43
49 5 .83	54 41 .50	9 58 .61	15 34 .07	6 .55
49 21 .39	54 25 .40	10 14 .75	15 18 .76	6 .38
49 44 .14	54 1 .80	10 38 .18	14 56 .30	6 .24
50 29 .07	53 15 .14	11 25 .06	14 11 .17	6 .60

$\alpha - t = + 9^s.60$ $\delta = 42^\circ\ 13'\ 36''.38$ $\epsilon_1 = 0''.0511$

1888 Dicembre 8 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$21^h\ 50^m\ 27^s.69$	$21^h\ 58^m\ 43^s.66$	$0^h\ 55^m\ 53^s.33$	$1^h\ 4^m\ 9^s.95$	$45^\circ\ 4'\ 7''.83$
50 52 .00	58 17 .08	56 19 .60	3 45 .68	8 .02
51 6 .28	58 1 .92	56 35 .01	3 31 .41	7 .93
51 25 .60	57 40 .93	56 55 .87	3 12 .08	8 .33
51 45 .10	57 20 .27	57 16 .46	2 52 .51	8 .10
51 59 .60	57 5 .18	57 31 .93	2 38 .09	8 .14
52 24 .40	56 39 .05	57 37 .80	2 13 .56	8 .33
53 13 .61	55 48 .10	58 48 .84	1 24 .33	8 .36

$\alpha - t = + 9^s.67$ $\delta = 42^\circ\ 39'\ 20''.28$ $\epsilon_1 = 0''.0702$

1888 Dicembre 9 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$21^h\ 50^m\ 26^s.32$	$21^h\ 58^m\ 38^s.73$	$0^h\ 55^m\ 52^s.78$	$1^h\ 4^m\ 4^s.21$	$45^\circ\ 4'\ 7''.33$
50 49 .80	58 13 .40	56 18 .25	3 40 .56	7 .36
51 7 .57	57 54 .57	56 37 .38	3 23 .34	7 .60
51 26 .69	57 34 .14	56 57 .50	3 3 .76	7 .05
51 46 .97	57 12 .55	57 19 .03	2 43 .29	6 .95
52 3 .54	56 54 .78	57 36 .50	2 26 .69	7 .19
52 28 .43	56 28 .93	58 1 .95	2 2 .38	7 .05
53 16 .98	55 38 .13	58 53 .10	1 13 .60	8 .19

$\alpha - t = + 9^s.72$ $\delta = 42^\circ\ 39'\ 20''.25$ $\epsilon_1 = 0''.1423$

1888 Dicembre 10 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$21^h\ 50^m\ 24^s.20$	$21^h\ 58^m\ 36^s.32$	$0^h\ 55^m\ 50^s.41$	$1^h\ 4^m\ 2^s.18$	45° 4′ 7″.62
50 47 .93	58 10 .82	56 16 .60	3 38 .47	7 .83
51 5 .59	57 51 .97	56 34 .39	3 20 .94	6 .88
51 24 .50	57 31 .49	56 55 .12	3 1 .81	7 .40
51 44 .67	57 10 .04	57 16 .50	2 41 .46	7 .24
52 1 .38	56 52 .45	57 34 .33	2 24 .69	7 .36
52 25 .97	56 26 .83	57 59 .89	2 0 .24	7 .31
53 15 .03	55 36 .18	58 50 .45	1 11 .24	7 .21

$\alpha - t = + 8^s.79$ $\delta = 42°\ 39'\ 20''.20$ $\epsilon_1 = 0''.1000$

1888 Dicembre 10 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$1^h\ 47^m\ 56^s.57$	$1^h\ 55^m\ 38^s.27$	$5^h\ 8^m\ 45^s.09$	$5^h\ 16^m\ 26^s.90$	45° 4′ 6″.71
48 19 .10	55 14 .03	9 9 .11	16 4 .58	6 .93
48 32 .62	54 59 .97	9 23 .08	15 51 .00	6 .21
48 50 .77	54 41 .06	9 42 .52	15 33 .25	6 .50
49 8 .90	54 21 .84	10 1 .07	15 14 .98	6 .05
49 22 .00	54 7 .65	10 15 .59	15 1 .36	6 .62
49 44 .73	53 44 .06	10 39 .21	14 38 .90	6 .79
50 30 .29	52 57 .22	11 25 .70	13 53 .47	6 .40

$\alpha - t = + 8^s.63$ $\delta = 42°\ 13'\ 36''.87$ $\epsilon_1 = 0''.1051$

1888 Dicembre 13 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$1^h\ 47^m\ 48^s.66$	$1^h\ 55^m\ 27^s.74$	$5^h\ 8^m\ 38^s.20$	$5^h\ 16^m\ 17^s.69$	45° 4′ 8″.74
48 10 .99	55 3 .60	9 2 .26	15 54 .76	8 .74
48 24 .70	54 49 .12	9 16 .80	15 41 .80	9 .28
48 42 .62	54 30 .25	9 35 .80	15 23 .70	9 .09
49 0 .53	54 11 .27	9 54 .70	15 5 .61	9 .07
49 13 .95	53 57 .18	10 8 .69	14 52 .40	9 .23
49 36 .89	53 33 .59	10 32 .49	14 29 .38	8 .83
50 22 .30	52 47 .08	11 19 .20	13 44 .10	8 .64

$\alpha - t = + 8^s.82$ $\delta = 42°\ 13'\ 37''.19$ $\epsilon_1 = 0''.0866$

1889 Gennaio 7 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
1^h 46^m $13^s.78$	1^h 53^m $56^s.66$	5^h 6^m $59^s.29$	5^h 14^m $44^s.90$	45° 4′ 5″.24
46 36 .50	53 31 .87	7 23 .30	14 20 .40	5 .55
46 49 .59	53 17 .95	7 37 .30	14 6 .61	4 .95
47 7 .61	52 58 .95	7 56 .58	13 48 .90	5 .36
47 25 .67	52 39 .83	8 15 .70	13 30 .70	5 .36
47 38 .80	52 25 .67	8 29 .87	13 17 .50	5 .98
48 2 .00	52 2 .13	8 53 .65	12 54 .38	5 .24
48 47 .40	51 15 .40	9 40 .29	12 9 .13	5 .19

$\alpha - t = + 6^s.58$ $\delta = 42^\circ\ 13'\ 40''.05$ $\epsilon_1 = 0''.1074$

1889 Gennaio 8 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
1^h 46^m $33^s.04$	1^h 53^m $23^s.90$	5^h 7^m $21^s.30$	5^h 14^m $11^s.80$	45° 4′ 6″.02
46 49 .37	53 6 .56	7 38 .70	13 55 .64	6 .19
47 7 .66	52 47 .92	7 57 .51	13 37 .97	5 .52
47 25 .60	52 27 .90	8 16 .97	13 19 .00	6 .31
47 41 .05	52 11 .82	8 33 .58	13 3 .40	6 .50
48 3 .78	51 48 .39	8 56 .80	12 40 .85	6 .17
48 24 .79	51 26 .36	9 19 .00	12 19 .13	6 .26
48 49 .02	51 1 .50	9 43 .00	11 55 .50	6 .12

$\alpha - t = + 6^s.44$ $\delta = 42^\circ\ 13'\ 40''.10$ $\epsilon_1 = 0''.1003$

1889 Gennaio 8 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
5^h 16^m $4^s.41$	5^h 25^m $53^s.66$	7^h 37^m $1^s.70$	7^h 46^m $50^s.69$	45° 4′ 7″.43
16 26 .93	25 27 .84	37 26 .68	46 28 .31	7 .29
16 51 .80	25 0 .30	37 54 .40	46 3 .35	6 .83
17 17 .65	24 31 .25	38 24 .07	45 37 .23	7 .38
17 39 .90	24 7 .09	38 47 .73	45 15 .19	6 .88
18 10 .88	23 32 .60	39 21 .98	44 43 .38	7 .26
18 41 .91	23 0 .10	40 1 .73	44 6 .57	7 .14
19 15 .13	22 24 .63	40 30 .27	43 39 .77	7 .60

$\alpha - t = + 6^s.39$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 10''.32$ $\epsilon_1 = 0''.0940$

1889 Gennaio 17 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$1^h\ 45^m\ 40^s.77$	$1^h\ 53^m\ 17^s.79$	$5^h\ 6^m\ 26^s.40$	$5^h\ 14^m\ 2^s.10$	$45°\ 4'\ 3''.24$
46 2 .75	52 54 .47	6 49 .62	13 40 .28	3 .36
46 19 .09	52 37 .15	7 6 .78	13 24 .00	3 .17
46 36 .39	52 18 .31	7 24 .98	13 6 .22	3 .12
46 54 .92	51 58 .70	7 45 .12	12 47 .61	3 .74
47 11 .03	51 42 .19	8 1 .03	12 32 .02	3 .12
47 33 .60	51 18 .79	8 24 .45	12 9 .49	3 .08
48 18 .93	50 31 .90	9 11 .62	11 24 .17	3 .83
48 30 .03	50 21 .34	9 24 .10	11 11 .50	2 .79

$\alpha - t = +\ 3^s.69$ $\delta = 42°\ 13'\ 40''.68$ $\epsilon_1 = 0''.1083$

1889 Gennaio 17 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$5^h\ 15^m\ 5^s.35$	$5^h\ 26^m\ 0^s.50$	$7^h\ 35^m\ 54^s.17$	$7^h\ 46^m\ 49^s.03$	$45°\ 4'\ 3''.86$
15 35 .63	25 25 .20	36 28 .47	46 18 .80	3 .95
15 57 .82	24 59 .69	36 54 .78	45 55 .91	3 .97
16 22 .90	24 31 .79	37 21 .77	45 31 .37	3 .69
16 48 .60	24 2 .63	37 50 .98	45 5 .20	4 .10
17 10 .77	23 39 .03	38 15 .30	44 43 .50	3 .93
17 42 .71	23 4 .24	38 49 .68	44 11 .59	3 .88
18 46 .33	21 56 .67	39 57 .78	43 7 .80	4 .21
19 4 .41	21 38 .00	40 15 .70	42 49 .99	3 .79
19 13 .80	21 28 .39	40 25 .71	42 40 .32	3 .74
19 18 .00	21 24 .10	40 29 .31	42 36 .17	3 .31

$\alpha - t = +\ 3^s.85$ $\delta = 43°\ 41'\ 11''.46$ $\epsilon_1 = 0''.0711$

1889 Gennaio 18 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$1^h\ 45^m\ 37^s.96$	$1^h\ 53^m\ 15^s.80$	$5^h\ 6^m\ 23^s.01$	$5^h\ 14^m\ 1^s.11$	$45°\ 4'\ 4''.40$
46 0 .72	52 51 .43	6 47 .02	13 38 .37	4 .17
46 14 .17	52 37 .39	7 1 .39	13 24 .77	3 .86
46 32 .02	52 18 .37	7 20 .33	13 6 .87	3 .95
46 50 .06	51 59 .29	7 39 .50	12 49 .19	4 .52
47 3 .67	51 45 .27	7 53 .50	12 35 .88	4 .36
47 26 .70	51 21 .50	8 17 .38	12 12 .92	4 .17
48 11 .72	50 34 .82	9 3 .89	11 27 .51	4 .24

$\alpha - t = +\ 3^s.14$ $\delta = 42°\ 13'\ 40''.75$ $\epsilon_1 = 0''.0789$

1889 Gennaio 18 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$5^h\ 15^m\ 1^s.40$	$5^h\ 25^m\ 59^s.50$	$7^h\ 35^m\ 50^s.39$	$7^h\ 46^m\ 48^s.70$	45° 4′ 5″.05
15 32 .62	25 22 .88	36 26 .38	46 16 .80	4 .90
15 50 .99	25 2 .40	36 46 .63	45 58 .70	4 .83
16 16 .03	24 33 .93	37 15 .16	45 33 .38	4 .55
16 41 .53	24 6 .18	37 43 .39	45 8 .40	4 .40
17 0 .20	23 45 .30	38 4 .28	44 50 .33	5 .14
17 32 .41	23 10 .48	38 39 .50	44 17 .69	4 .79
18 36 .19	22 2 .18	39 47 .50	43 13 .89	5 .12

$\alpha - t = + 3^s.26$ $\delta = 43°\ 41'\ 11''.65$ $\epsilon_1 = 0''.0941$

1889 Gennaio 19 — ν *Persei.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$1^h\ 45^m\ 35^s.88$	$1^h\ 53^m\ 13^s.30$	$5^h\ 6^m\ 20^s.86$	$5^h\ 13^m\ 58^s.47$	45° 4′ 4″.29
45 58 .77	52 48 .80	6 44 .67	13 35 .43	3 .59
46 12 .01	52 34 .80	6 59 .04	13 22 .30	3 .83
46 29 .98	52 15 .81	7 18 .00	13 4 .47	3 .78
46 47 .90	51 56 .90	7 37 .10	12 46 .20	3 .80
47 1 .28	51 42 .90	7 51 .29	12 32 .98	4 .12
47 24 .48	51 18 .99	8 14 .60	12 10 .40	3 .29
48 9 .92	50 32 .23	9 1 .50	11 24 .69	3 .57

$\alpha - t = + 3^s.03$ $\delta = 42°\ 13'\ 40''.82$ $\epsilon_1 = 0''.1117$

1889 Gennaio 24 — ϵ *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$3^h\ 29^m\ 22^s.87$	$3^h\ 40^m\ 10^s.90$	$5^h\ 51^m\ 36^s.36$	$6^h\ 2^m\ 23^s.04$	45° 4′ 4″.10
29 52 .63	39 36 .51	52 10 .42	1 53 .20	4 .05
30 15 .07	39 10 .80	52 35 .90	1 30 .08	3 .76
30 39 .77	38 43 .28	53 3 .22	1 5 .70	3 .63
31 5 .52	38 14 .99	53 31 .60	0 40 .02	3 .29
31 26 .87	37 50 .70	53 55 .40	0 18 .40	3 .95
31 58 .48	37 16 .63	54 29 .33	5 59 47 .15	3 .90
33 1 .92	36 9 .70	55 36 .40	58 43 .63	3 .66

$\alpha - t = + 5^s.21$ $\delta = 43°\ 39'\ 31''.66$ $\epsilon_1 = 0''.0940$

1889 Gennaio 25 — ε *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$3^h\ 29^m\ 15^s.74$	$3^h\ 40^m\ 8^s.53$	$5^h\ 51^m\ 29^s.80$	$6^h\ 2^m\ 22^s.55$	$45°\ 4'\ 6''.21$
29 46 .47	39 32 .47	52 5 .33	1 51 .13	6 .26
30 5 .24	39 11 .75	52 26 .23	1 33 .13	6 .12
30 30 .07	38 44 .09	52 54 .28	1 7 .97	5 .81
30 55 .18	38 16 .18	53 21 .62	0 43 .01	5 .60
31 13 .55	37 55 .27	53 42 .08	0 24 .83	6 .24
31 45 .66	37 20 .50	54 17 .28	5 59 53 .30	6 .69
32 49 .23	36 13 .33	55 25 .19	58 49 .43	6 .45

$\alpha - t = + 5^s.27$ $\delta = 43°\ 39'\ 31''.83$ $\epsilon_1 = 0''.1250$

1889 Gennaio 27 — ε *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$3^h\ 29^m\ 8^s.03$	$3^h\ 40^m\ 0^s.29$	$5^h\ 51^m\ 22^s.15$	$6^h\ 2^m\ 14^s.60$	$45°\ 4'\ 6''.43$
29 37 .62	39 24 .97	51 56 .38	1 44 .60	6 .95
30 0 .29	38 59 .84	52 21 .98	1 21 .83	6 .43
30 24 .62	38 31 .89	52 49 .32	0 57 .27	6 .62
30 50 .39	38 4 .13	53 18 .16	0 31 .94	6 .57
31 12 .12	37 40 .54	53 41 .83	0 10 .10	6 .24
31 43 .81	37 6 .10	54 15 .70	5 59 38 .57	6 .12
32 46 .57	35 58 .55	55 23 .00	58 35 .67	7 .10

$\alpha - t = + 6^s.10$ $\delta = 43°\ 39'\ 31''.86$ $\epsilon_1 = 0''.1178$

1889 Gennaio 31 — ε *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$3^h\ 28^m\ 54^s.87$	$3^h\ 39^m\ 45^s.10$	$5^h\ 51^m\ 5^s.60$	$6^h\ 1^m\ 56^s.50$	$45°\ 4'\ 2''.93$
29 25 .08	39 8 .73	51 41 .80	1 24 .82	3 .69
29 42 .70	38 47 .68	52 2 .00	1 7 .20	4 .12
30 7 .87	38 20 .13	52 30 .09	0 41 .99	3 .79
30 32 .96	37 52 .16	52 57 .64	0 17 .18	3 .81
30 51 .49	37 31 .60	53 18 .94	5 59 58 .77	4 .50
31 23 .14	36 56 .57	53 53 .29	59 26 .53	4 .52
32 27 .47	35 49 .40	55 0 .30	58 23 .61	3 .90

$\alpha - t = + 9^s.25$ $\delta = 43°\ 39'\ 32''.31$ $\epsilon_1 = 0''.1734$

1889 Febbraio 1 — ϵ *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
3^h 28^m $48^s.70$	3^h 39^m $37^s.96$	5^h 51^m $3^s.35$	6^h 1^m $53^s.03$	45° 4′ 7″.50
29 18 .99	39 3 .30	51 38 .38	1 23 .17	7 .76
29 40 .90	38 37 .96	52 3 .63	1 0 .07	7 .48
30 5 .93	38 10 .68	52 31 .33	0 36 .52	7 .71
30 31 .63	37 42 .39	52 59 .68	0 10 .90	7 .55
30 53 .35	37 18 .49	53 23 .45	5 59 48 .62	7 .24
31 24 .71	36 44 .40	53 56 .90	59 17 .49	7 .12
32 28 .18	35 36 .93	55 4 .90	58 13 .95	7 .69

$\alpha - t = + 9^s.13$ $\delta = 43° 39' 32''.41$ $\epsilon_1 = 0''.0804$

1889 Febbraio 5 — ϵ *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
3^h 28^m $28^s.55$	3^h 39^m $20^s.49$	5^h 50^m $42^s.80$	6^h 1^m $35^s.45$	45° 4′ 7″.69
28 59 .63	38 45 .07	51 18 .77	1 4 .45	7 .64
29 17 .83	38 23 .72	51 38 .83	0 46 .10	7 .60
29 42 .72	37 56 .00	52 6 .63	0 20 .17	6 .62
30 7 .73	37 28 .08	52 35 .30	5 59 56 .18	7 .83
30 26 .47	37 7 .60	52 56 .00	59 37 .39	7 .79
30 58 .57	36 33 .50	53 30 .11	59 5 .87	7 .24
32 1 .95	35 26 .01	54 37 .71	58 2 .30	7 .31

$\alpha - t = + 8^s.08$ $\delta = 43° 39' 32''.66$ $\epsilon_1 = 0''.1419$

1889 Febbraio 6 — ϵ *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
3^h 28^m $25^s.13$	3^h 39^m $13^s.19$	5^h 50^m $41^s.30$	6^h 1^m $28^s.05$	45° 4′ 8″.52
28 55 .19	38 38 .49	51 14 .95	0 57 .99	8 .05
29 17 .77	38 12 .90	51 40 .67	0 35 .71	8 .19
29 41 .89	37 44 .67	52 7 .70	0 10 .91	8 .48
30 7 .95	37 16 .70	52 37 .07	5 59 44 .92	8 .26
30 29 .03	36 52 .99	53 0 .48	59 23 .45	8 .52
31 0 .48	36 19 .09	53 34 .55	58 52 .27	8 .60
32 4 .33	35 11 .21	54 41 .08	57 48 .78	8 .38

$\alpha - t = + 8^s.00$ $\delta = 43° 39' 32''.77$ $\epsilon_1 = 0''.0677$

1889 Febbraio 11 — ε *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
3^h 28^m $2^s.02$	3^h 38^m $54^s.33$	5^h 50^m $16^s.27$	6^h 1^m $9^s.18$	45° 4′ 7″.90
28 33 .80	38 18 .40	50 53 .09	0 38 .66	8 .52
28 51 .93	37 57 .49	51 12 .89	0 20 .09	7 .98
29 16 .48	37 29 .30	51 41 .72	5 59 54 .89	8 .55
29 41 .52	37 1 .68	52 8 .83	59 30 .25	8 .26
29 59 .67	36 41 .87	52 29 .08	59 11 .22	7 .76
30 31 .87	36 6 .98	53 3 .53	58 39 .52	7 .69
31 35 .38	34 59 .80	54 11 .30	57 36 .18	7 .76

$\alpha - t = + 5^s.70$ $\delta = 43° 39' 32''.93$ $\epsilon_1 = 0''.1225$

1889 Febbraio 13 — ε *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
3^h 27^m $55^s.41$	3^h 38^m $43^s.19$	5^h 50^m $9^s.80$	6^h 0^m $56^s.98$	45° 4′ 7″.07
28 25 .44	38 8 .69	50 43 .90	0 27 .09	6 .90
28 48 .20	37 43 .50	51 9 .58	0 4 .30	6 .40
29 12 .69	37 15 .20	51 36 .90	5 59 40 .15	7 .02
29 38 .20	36 46 .92	52 5 .60	59 13 .79	6 .69
30 0 .17	36 23 .31	52 29 .10	58 52 .09	6 .26
30 31 .58	35 49 .20	53 2 .85	58 21 .16	6 .48
31 34 .73	34 41 .39	54 10 .81	57 17 .65	7 .43

$\alpha - t = + 5^s.99$ $\delta = 43° 39' 33''.07$ $\epsilon_1 = 0''.1530$

1889 Febbraio 16 — ε *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
3^h 27^m $43^s.05$	3^h 38^m $34^s.27$	5^h 49^m $55^s.30$	6^h 0^m $47^s.00$	45° 4′ 5″.55
28 14 .08	37 58 .09	50 31 .20	0 15 .73	5 .76
28 32 .68	37 37 .70	50 51 .80	5 59 57 .89	5 .50
28 57 .39	37 9 .98	51 20 .20	59 33 .24	5 .86
29 22 .33	36 41 .62	51 47 .77	59 7 .78	5 .79
29 40 .76	36 21 .43	52 8 .13	58 49 .73	6 .05
30 12 .66	35 46 .56	52 43 .00	58 17 .58	6 .10
31 16 .73	34 39 .46	53 50 .11	57 14 .07	5 .33

$\alpha - t = + 5^s.29$ $\delta = 43° 39' 33''.12$ $\epsilon_1 = 0''.0949$

1889 Febbraio 19 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$5^h\ 22^m\ 53^s.92$	$5^h\ 33^m\ 52^s.97$	$7^h\ 43^m\ 40^s.58$	$7^h\ 54^m\ 39^s.34$	$45^\circ\ 4'\ 6''.31$
23 25 .25	33 16 .40	44 16 .37	54 8 .09	6 .38
23 44 .07	32 55 .79	44 37 .43	53 49 .39	5 .74
24 9 .13	32 27 .02	45 6 .02	53 24 .08	6 .05
24 34 .06	31 59 .25	45 34 .15	52 58 .55	5 .88
24 53 .18	31 38 .59	45 54 .63	52 40 .51	6 .19
25 25 .70	31 3 .40	46 29 .41	52 8 .60	5 .88
26 29 .67	29 55 .57	47 38 .19	51 4 .29	5 .90

$\alpha - t = + 5^s.57$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 15''.89$ $\epsilon_1 = 0''.0815$

1889 Febbraio 23 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$5^h\ 22^m\ 57^s.73$	$5^h\ 33^m\ 50^s.91$	$7^h\ 43^m\ 45^s.55$	$7^h\ 54^m\ 38^s.83$	$45^\circ\ 4'\ 7''.64$
23 27 .74	33 16 .05	44 20 .68	54 8 .47	7 .90
23 50 .18	32 50 .11	44 46 .51	53 45 .93	8 .21
24 15 .07	32 22 .35	45 14 .16	53 20 .93	7 .83
24 40 .23	31 53 .40	45 43 .11	52 54 .86	8 .38
25 2 .67	31 29 .35	46 7 .04	52 33 .31	8 .19
25 34 .73	30 54 .99	46 41 .27	52 1 .20	7 .62
26 38 .96	29 47 .06	47 49 .52	50 57 .87	7 .69

$\alpha - t = + 5^s.43$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 16''.19$ $\epsilon_1 = 0''.1033$

1889 Febbraio 24 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$5^h\ 22^m\ 56^s.07$	$5^h\ 33^m\ 53^s.69$	$7^h\ 43^m\ 43^s.80$	$7^h\ 54^m\ 42^s.15$	$45^\circ\ 4'\ 8''.45$
23 27 .82	33 17 .35	44 18 .78	54 10 .88	7 .67
23 46 .20	32 55 .57	44 41 .31	53 52 .40	8 .95
24 11 .17	32 27 .89	45 9 .20	53 27 .14	8 .38
24 36 .39	31 59 .10	45 37 .38	53 2 .21	8 .98
24 55 .40	31 38 .88	45 58 .15	52 43 .19	8 .45
25 27 .46	31 3 .71	46 33 .35	52 11 .40	8 .93
26 31 .62	29 56 .15	47 41 .37	51 7 .46	8 .52

$\alpha - t = + 5^s.53$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 16''.26$ $\epsilon_1 = 0''.1510$

1889 Marzo 6 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$5^h\ 23^m\ 11^s.63$	$5^h\ 34^m\ 10^s.30$	$7^h\ 43^m\ 56^s.53$	$7^h\ 54^m\ 54^s.28$	45° 4′ 5″.14
23 42 .01	33 34 .28	44 31 .57	54 24 .20	5 .88
24 4 .33	33 9 .21	44 57 .53	54 1 .59	5 .74
24 29 .21	32 41 .24	45 25 .50	53 36 .63	5 .64
24 55 .17	32 12 .46	45 54 .40	53 10 .47	5 .48
25 17 .39	31 48 .56	46 18 .20	52 48 .62	5 .07
25 49 .13	31 13 .69	46 53 .20	52 17 .02	5 .67
26 52 .77	30 5 .87	48 1 .03	51 13 .10	5 .86

$\alpha - t = + 7^s.17$ $\delta = 43°\ 41'\ 17''.28$ $\epsilon_1 = 0''.1091$

1889 Marzo 6 — μ *Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$8^h\ 29^m\ 4^s.31$	$8^h\ 36^m\ 28^s.63$	$11^h\ 55^m\ 37^s.92$	$12^h\ 3^m\ 1^s.47$	45° 4′ 5″.81
29 25 .60	36 6 .02	56 0 .39	2 40 .10	5 .50
29 41 .45	35 48 .79	56 17 .02	2 24 .44	5 .90
29 58 .38	35 30 .68	56 35 .39	2 6 .54	5 .74
30 16 .60	35 11 .59	56 54 .49	1 49 .01	6 .38
30 31 .80	34 55 .95	57 10 .02	1 33 .41	5 .52
30 53 .96	34 33 .14	57 32 .92	1 11 .63	5 .62
31 37 .94	33 48 .00	58 17 .70	0 27 .56	5 .21

$\alpha - t = + 7^s.57$ $\delta = 42°\ 3'\ 24''.77$ $\epsilon_1 = 0''.0939$

1889 Marzo 12 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$6^h\ 56^m\ 32^s.68$	$7^h\ 6^m\ 58^s.64$	$9^h\ 24^m\ 25^s.00$	$9^h\ 34^m\ 51^s.85$	45° 4′ 6″.90
57 2 .50	6 24 .47	24 59 .01	34 21 .58	7 .05
57 20 .22	6 4 .17	25 19 .22	34 4 .29	7 .69
57 44 .20	5 38 .13	25 45 .77	33 39 .98	6 .93
58 8 .37	5 11 .34	26 12 .37	33 16 .01	7 .14
58 26 .20	4 51 .90	26 32 .10	32 58 .60	7 .55
58 56 .85	4 18 .98	27 4 .99	32 27 .28	6 .88
59 58 .18	3 14 .07	28 9 .90	31 26 .17	6 .57

$\alpha - t = + 8^s.27$ $\delta = 43°\ 32'\ 39''.57$ $\epsilon_1 = 0''.1303$

1889 Marzo 12 — *58 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
10h 11m 20s.04	10h 22m 43s.03	12h 27m 15s.94	12h 38m 39s.30	45° 4′ 7″.12
11 52 .39	22 5 .27	27 53 .83	38 6 .93	7 .17
12 11 .49	21 42 .88	28 15 .80	37 47 .91	7 .40
12 37 .29	21 13 .57	28 45 .20	37 22 .01	7 .33
13 3 .34	20 44 .20	29 14 .67	36 56 .06	7 .57
13 22 .67	20 22 .90	29 36 .21	36 36 .97	7 .69
13 55 .78	19 46 .49	30 12 .37	36 3 .70	7 .60
15 2 .20	18 36 .08	31 22 .88	34 57 .60	7 .14

$\alpha - t = + 8^s.07$ $\delta = 43° 46' 53''.29$ $\epsilon_1 = 0''.0794$

1889 Marzo 13 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
6h 56m 34s.68	7h 6m 59s.58	9h 24m 28s.79	9h 34m 52s.49	45° 4′ 8″.17
57 3 .65	6 26 .52	25 1 .68	34 23 .38	8 .07
57 25 .23	6 2 .60	25 25 .98	34 1 .89	7 .93
57 48 .86	5 35 .72	25 52 .23	33 38 .29	8 .29
58 13 .70	5 8 .75	26 19 .76	33 13 .44	8 .17
58 34 .69	4 45 .79	26 42 .33	32 52 .54	8 .12
59 4 .70	4 13 .20	27 15 .06	32 22 .10	8 .26
7 0 6 .27	3 8 .82	28 19 .51	31 21 .22	8 .07

$\alpha - t = + 8^s.16$ $\delta = 43° 32' 39''.81$ $\epsilon_1 = 0''.0416$

1889 Marzo 14 — *10 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
7h 9m 39s.31	7h 17m 16s.34	10h 30m 37s.80	10h 38m 16s.09	45° 4′ 7″.93
10 2 .19	16 52 .08	31 2 .05	37 54 .02	8 .31
10 15 .07	16 38 .12	31 16 .61	37 39 .78	8 .00
10 33 .19	16 19 .17	31 35 .17	37 21 .79	7 .43
10 51 .66	16 0 .30	31 53 .99	37 4 .00	7 .02
11 5 .09	15 46 .50	32 8 .28	36 50 .70	7 .12
11 27 .70	15 22 .49	32 31 .62	36 27 .81	7 .10
12 13 .20	14 35 .45	33 18 .73	35 42 .20	7 .38

$\alpha - t = + 7^s.96$ $\delta = 43° 13' 19''.88$ $\epsilon_1 = 0''.1709$

1889 Marzo 16 — *10 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
7h 9m 44s.87	7h 17m 20s.27	10h 30m 45s.20	10h 38m 19s.48	45° 4′ 9″.26
10 6 .67	16 56 .67	31 8 .39	37 57 .67	9 .40
10 22 .71	16 39 .68	31 25 .79	37 41 .80	9 .79
10 40 .45	16 20 .87	31 44 .57	37 24 .08	9 .88
10 58 .90	16 1 .30	32 3 .89	37 5 .32	9 .70
11 14 .94	15 45 .04	32 20 .29	36 49 .77	9 .40
11 37 .37	15 21 .32	32 43 .70	36 27 .32	9 .81
12 22 .17	14 34 .95	33 30 .20	35 41 .20	9 .30

$\alpha - t = +9^s.01$ $\delta = 43° 13' 20''.26$ $\epsilon_1 = 0''.0886$

1889 Marzo 17 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
6h 56m 43s.12	7h 7m 8s.89	9h 24m 37s.20	9h 35m 3s.87	45° 4′ 10″.14
57 12 .84	6 34 .32	25 11 .28	34 33 .93	10 .55
57 30 .86	6 14 .32	25 31 .29	34 16 .22	10 .43
57 54 .56	5 47 .67	25 57 .65	33 52 .36	10 .45
58 18 .80	5 21 .08	26 24 .15	33 28 .08	10 .19
58 36 .69	5 1 .50	26 43 .60	33 10 .34	10 .29
59 7 .29	4 28 .43	27 17 .10	32 39 .63	10 .50
7 0 8 .53	3 23 .81	28 22 .10	31 38 .30	10 .50

$\alpha - t = +8^s.93$ $\delta = 43° 32' 40''.35$ $\epsilon_1 = 0''.0546$

1889 Marzo 17 — *58 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
10h 11m 32s.31	10h 22m 50s.54	12h 27m 31s.08	12h 38m 48s.44	45° 4′ 10″.29
12 3 .50	22 14 .33	28 7 .45	38 17 .37	10 .34
12 26 .47	21 47 .30	28 33 .95	37 54 .19	10 .55
12 52 .30	21 18 .43	29 2 .80	37 28 .39	10 .07
13 19 .22	20 48 .65	29 33 .00	37 1 .51	9 .91
13 41 .82	20 23 .20	29 57 .83	36 39 .38	10 .36
14 14 .29	19 47 .52	30 33 .86	36 6 .49	10 .55
15 20 .68	18 37 .12	31 44 .32	35 0 .29	10 .36

$\alpha - t = +9^s.34$ $\delta = 43° 46' 57''.42$ $\epsilon_1 = 0''.0776$

1889 Marzo 25 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$6^h\ 57^m\ 9^s.30$	$7^h\ 7^m\ 35^s.00$	$9^h\ 25^m\ 1^s.46$	$9^h\ 35^m\ 26^s.21$	45° 4′ 7″.29
57 38 .35	7 2 .10	25 34 .36	34 56 .79	6 .83
58 0 .29	6 37 .30	25 58 .39	34 35 .55	6 .98
58 48 .44	6 43 .55	26 52 .70	33 46 .79	7 .48
59 9 .49	5 21 .03	27 15 .61	33 25 .92	7 .36
59 39 .87	4 48 .50	27 47 .80	32 55 .49	6 .90
7 0 41 .23	3 43 .90	28 52 .46	31 54 .50	7 .05

$\alpha - t = +\ 7^s.71$ $\delta = 43°\ 32'\ 41''.16$ $\epsilon_1 = 0''.0942$

1889 Marzo 25 — *58 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$10^h\ 11^m\ 58^s.66$	$10^h\ 23^m\ 18^s.53$	$12^h\ 27^m\ 52^s.76$	$12^h\ 39^m\ 12^s.52$	45° 4′ 7″.12
12 30 .06	22 42 .11	28 29 .20	38 41 .13	6 .90
12 53 .39	22 15 .20	28 55 .95	38 17 .97	7 .05
13 18 .61	21 46 .26	29 24 .90	37 52 .47	7 .17
13 45 .97	21 16 .01	29 55 .56	37 25 .14	6 .98
14 8 .20	20 50 .99	30 19 .83	37 2 .77	6 .93
14 40 .80	20 15 .23	30 56 .29	36 30 .13	7 .48
15 47 .70	19 4 .98	32 5 .90	35 23 .85	6 .38

$\alpha - t = +\ 7^s.89$ $\delta = 43°\ 46'\ 58''.95$ $\epsilon_1 = 0''.1099$

1889 Marzo 27 — *μ Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$8^h\ 29^m\ 54^s.20$	$8^h\ 37^m\ 19^s.29$	$11^h\ 56^m\ 25^s.21$	$12^h\ 3^m\ 50^s.50$	45° 4′ 5″.64
30 15 .91	36 55 .39	56 48 .70	3 28 .48	6 .31
30 28 .98	36 42 .04	57 2 .49	3 15 .81	6 .19
30 46 .54	36 23 .05	57 21 .03	2 58 .16	6 .48
31 4 .05	36 5 .19	57 39 .50	2 40 .55	6 .07
31 17 .32	35 51 .33	57 52 .98	2 27 .70	6 .17
31 39 .18	35 28 .04	58 16 .08	2 5 .30	6 .52

$\alpha - t = +\ 9^s.50$ $\delta = 42°\ 3'\ 28''.33$ $\epsilon_1 = 0''.1117$

1889 Marzo 28 — μ *Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$8^h\ 29^m\ 55^s.40$	$8^h\ 37^m\ 20^s.06$	$11^h\ 56^m\ 28^s.14$	$12^h\ 3^m\ 51^s.30$	$45^\circ\ 4'\ 7''.45$
30 16.95	36 57.30	56 50.20	3 30.49	7.14
30 32.33	36 40.17	57 7.13	3 14.30	7.69
30 49.90	36 22.43	57 25.46	2 57.13	7.19
31 8.07	36 2.40	57 44.18	2 38.76	7.62
31 23.18	35 47.36	58 0.27	2 23.74	7.36
31 44.90	35 24.23	58 23.20	2 1.55	7.81
32 29.10	34 38.90	59 8.01	1 17.60	7.48

$\alpha - t = +\ 9^s.68$ $\delta = 42^\circ\ 3'\ 28''.61$ $\epsilon_1 = 0''.0831$

1889 Maggio 31 — *33 Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 2^m\ 12^s.40$	$14^h\ 34^m\ 18^s.97$	$14^h\ 42^m\ 39^s.74$	$15^h\ 14^m\ 53^s.49$	$45^\circ\ 4'\ 5''.26$
3 4.20	29 33.70	47 30.79	13 59.58	5.31
3 58.26	26 34.20	50 29.70	13 7.16	5.62
4 39.29	24 45.02	52 17.27	12 25.40	5.31
5 50.10	22 8.20	54 55.65	11 14.42	5.71
8 19.80	17 55.07	59 9.93	8 45.70	5.90

$\alpha - t = -\ 4^s.25$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 7''.63$ $\epsilon_1 = 0''.1074$

1889 Giugno 1 — *33 Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$14^h\ 2^m\ 21^s.20$	$14^h\ 33^m\ 10^s.49$	$14^h\ 43^m\ 56^s.63$	$15^h\ 14^m\ 48^s.05$	$45^\circ\ 4'\ 6''.95$
3 13.10	29 5.08	48 4.30	13 56.12	6.67
4 8.58	26 6.19	51 1.80	12 59.62	6.83
4 57.05	24 7.07	53 2.66	12 12.38	6.93
6 8.53	21 37.46	55 31.66	11 0.33	6.45
8 38.01	17 32.34	59 38.59	8 30.70	6.71
9 27.81	16 25.38	15 0 45.07	7 41.04	6.31
9 50.44	15 54.76	1 15.18	7 17.29	6.45
10 0.20	15 42.06	1 28.25	7 7.70	6.76

$\alpha - t = -\ 3^s.80$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 7''.83$ $\epsilon_1 = 0''.0752$

1889 Giugno 4 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 57^m\ 54^s.18$	$15^h\ 6^m\ 12^s.04$	$18^h\ 2^m\ 55^s.59$	$18^h\ 11^m\ 13^s.78$	$45^\circ\ 4'\ 8''.95$
58 18 .53	5 45 .10	3 22 .35	10 49 .39	9 .60
58 33 .07	5 29 .79	3 37 .87	10 35 .10	9 .47
58 52 .50	5 8 .82	3 58 .20	10 15 .56	9 .16
59 12 .01	4 47 .62	4 19 .00	9 55 .73	9 .30
59 26 .46	4 32 .37	4 33 .92	9 41 .14	8 .76
59 50 .68	4 7 .20	5 0 .41	9 16 .47	9 .16
15 0 40 .30	3 15 .89	5 51 .73	8 27 .28	9 .40

$\alpha - t = -\ 4^s.44$ $\delta = 42^\circ\ 40'\ 0''.23$ $\epsilon_1 = 0''.0977$

1889 Giugno 6 — *33 Bootis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 2^m\ 28^s.20$	$14^h\ 34^m\ 20^s.91$	$14^h\ 43^m\ 11^s.91$	$15^h\ 15^m\ 9^s.40$	$45^\circ\ 4'\ 7''.62$
3 20 .81	29 43 .98	47 52 .20	14 15 .87	7 .33
4 15 .20	26 46 .20	50 51 .00	13 21 .68	7 .12
4 56 .50	24 58 .87	52 39 .50	12 41 .39	7 .21
6 7 .30	22 21 .39	55 14 .73	11 30 .95	7 .62
8 36 .29	18 7 .70	59 29 .43	9 0 .93	8 .05
9 16 .83	17 12 .01	15 0 24 .78	8 20 .90	7 .60
9 26 .30	16 59 .50	0 37 .19	8 11 .50	7 .45
9 49 .06	16 28 .72	1 8 .17	7 47 .48	7 .45

$\alpha - t = -\ 4^s.03$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 8''.91$ $\epsilon_1 = 0''.0916$

1889 Giugno 6 — *Gr. 2533.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$16^h\ 30^m\ 19^s.87$	$16^h\ 37^m\ 49^s.70$	$19^h\ 54^m\ 47^s.05$	$20^h\ 2^m\ 16^s.57$	$45^\circ\ 4'\ 10''.98$
30 42 .01	37 25 .90	55 10 .48	1 54 .73	11 .24
30 55 .40	37 12 .20	55 24 .49	1 41 .33	10 .67
31 12 .83	36 53 .28	55 43 .38	1 23 .66	11 .29
31 30 .87	36 34 .63	56 1 .60	1 5 .80	10 .55
31 43 .68	36 21 .24	56 15 .34	0 52 .67	10 .55
32 6 .40	35 57 .80	56 38 .78	0 30 .40	10 .29
32 50 .90	35 11 .97	57 24 .33	19 59 45 .95	10 .55

$\alpha - t = -\ 3^s.99$ $\delta = 42^\circ\ 7'\ 16''.05$ $\epsilon_1 = 0''.1270$

1889 Giugno 6 — α *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
20h 5m 7s.09	20h 35m 34s.60	20h 47m 49s.44	21h 18m 22s.88	45° 4′ 10″.48
5 59 .26	31 44 .70	51 46 .60	17 30 .90	10 .57
6 51 .92	28 56 .70	54 33 .51	16 37 .80	11 .38
7 32 .88	27 15 .00	56 15 .07	15 57 .02	11 .07
8 42 .37	24 43 .87	58 45 .18	14 46 .25	11 .45
11 10 .60	20 39 .27	21 2 52 .30	12 18 .65	11 .31
11 52 .10	19 44 .47	3 24 .60	11 55 .60	10 .62
12 1 .20	19 31 .58	3 36 .47	11 46 .01	10 .48
12 24 .21	19 0 .70	4 8 .00	11 23 .28	10 .79

$\alpha - t = -3^s.06$ $\delta = 44^\circ\ 52'\ 52''.55$ $\epsilon_1 = 0''.1309$

1889 Giugno 8 — *Gr. 2533.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
16h 30m 25s.32	16h 37m 53s.60	19h 54m 52s.20	20h 2m 20s.19	45° 4′ 11″.02
30 46 .77	37 30 .38	55 15 .07	1 58 .48	11 .02
31 2 .79	37 13 .73	55 31 .99	1 42 .80	11 .24
31 19 .88	36 55 .26	55 50 .41	1 25 .35	11 .38
31 38 .53	36 36 .10	56 9 .85	1 6 .78	11 .00
31 54 .07	36 20 .00	56 25 .72	0 51 .50	10 .81
32 16 .05	35 56 .39	56 49 .12	0 29 .39	11 .95
33 0 .40	35 11 .25	57 34 .30	19 59 44 .80	11 .02

$\alpha - t = -3^s.98$ $\delta = 42^\circ\ 7'\ 16''.67$ $\epsilon_1 = 0''.1253$

1889 Giugno 15 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
14h 58m 37s.70	15h 6m 54s.43	18h 3m 37s.60	18h 11m 53s.90	45° 4′ 8″.95
59 1 .79	6 29 .02	4 3 .33	11 29 .81	8 .12
59 19 .07	6 10 .24	4 22 .10	11 12 .48	8 .40
59 38 .05	5 49 .14	4 42 .50	10 53 .33	8 .98
59 58 .17	5 28 .20	5 4 .09	10 32 .68	8 .40
15 0 14 .99	5 10 .18	5 21 .76	10 16 .20	8 .86
0 39 .66	4 44 .77	5 47 .36	9 51 .48	8 .29
1 28 .80	3 53 .70	6 38 .46	9 2 .36	8 .76

$\alpha - t = -2^s.66$ $\delta = 42^\circ\ 40'\ 3''.38$ $\epsilon_1 = 0''.1170$

1889 Giugno 15 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$19^h\ 7^m\ 58^s.32$	$19^h\ 37^m\ 38^s.69$	$19^h\ 54^m\ 45^s.76$	$20^h\ 24^m\ 32^s.51$	$45^\circ\ 4'\ 8''.36$
8 43.45	34 50.50	57 39.62	23 46.64	8.17
9 32.80	32 22.80	20 0 7.51	22 57.81	9.05
10 27.44	30 13.99	2 16.48	22 3.32	8.31
11 13.60	28 38.25	3 52.31	21 18.08	8.26
12 21.40	26 32.98	5 58.08	20 9.40	8.24
14 44.88	22 55.01	9 34.69	17 46.48	8.24
15 30.98	21 54.42	10 36.42	16 59.18	8.33
15 53.60	21 26.60	11 3.59	16 37.17	8.26
16 2.50	21 15.02	11 13.90	16 28.30	8.31

$\alpha - t = -\ 2^s.57$ $\delta = 44^\circ\ 51'\ 31''.78$ $\epsilon_1 = 0''.0842$

1889 Giugno 17 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$14^h\ 58^m\ 51^s.76$	$15^h\ 7^m\ 10^s.60$	$18^h\ 3^m\ 51^s.44$	$18^h\ 12^m\ 10^s.48$	$45^\circ\ 4'\ 9''.72$
59 16.55	6 43.89	4 17.65	11 45.84	9.23
59 30.80	6 28.37	4 33.20	11 31.46	9.42
59 50.32	6 7.49	4 53.97	11 11.96	9.33
15 0 9.96	5 46.50	5 14.84	10 52.40	9.49
0 24.17	5 31.51	5 30.00	10 37.88	9.33
0 48.93	5 5.38	5 55.83	10 13.37	9.53
1 38.30	4 14.32	6 47.13	9 24.30	9.84

$\alpha - t = -\ 1^s.79$ $\delta = 42^\circ\ 40'\ 3''.84$ $\epsilon_1 = 0''.0824$

1889 Giugno 17 — α *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$20^h\ 6^m\ 15^s.47$	$20^h\ 35^m\ 45^s.98$	$20^h\ 49^m\ 26^s.33$	$21^h\ 19^m\ 2^s.84$	$45^\circ\ 4'\ 9''.91$
7 6.51	32 14.28	53 0.75	18 11.14	9.84
8 3.40	29 27.78	55 47.17	17 15.65	9.77
8 50.48	27 35.39	57 42.02	16 28.46	9.67
10 2.18	25 10.59	21 0 7.10	15 18.06	9.72
12 29.65	21 11.05	4 5.39	12 47.98	9.53
13 18.18	20 6.10	5 11.55	12 0.33	9.74
13 42.97	19 35.32	5 41.47	11 37.50	9.72
13 52.58	19 23.60	5 54.26	11 27.66	9.77

$\alpha - t = -\ 1^s.31$ $\delta = 44^\circ\ 52'\ 55''.94$ $\epsilon_1 = 0''.0354$

1889 Giugno 19 — σ *Herculis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
14h 59m 6s.06	15h 7m 22s.35	18h 4m 5s.49	18h 12m 21s.39	45° 4′ 9″.09
59 29 .93	6 56 .70	4 31 .19	11 58 .11	9 .33
59 47 .51	6 38 .18	4 49 .69	11 40 .45	8 .64
15 0 6 .59	6 17 .42	5 10 .10	11 21 .34	8 .93
0 26 .78	5 56 .12	5 31 .84	11 0 .49	8 .45
0 43 .74	5 38 .02	5 49 .68	10 43 .72	8 .81
1 8 .07	5 12 .15	6 15 .70	10 19 .55	9 .70
1 57 .15	4 21 .72	7 6 .06	9 30 .50	9 .19

$\alpha - t = - 1^s.30$ $\delta = 42° 40' 4''.31$ $\epsilon_1 = 0''.1410$

1889 Giugno 19 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
19h 9m 0s.49	19h 35m 54s.78	19h 57m 28s.70	20h 24m 26s.40	45° 4′ 9″.42
9 51 .78	33 21 .87	20 0 4 .78	23 35 .33	8 .83
10 43 .64	31 10 .70	2 15 .45	22 43 .21	8 .88
11 23 .57	29 45 .99	3 42 .43	22 4 .33	8 .79
12 31 .68	27 34 .58	5 52 .81	20 56 .60	8 .93
14 54 .53	23 51 .26	9 37 .32	18 33 .89	8 .95
15 31 .98	23 1 .43	10 27 .77	17 56 .18	8 .74
15 41 .05	22 48 .90	10 40 .29	17 46 .97	8 .95
16 3 .41	22 20 .58	11 6 .67	17 25 .30	8 .67

$\alpha - t = - 2^s.23$ $\delta = 44° 51' 32''.88$ $\epsilon_1 = 0''.0623$

1889 Luglio 28 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
19h 11m 33s.69	19h 41m 36s.47	19h 57m 42s.19	20h 27m 46s.01	45° 4′ 10″.90
12 20 .33	38 39 .14	20 0 41 .20	27 1 .96	10 .86
13 10 .67	36 7 .61	3 7 .81	26 10 .89	10 .21
14 4 .20	33 54 .83	5 25 .54	25 18 .01	11 .31
14 50 .56	32 18 .17	6 59 .64	24 29 .79	9 .93
15 59 .38	30 10 .67	9 7 .95	23 21 .79	10 .17
18 22 .28	26 32 .86	12 51 .04	20 56 .39	11 .74

$\alpha - t = - 0^s.62$ $\delta = 44° 51' 45''.43$ $\epsilon_1 = 0''.2443$

1889 Luglio 29 — *Gr. 2533.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$16^h\ 34^m\ 27^s.89$	$16^h\ 41^m\ 58^s.36$	$19^h\ 58^m\ 44^s.71$	$20^h\ 6^m\ 16^s.81$	$45^\circ\ 4'\ 9''.49$
34 50 .34	41 34 .39	59 8 .55	5 54 .49	9 .51
35 3 .38	41 20 .83	59 22 .51	5 41 .45	9 .35
35 20 .92	41 2 .04	59 41 .08	5 23 .99	9 .67
35 38 .78	40 43 .17	59 59 .72	5 6 .17	9 .49
35 52 .02	40 29 .99	20 0 13 .39	4 52 .96	9 .00
36 14 .52	40 6 .47	0 36 .86	4 30 .54	9 .28
36 59 .07	39 20 .28	1 22 .76	3 45 .79	9 .44

$\alpha - t = -1^s.51$ $\delta = 42^\circ\ 7'\ 31''.19$ $\epsilon_1 = 0''.0707$

1889 Luglio 31 — R *Lyrae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$17^h\ 47^m\ 3^s.45$	$17^h\ 58^m\ 29^s.28$	$20^h\ 1^m\ 48^s.83$	$20^h\ 13^m\ 13^s.31$	$45^\circ\ 4'\ 4''.95$
47 35 .10	57 52 .20	2 26 .07	12 41 .48	4 .98
47 58 .47	57 24 .67	2 53 .03	12 18 .39	5 .48
48 24 .18	56 55 .26	3 22 .20	11 52 .86	5 .62
48 51 .06	56 25 .22	3 52 .40	11 25 .86	5 .48
49 13 .60	55 59 .58	4 17 .99	11 2 .69	5 .79
49 47 .20	55 23 .53	4 54 .10	10 29 .80	5 .50
50 53 .40	54 12 .90	6 5 .34	9 23 .23	5 .67

$\alpha - t = -0^s.61$ $\delta = 43^\circ\ 47'\ 72''.27$ $\epsilon_1 = 0''.1091$

1889 Settembre 14 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$19^h\ 15^m\ 25^s.50$	$19^h\ 43^m\ 17^s.72$	$20^h\ 2^m\ 21^s.63$	$20^h\ 30^m\ 12^s.97$	$45^\circ\ 4'\ 8''.74$
16 16 .24	40 24 .52	5 11 .80	29 20 .88	8 .55
17 8 .97	38 5 .49	7 32 .11	28 28 .98	8 .67
17 48 .19	36 36 .37	9 1 .78	27 49 .53	8 .71
18 57 .19	34 19 .35	11 17 .52	26 40 .40	8 .60
20 9 .90	32 16 .48	13 20 .80	25 28 .80	8 .71
20 17 .60	32 2 .59	13 33 .89	25 19 .82	9 .09
20 39 .35	31 30 .74	14 7 .29	24 58 .70	8 .76
21 22 .22	30 29 .48	15 7 .90	24 16 .04	8 .26

$\alpha - t = -2^s.66$ $\delta = 44^\circ\ 51'\ 56''.60$ $\epsilon_1 = 0''.0726$

1889 Settembre 17 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
19^h 53^m $37^s.11$	20^h 0^m $35^s.98$	22^h 24^m $17^s.88$	22^h 31^m $17^s.30$	45° 4′ 12″.10
53 54 .44	0 17 .49	24 36 .30	30 59 .40	10 .76
54 24 .83	19 59 44 .82	25 9 .22	30 29 .19	11 .38
55 24 .87	58 40 .85	26 12 .48	29 29 .38	11 .76

$\alpha - t = -4^s.11$ $\delta = 43° 29' 26''.48$ $\epsilon_1 = 0''.2473$

1889 Settembre 18 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
19^h 52^m $13^s.08$	20^h 2^m $22^s.50$	22^h 22^m $43^s.36$	22^h 32^m $53^s.16$	45° 4′ 12″.17
52 41 .46	1 50 .30	23 16 .22	32 24 .62	12 .55
53 3 .01	1 26 .27	23 40 .20	32 3 .02	12 .36
53 25 .76	1 0 .50	24 5 .50	31 39 .73	12 .43
53 50 .46	0 33 .43	24 32 .67	31 15 .30	12 .69
54 10 .90	0 11 .38	24 54 .70	30 54 .10	12 .02
54 41 .00	19 59 39 .28	25 26 .99	30 24 .66	12 .33
55 41 .18	58 36 .32	26 29 .87	29 24 .80	12 .07

$\alpha - t = -8^s.51$ $\delta = 43° 29' 26''.69$ $\epsilon_1 = 0''.0822$

1889 Settembre 22 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
19^h 53^m $33^s.03$	20^h 1^m $14^s.37$	22^h 24^m $6^s.85$	22^h 31^m $48^s.77$	45° 4′ 6″.69
53 57 .22	0 48 .47	24 32 .69	31 24 .80	6 .45
54 14 .86	0 29 .50	24 52 .00	31 7 .27	6 .05
54 44 .84	19 59 57 .11	25 24 .80	30 37 .53	6 .60
55 15 .62	59 23 .87	25 57 .17	30 7 .07	6 .98
55 19 .36	59 20 .59	26 1 .25	30 3 .00	6 .43
55 27 .99	59 11 .15	26 10 .05	29 54 .38	6 .50
55 45 .44	58 53 .12	26 28 .90	29 37 .20	6 .95

$\alpha - t = -11^s.04$ $\delta = 43° 29' 27''.37$ $\epsilon_1 = 0''.1090$

1889 Settembre 25 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$19^h\ 52^m\ 32^s.00$	$20^h\ 2^m\ 40^s.21$	$22^h\ 22^m\ 56^s.95$	$22^h\ 33^m\ 6^s.67$	$45^\circ\ 4'\ 7''.21$
53 1.76	2 6.07	23 30.49	32 36.78	7.33
53 19.60	1 46.66	23 50.59	32 19.42	7.38
53 42.75	1 20.46	24 17.09	31 55.95	8.00
54 6.43	0 54.80	24 43.01	31 32.59	7.98
54 24.12	0 36.04	25 2.32	31 15.07	7.86
54 54.57	0 3.00	25 34.85	30 44.27	7.69
55 54.70	19 58 59.52	26 38.22	29 44.10	7.71

$\alpha - t = -15^s.18$ $\delta = 43^\circ\ 29'\ 27''.84$ $\epsilon_1 = 0''.1077$

1889 Settembre 26 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$19^h\ 52^m\ 30^s.79$	$20^h\ 2^m\ 50^s.10$	$22^h\ 22^m\ 57^s.00$	$22^h\ 33^m\ 14^s.82$	$45^\circ\ 4'\ 7''.88$
52 59.57	2 17.46	23 29.14	32 46.30	7.76
53 19.98	1 53.85	23 52.79	32 24.96	8.05
53 43.58	1 27.80	24 18.50	32 1.59	7.81
54 8.29	1 1.03	24 45.66	31 36.80	7.55
54 28.64	0 38.22	25 8.17	31 16.62	8.33
54 58.58	0 5.98	25 40.02	30 46.37	8.00

$\alpha - t = -15^s.88$ $\delta = 43^\circ\ 29'\ 28''.03$ $\epsilon_1 = 0''.0935$

1889 Settembre 27 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$19^h\ 52^m\ 37^s.41$	$20^h\ 2^m\ 46^s.23$	$22^h\ 23^m\ 4^s.44$	$22^h\ 33^m\ 14^s.38$	$45^\circ\ 4'\ 10''.02$
53 7.37	2 13.10	23 37.60	32 45.20	9.63
53 24.41	1 53.61	23 57.30	32 27.30	9.67
53 48.13	1 27.06	24 23.41	32 3.75	9.81
54 11.95	1 1.25	24 49.70	31 40.36	10.00
54 29.49	0 41.86	25 8.81	31 22.60	10.07
54 59.87	0 9.57	25 41.10	30 52.52	9.81
56 0.05	19 59 6.12	26 44.89	29 51.88	9.70

$\alpha - t = -16^s.46$ $\delta = 43^\circ\ 29'\ 28''.23$ $\epsilon_1 = 0''.0670$

1889 Ottobre 3 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
19^h 41^m $37^s.78$	19^h 51^m $56^s.70$	22^h 12^m $4^s.16$	22^h 22^m $22^s.12$	45° 4′ 9″.72
42 6 .63	51 24 .15	12 36 .60	21 53 .10	9 .35
42 27 .70	50 59 .79	13 0 .18	21 31 .62	9 .47
42 51 .00	50 34 .20	13 25 .81	21 8 .64	9 .40
43 15 .27	50 7 .20	13 52 .67	20 43 .93	9 .44
43 36 .26	49 44 .73	14 15 .45	20 23 .44	9 .53
44 6 .10	49 12 .93	14 47 .58	19 54 .07	9 .74
45 5 .74	48 9 .57	15 50 .60	18 53 .70	9 .70

$\alpha - t = - 18^s.94$ $\delta = 43° 29' 29''.32$ $\epsilon_1 = 0''.0549$

1889 Ottobre 14 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
19^h 42^m $9^s.68$	19^h 52^m $25^s.37$	22^h 12^m $33^s.50$	22^h 22^m $49^s.63$	45° 4′ 8″.45
42 38 .17	51 53 .06	13 7 .19	22 20 .98	9 .19
42 59 .80	51 29 .19	13 30 .60	21 59 .51	8 .60
43 23 .19	51 3 .43	13 56 .17	21 36 .29	8 .38
43 47 .35	50 36 .37	14 23 .15	21 11 .89	8 .86
44 7 .95	50 13 .90	14 45 .53	20 51 .42	9 .00
44 37 .64	49 41 .60	15 17 .66	20 21 .77	9 .40
45 38 .00	48 38 .80	16 20 .43	19 21 .33	8 .40

$\alpha - t = - 9^s.54$ $\delta = 43° 29' 30''.64$ $\epsilon_1 = 0''.1371$

1889 Ottobre 15 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
19^h 42^m $12^s.53$	19^h 52^m $29^s.20$	22^h 12^m $38^s.80$	22^h 22^m $54^s.26$	45° 4′ 10″.62
42 41 .12	51 56 .68	13 11 .40	22 26 .31	11 .26
43 2 .70	51 32 .77	13 35 .12	22 4 .52	10 .67
43 25 .33	51 6 .70	14 1 .07	21 40 .94	11 .12
43 50 .20	50 40 .00	14 27 .80	21 16 .80	10 .90
44 10 .85	50 17 .49	14 50 .40	20 56 .25	11 .12
44 41 .01	49 45 .65	15 22 .40	20 25 .94	10 .43
45 40 .68	48 42 .07	16 25 .48	19 26 .50	11 .19

$\alpha - t = - 9^s.33$ $\delta = 43° 29' 30''.74$ $\epsilon_1 = 0''.1087$

1889 Ottobre 16 — ξ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$19^h\ 42^m\ 20^s.45$	$19^h\ 52^m\ 30^s.58$	$22^h\ 12^m\ 47^s.15$	$22^h\ 22^m\ 58^s.02$	$45°\ 4'\ 12''.05$
42 50 .04	51 57 .14	13 20 .68	22 28 .32	11 .95
43 7 .59	51 37 .69	13 39 .63	22 11 .02	11 .60
43 31 .04	51 11 .58	14 6 .09	21 47 .18	11 .69
43 54 .79	50 45 .05	14 32 .35	21 23 .60	12 .19
44 12 .29	50 26 .18	14 52 .01	21 6 .22	12 .57
44 42 .81	49 53 .77	15 24 .06	20 35 .90	11 .95
45 42 .60	48 50 .03	16 27 .70	19 35 .50	12 .31

$\alpha - t = -9^s.49$ $\delta = 43°\ 29'\ 30''.83$ $\epsilon_1 = 0''.1117$

1889 Ottobre 23 — δ *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$19^h\ 5^m\ 39^s.80$	$19^h\ 37^m\ 38^s.84$	$19^h\ 49^m\ 43^s.58$	$20^h\ 21^m\ 44^s.70$	$45°\ 4'\ 8''.26$
6 24 .88	34 2 .58	53 21 .50	20 59 .48	8 .43
7 15 .93	31 15 .18	56 8 .60	20 8 .70	8 .10
8 10 .57	28 53 .00	58 30 .51	19 13 .91	7 .67
8 56 .08	27 8 .90	20 0 15 .49	18 28 .30	8 .38
10 4 .96	24 57 .77	2 27 .30	17 19 .16	7 .86
11 25 .47	22 45 .12	4 38 .98	15 59 .23	7 .62
11 45 .72	22 12 .38	5 11 .40	15 37 .70	7 .98
11 54 .99	21 19 .56	5 24 .63	15 29 .23	7 .95
12 28 .96	21 9 .68	6 14 .00	14 54 .67	8 .26

$\alpha - t = -8^s.98$ $\delta = 44°\ 51'\ 59''.08$ $\epsilon_1 = 0''.0886$

1889 Ottobre 23 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$21^h\ 58^m\ 31^s.70$	$22^h\ 6^m\ 2^s.19$	$1^h\ 3^m\ 50^s.50$	$1^h\ 11^m\ 20^s.77$	$45°\ 4'\ 7''.76$
58 49 .27	5 43 .23	4 9 .57	11 2 .80	7 .81
59 8 .37	5 22 .75	4 30 .40	10 43 .92	8 .14
59 28 .55	5 1 .00	4 51 .33	10 23 .69	7 .95
59 45 .49	4 43 .59	5 9 .20	10 6 .93	7 .74
22 0 9 .60	4 17 .55	5 34 .80	9 42 .46	9 .16
0 58 .60	3 27 .17	6 25 .65	8 54 .89	9 .40

$\alpha - t = -9^s.63$ $\delta = 42°\ 39'\ 34''.78$ $\epsilon_1 = 0''.2646$

1889 Novembre 7 — ι *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$21^h\ 58^m\ 26^s.77$	$22^h\ 6^m\ 41^s.02$	$1^h\ 3^m\ 42^s.43$	$1^h\ 11^m\ 56^s.71$	45° 4′ 8″.50
58 51 .34	6 14 .70	4 8 .71	11 32 .37	7 .88
59 5 .67	5 59 .11	4 24 .48	11 17 .96	8 .24
59 25 .20	5 38 .39	4 45 .19	10 58 .80	8 .29
59 44 .69	5 17 .38	5 5 .78	10 38 .19	7 .45
59 59 .27	5 2 .38	5 21 .03	10 24 .58	7 .88
22 0 23 .98	4 36 .58	5 47 .16	10 0 .05	8 .10
1 13 .12	3 45 .64	6 38 .00	9 10 .99	8 :24

$\alpha - t = -\ 10^s.02$ $\delta = 42°\ 39'\ 37''.17$ $\epsilon_1 = 0''.1164$

1889 Novembre 8 — α *Cygni.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$20^h\ 4^m\ 1^s.63$	$20^h\ 36^m\ 46^s.39$	$20^h\ 43^m\ 14^s.86$	$21^h\ 16^m\ 9^s.47$	45° 4′ 10″.83
4 54 .70	31 30 .20	48 35 .67	15 17 .15	10 .93
5 49 .04	28 24 .91	51 41 .80	14 22 .37	10 .69
6 29 .83	26 33 .98	53 35 .00	13 41 .27	11 .10
7 42 .20	23 55 .70	56 15 .04	12 28 .74	10 .71
8 57 .46	21 37 .49	58 32 .40	11 13 .59	10 .74
9 6 .67	21 21 .51	58 48 .71	11 4 .75	11 .10
9 28 .68	20 46 .58	59 24 .71	10 42 .82	11 .07
10 12 .60	19 39 .07	21 0 31 .49	9 58 .19	11 .02

$\alpha - t = -\ 9^s.17$ $\delta = 44°\ 53'\ 26''.52$ $\epsilon_1 = 0''.0570$

1889 Novembre 8 — κ *Andromedae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$22^h\ 22^m\ 27^s.53$	$22^h\ 33^m\ 29^s.77$	$0^h\ 41^m\ 19^s.11$	$0^h\ 52^m\ 22^s.18$	45° 4′ 10″.12
22 59 .12	32 53 .12	41 55 .49	51 50 .24	9 .81
23 17 .96	32 31 .42	42 16 .00	51 31 .81	9 .63
23 43 .40	32 2 .91	42 45 .90	51 6 .26	10 .07
24 8 .87	31 34 .57	43 14 .41	50 40 .95	10 .14
24 27 .77	31 13 .56	43 35 .57	50 21 .97	10 .31
25 0 .10	30 38 .28	44 11 .04	49 49 .59	10 .45
26 5 .73	29 29 .01	45 20 .03	48 44 .19	9 .72

$\alpha - t = -\ 9^s.66$ $\delta = 43°\ 43'\ 34''.48$ $\epsilon_1 = 0''.1035$

1889 Novembre 9 — α *Cygni*.

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
20h 4m 1s.02	20h 38m 0s.06	20h 41m 56s.36	21h 16m 5s.77	45° 4' 6".69
4 52 .04	31 58 .81	48 6 .87	15 13 .47	6 .52
5 49 .30	28 49 .08	51 27 .15	14 17 .40	6 .43
6 37 .09	26 29 .90	53 36 .35	13 28 .44	6 .21
7 48 .70	23 51 .03	56 14 .59	12 17 .21	6 .55
9 11 .69	21 20 .35	58 45 .13	10 54 .13	6 .79
9 33 .89	20 46 .39	59 19 .30	10 31 .13	6 .05
9 43 .51	20 31 .90	59 35 .12	10 22 .67	6 .36
10 19 .90	19 37 .28	21 0 28 .64	9 46 .08	6 .14

$\alpha - t = -9^s.54$ $\delta = 44^\circ\ 53'\ 26''.53$ $\epsilon_1 = 0''.0833$

1889 Novembre 9 — κ *Andromedae*.

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
22h 22m 23s.50	22h 33m 34s.46	0h 41m 11s.42	0h 52m 21s.87	45° 4' 5".98
22 54 .31	32 58 .45	41 46 .70	51 50 .60	5 .57
23 17 .27	32 32 .38	42 13 .32	51 28 .29	6 .02
23 42 .39	32 4 .25	42 41 .13	51 3 .12	5 .55
24 8 .87	31 34 .70	43 10 .51	50 36 .50	5 .33
24 30 .90	31 10 .50	43 35 .34	50 14 .40	5 .52
25 2 .89	30 35 .43	44 10 .20	49 41 .84	5 .31
26 7 .69	29 26 .18	45 19 .07	48 37 .02	5 .48

$\alpha - t = -10^s.35$ $\delta = 43^\circ\ 43'\ 34''.65$ $\epsilon_1 = 0''.0947$

1889 Novembre 15 — κ *Andromedae*.

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
22h 22m 7s.60	22h 33m 16s.15	0h 40m 55s.10	0h 52m 3s.24	45° 4' 6".07
22 38 .37	32 40 .48	41 30 .91	51 32 .93	6 .45
23 1 .17	32 14 .53	41 56 .65	51 9 .49	5 .76
23 26 .21	31 45 .97	42 25 .36	50 44 .53	6 .19
23 52 .71	31 16 .70	42 54 .60	50 18 .30	6 .00
24 14 .33	30 52 .52	43 18 .83	49 56 .11	6 .05
24 46 .87	30 17 .06	43 54 .32	49 23 .77	6 .24
25 51 .20	29 8 .14	45 3 .00	48 18 .14	5 .93

$\alpha - t = -9^s.22$ $\delta = 43^\circ\ 43'\ 35''.41$ $\epsilon_1 = 0''.0741$

1889 Novembre 17 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$5^h\ 24^m\ 52^s.33$	$5^h\ 35^m\ 49^s.57$	$7^h\ 45^m\ 48^s.32$	$7^h\ 56^m\ 46^s.09$	$45^\circ\ 4'\ 6''.57$
25 23 .90	35 13 .26	46 24 .76	56 14 .72	6 .64
25 42 .02	34 52 .26	46 45 .50	55 56 .32	6 .69
26 7 .57	34 23 .80	47 13 .84	55 30 .92	6 .36
26 32 .51	33 55 .90	47 41 .83	55 5 .76	6 .43
26 50 .87	33 35 .18	48 3 .06	54 46 .83	6 .90
27 23 .37	33 0 .23	48 37 .71	54 15 .48	6 .98
28 27 .39	31 52 .54	49 45 .41	53 11 .09	6 .24

$\alpha - t = -7^s.19$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 4''.74$ $\epsilon_1 = 0''.0907$

1889 Novembre 21 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$5^h\ 24^m\ 41^s.68$	$5^h\ 35^m\ 40^s.01$	$7^h\ 45^m\ 38^s.03$	$7^h\ 56^m\ 36^s.65$	$45^\circ\ 4'\ 7''.10$
25 11 .75	35 5 .08	46 13 .18	56 6 .56	7 .45
25 33 .97	34 39 .48	46 39 .13	55 43 .40	7 .38
25 59 .00	34 11 .36	47 6 .87	55 18 .92	7 .40
26 25 .18	33 42 .50	47 35 .82	54 52 .50	7 .02
26 46 .76	33 18 .29	47 59 .57	54 30 .68	7 .17
27 18 .49	32 43 .99	48 34 .22	53 58 .64	7 .02
28 22 .51	31 35 .91	49 41 .59	52 55 .46	7 .29

$\alpha - t = -7^s.42$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 4''.89$ $\epsilon_1 = 0''.0672$

1889 Novembre 30 — ψ^5 *Aurigae.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$5^h\ 24^m\ 4^s.54$	$5^h\ 35^m\ 0^s.55$	$7^h\ 44^m\ 59^s.17$	$7^h\ 55^m\ 56^s.01$	$45^\circ\ 4'\ 5''.93$
24 35 .72	34 24 .50	45 35 .27	55 24 .37	5 .79
24 53 .78	34 3 .69	45 55 .13	55 6 .07	5 .33
25 18 .84	33 35 .00	46 24 .57	54 40 .70	6 .05
25 44 .39	33 6 .70	46 52 .29	54 15 .86	6 .00
26 3 .46	32 46 .60	47 13 .40	53 57 .00	5 .67
26 35 .46	32 11 .83	47 48 .33	53 25 .25	5 .86
27 39 .12	31 3 .64	48 56 .58	52 21 .19	6 .19

$\alpha - t = -8^s.62$ $\delta = 43^\circ\ 41'\ 5''.65$ $\epsilon_1 = 0''.0937$

1889 Dicembre 1 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$6^h\ 57^m\ 7^s.16$	$7^h\ 7^m\ 31^s.28$	$9^h\ 25^m\ 19^s.38$	$9^h\ 35^m\ 43^s.10$	$45^\circ\ 4'\ 11''.69$
57 37 .46	6 57 .07	25 53 .30	35 13 .28	11 .52
57 55 .18	6 37 .01	26 13 .07	34 55 .56	11 .52
58 18 .97	6 10 .82	26 39 .80	34 31 .88	11 .55
58 43 .08	5 44 .11	27 6 .40	34 7 .35	11 .38
59 0 .93	5 24 .47	27 26 .14	33 49 .85	11 .86
59 31 .74	4 51 .49	27 59 .27	33 19 .18	11 .74
7 0 32 .93	3 47 .06	29 3 .26	32 18 .01	11 .14

$\alpha - t = -8^s.41$ $\delta = 43^\circ\ 32'\ 20''.19$ $\epsilon_1 = 0''.0791$

1889 Dicembre 3 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$6^h\ 57^m\ 0^s.89$	$7^h\ 7^m\ 23^s.05$	$9^h\ 25^m\ 9^s.53$	$9^h\ 35^m\ 31^s.50$	$45^\circ\ 4'\ 7''.12$
57 29 .77	6 50 .07	25 42 .32	35 2 .57	7 .12
57 51 .14	6 25 .91	26 6 .48	34 41 .09	7 .21
58 15 .21	5 59 .69	26 22 .62	34 17 .22	6 .64
58 40 .00	5 32 .07	27 0 .28	33 52 .48	7 .17
59 0 .81	5 9 .45	27 22 .79	33 31 .86	7 .14
59 31 .10	4 37 .10	27 55 .58	33 1 .23	6 .93
7 0 31 .86	3 32 .68	28 59 .60	32 0 .40	7 .10

$\alpha - t = -6^s.38$ $\delta = 43^\circ\ 32'\ 20''.15$ $\epsilon_1 = 0''.0659$

1889 Dicembre 20 — *36 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$7^h\ 49^m\ 47^s.78$	$8^h\ 0^m\ 40^s.36$	$10^h\ 11^m\ 32^s.30$	$10^h\ 22^m\ 24^s.23$	$45^\circ\ 4'\ 7''.76$
50 18 .30	0 5 .67	12 6 .94	21 54 .57	7 .76
50 40 .93	7 59 39 .91	12 32 .57	21 32 .00	7 .76
51 5 .30	59 12 .53	13 0 .34	21 7 .37	7 .81
51 31 .12	58 43 .68	13 29 .28	20 41 .24	7 .88
51 52 .89	58 19 .74	13 53 .07	20 19 .24	7 .69
52 24 .56	57 45 .70	14 27 .08	19 47 .79	7 .50
53 28 .10	56 38 .48	15 34 .54	18 44 .59	7 .71

$\alpha - t = +7^s.29$ $\delta = 43^\circ\ 40'\ 9''.17$ $\epsilon_1 = 0''.0393$

1889 Dicembre 21 — *10 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$7^h\ 8^m\ 32^s.49$	$7^h\ 16^m\ 9^s.13$	$10^h\ 29^m\ 43^s.26$	$10^h\ 37^m\ 20^s.52$	$45^\circ\ 4'\ 7''.33$
8 54 .62	15 45 .24	30 7 .29	36 57 .93	7 .38
9 8 .34	15 31 .03	30 21 .62	36 44 .58	7 .19
9 26 .21	15 12 .06	30 40 .27	36 26 .96	7 .26
9 42 .18	14 52 .92	30 59 .50	36 8 .69	7 .43
9 57 .58	14 39 .18	31 13 .76	35 55 .39	7 .50
10 20 .67	14 15 .35	31 37 .20	35 32 .58	7 .07

$\alpha - t = + 7^s.11$ $\delta = 42^\circ\ 12'\ 58''.38$ $\epsilon_1 = 0''.1230$

1889 Dicembre 23 — *10 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$7^h\ 8^m\ 25^s.53$	$7^h\ 16^m\ 3^s.90$	$10^h\ 29^m\ 35^s.91$	$10^h\ 37^m\ 14^s.11$	$45^\circ\ 4'\ 6''.02$
8 47 .31	15 40 .80	29 59 .29	36 52 .46	6 .29
9 3 .39	15 23 .38	30 16 .72	36 36 .10	6 .31
9 21 .28	15 4 .50	30 35 .23	36 18 .38	6 .10
9 39 .55	14 44 .85	30 54 .88	35 59 .50	6 .29
9 55 .57	14 28 .48	31 10 .96	35 44 .33	6 .14
10 17 .80	14 5 .26	31 34 .67	35 21 .53	6 .21

$\alpha - t = + 6^s.82$ $\delta = 42^\circ\ 12'\ 58''.38$ $\epsilon_1 = 0''.0421$

1890 Febbraio 9 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$6^h\ 52^m\ 10^s.57$	$7^h\ 2^m\ 34^s.70$	$9^h\ 20^m\ 16^s.29$	$9^h\ 30^m\ 40^s.33$	$45^\circ\ 4'\ 9''.86$
52 40 .73	2 0 .34	20 50 .27	30 10 .67	10 .02
52 58 .16	1 40 .51	21 10 .27	29 53 .03	10 .26
53 22 .43	1 13 .88	21 37 .27	29 29 .06	10 .19
53 46 .46	0 47 .22	22 3 .67	29 4 .75	9 .42
54 4 .30	0 27 .71	22 22 .99	28 46 .90	10 .00
54 34 .83	6 59 55 .19	22 56 .52	28 16 .37	9 .44
55 36 .07	58 50 .18	24 0 .83	27 14 .88	9 .84

$\alpha - t = + 3^s.78$ $\delta = 43^\circ\ 32'\ 26''.33$ $\epsilon_1 = 0''.1103$

1890 Marzo 1 — *10 Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$7^h\ 3^m\ 34^s.58$	$7^h\ 11^m\ 10^s.52$	$10^h\ 24^m\ 42^s.19$	$10^h\ 32^m\ 17^s.77$	$45^\circ\ 4'\ 8''.62$
3 56 .47	10 47 .30	25 5 .67	31 56 .25	8 .83
4 12 .67	10 29 .99	25 22 .90	31 39 .85	8 .74
4 30 .31	10 11 .07	25 41 .63	31 22 .05	8 .93
4 49 .13	9 51 .64	26 1 .05	31 3 .28	8 .36
5 4 .57	9 35 .42	26 17 .20	30 47 .80	8 .36
5 27 .23	9 12 .10	26 20 .93	30 25 .06	8 .26
6 12 .09	8 25 .47	27 27 .43	29 40 .16	9 .00

$\alpha - t = - 1^s.00$ $\delta = 42^\circ\ 13'\ 6''.13$ $\epsilon_1 = 0''.1010$

1890 Marzo 10 — *31 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$6^h\ 49^m\ 37^s.70$	$7^h\ 0^m\ 5^s.70$	$9^h\ 17^m\ 35^s.47$	$9^h\ 28^m\ 2^s.78$	45° 4′ 4″.29
50 6 .70	6 59 32 .45	18 9 .28	27 33 .27	4 .90
50 28 .39	59 8 .18	18 33 .03	27 11 .19	3 .80
50 51 .80	58 41 .82	18 59 .41	26 47 .87	4 .26
51 17 .02	58 14 .13	19 27 .02	26 23 .33	4 .36
51 37 .59	57 51 .51	19 49 .40	26 2 .29	4 .36
52 8 .04	57 18 .79	20 22 .35	25 31 .64	4 .26
53 9 .20	56 14 .89	21 26 .42	24 31 .11	3 .97

$\alpha - t = + 4^s.51$ $\delta = 43^\circ\ 32'\ 30''.78$ $\epsilon_1 = 0''.1139$

1890 Marzo 28 — *36 Lyncis.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Sud	Oculare Nord	Oculare Nord	Oculare Sud	
$7^h\ 42^m\ 54^s.60$	$7^h\ 53^m\ 51^s.67$	$10^h\ 4^m\ 30^s.72$	$10^h\ 15^m\ 26^s.88$	45° 4′ 10″.00
43 24 .63	53 16 .97	5 5 .04	14 56 .62	9 .74
43 47 .40	52 51 .18	5 31 .09	14 34 .02	9 .86
44 11 .68	52 23 .70	5 58 .85	14 9 .50	10 .02
44 37 .95	51 54 .58	6 27 .40	13 43 .69	9 .93
44 59 .80	51 30 .58	6 51 .19	13 21 .74	9 .74
45 31 .36	50 56 .57	7 25 .63	12 50 .15	9 .93
46 34 .55	49 48 .90	8 33 .37	11 46 .66	10 .29

$\alpha - t = + 3^s.51$ $\delta = 43^\circ\ 40'\ 21''.28$ $\epsilon_1 = 0''.0625$

1890 Marzo 29 — λ *Ursae Majoris.*

Verticale Est		Verticale Ovest		φ'
Oculare Nord	Oculare Sud	Oculare Sud	Oculare Nord	
$8^h\ 42^m\ 6^s.37$	$8^h\ 52^m\ 12^s.33$	$11^h\ 13^m\ 48^s.24$	$11^h\ 23^m\ 55^s.25$	45° 4′ 9″.30
42 35 .89	51 39 .09	14 21 .62	23 25 .68	9 .28
42 52 .90	51 19 .92	14 40 .86	23 8 .36	9 .28
43 16 .57	50 53 .82	15 6 .79	22 44 .80	9 .09
43 39 .96	50 28 .00	15 32 .78	22 21 .50	9 .51
43 57 .63	50 8 .86	15 51 .67	22 4 .16	9 .49
44 27 .28	49 37 .09	16 24 .16	21 34 .03	9 .51
45 27 .28	48 33 .76	17 27 .04	20 34 .16	9 .44

$\alpha - t = + 3^s.00$ $\delta = 43^\circ\ 27'\ 51''.94$ $\epsilon_1 = 0''.0530$

QUADRO SECONDO

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI

DATA	STELLA	φ′	*i*	OROLOGIO	AZIMUT	φ
1888 Gennaio 19	β *Aurigae*	45° 4′ 8″.978	— 1″.248		— 0″.024	45° 4′ 7″.706
„ „ 19	λ *Ursae Majoris*	9 .440	— 1 .264		— 0 .000	8 .176
„ „ 20	β *Aurigae*	9 .339	— 0 .566		— 0 .000	8 .773
„ „ 22	β *Aurigae*	7 .532	+ 0 .295		— 0 .000	7 .827
„ Maggio 3	33 *Bootis*	9 .175	— 1 .000	— 0″.006	— 0 .760	7 .409
„ „ 6	33 *Bootis*	8 .625	— 0 .380	+ 0 .020	— 0 .736	7 .529
„ „ 9	33 *Bootis*	7 .894	+ 0 .443	+ 0 .045	— 0 .760	7 .622
„ „ 25	33 *Bootis*	10 .156	— 1 .880	+ 0 .008	— 0 .570	7 .714
„ „ 29	σ *Herculis*	11 .209	— 3 .212	— 0 .721	— 0 .546	6 .680
„ Giugno 2	33 *Bootis*	8 .829	— 1 .045	— 0 .048	— 0 .594	7 .142
„ „ 5	33 *Bootis*	4 .607	+ 3 .143	+ 0 .040	— 0 .522	7 .268
„ „ 5	σ *Herculis*	6 .084	+ 2 .229	+ 0 .481	— 0 .522	8 .272
„ „ 5	δ *Cygni*	7 .261	+ 1 .026	+ 0 .048	— 0 .499	7 .836
„ „ 7	δ *Cygni*	10 .148	— 1 .274	+ 0 .006	— 0 .546	8 .334
„ „ 8	σ *Herculis*	7 .971	+ 0 .921	— 0 .080	— 0 .546	8 .266
„ „ 8	δ *Cygni*	8 .747	— 0 .632	— 0 .007	— 0 .546	7 .562
„ Novembre 19	κ *Andromedae*	4 .325	+ 4 .581		— 0 .000	8 .906
„ „ 21	κ *Andromedae*	4 .025	+ 3 .429	+ 0 .953	— 0 .024	8 .383
„ „ 22	κ *Andromedae*	4 .201	+ 2 .487	+ 1 .088	— 0 .024	7 .752
„ „ 23	κ *Andromedae*	5 .217	+ 1 .676	+ 1 .085	— 0 .024	7 .954
„ „ 24	α *Cygni*	7 .411	+ 0 .070	+ 0 .169	— 0 .024	7 .625
„ „ 25	κ *Andromedae*	6 .850	+ 1 .674	— 0 .032	— 0 .024	8 .468
„ Dicembre 1	α *Cygni*	5 .864	+ 2 .045	+ 0 .023	— 0 .024	7 .908
„ „ 1	ι *Andromedae*	5 .049	+ 3 .041	+ 0 .311	— 0 .024	8 .377

DATA	STELLA	φ'	i	OROLOGIO	AZIMUT	φ
1888 Dicembre 1	ν *Persei*	45° 4' 4''.378	+ 3''.345	+ 0''.370	— 0''.024	45° 4' 8''.069
" " 2	ι *Andromedae*	5 .545	+ 1 .746	+ 0 .537	— 0 .024	7 .840
" " 3	κ *Andromedae*	6 .690	+ 1 .277	+ 0 .283	— 0 .024	8 .226
" " 3	ν *Persei*	5 .116	+ 1 .879	+ 0 .608	— 0 .024	7 .579
" " 4	κ *Andromedae*	7 .196	+ 0 .749	+ 0 .321	— 0 .024	8 .242
" " 5	ι *Andromedae*	7 .091	— 0 .049	+ 0 .612	— 0 .024	7 .630
" " 6	ι *Andromedae*	7 .636	— 0 .366	+ 0 .643	— 0 .024	7 .889
" " 7	ι *Andromedae*	7 .184	— 0 .171	+ 0 .649	— 0 .024	7 .638
" " 7	ν *Persei*	6 .385	+ 0 .298	+ 0 .772	— 0 .024	7 .431
" " 8	ι *Andromedae*	8 .130	— 0 .780	+ 0 .651	— 0 .024	7 .977
" " 9	ι *Andromedae*	7 .340	— 0 .191	+ 0 .643	— 0 .024	7 .768
" " 10	ι *Andromedae*	7 .356	+ 0 .163	+ 0 .614	— 0 .024	8 .109
" " 10	ν *Persei*	6 .526	+ 0 .727	+ 0 .730	— 0 .024	7 .959
" " 13	ν *Persei*	8 .952	— 2 .563	+ 0 .774	— 0 .024	7 .139
1889 Gennaio 7	ν *Persei*	5 .359	+ 1 .012	+ 1 .409	— 0 .024	7 .746
" " 8	ν *Persei*	6 .136	+ 0 .078	+ 1 .200	— 0 .000	7 .414
" " 8	ψ^5 *Aurigae*	7 .226	+ 0 .383	+ 0 .573	— 0 .000	8 .182
" " 17	ν *Persei*	3 .272	+ 3 .837	+ 0 .571	— 0 .000	7 .680
" " 17	ψ^5 *Aurigae*	3 .857	+ 3 .171	+ 0 .271	— 0 .000	7 .299
" " 18	ν *Persei*	4 .209	+ 3 .078	+ 0 .588	— 0 .000	7 .875
" " 18	ψ^5 *Aurigae*	4 .848	+ 3 .379	+ 0 .281	— 0 .000	8 .508
" " 19	ν *Persei*	3 .784	+ 3 .222	+ 0 .630	— 0 .000	7 .736
" " 24	ε *Aurigae*	3 .792	+ 4 .730	+ 0 .375	— 0 .000	8 .897
" " 25	ε *Aurigae*	6 .172	+ 1 .300	+ 0 .432	— 0 .000	7 .904
" " 27	ε *Aurigae*	6 .558	+ 0 .987	+ 0 .461	— 0 .000	8 .006
" " 31	ε *Aurigae*	3 .908	+ 3 .925	+ 0 .454	— 0 .024	8 .263
" Febbraio 1	ε *Aurigae*	7 .506	+ 0 .320	+ 0 .566	— 0 .024	8 .368
" " 5	ε *Aurigae*	7 .465	— 0 .374	+ 0 .609	— 0 .024	7 .676
" " 6	ε *Aurigae*	8 .375	— 1 .211	+ 0 .595	— 0 .024	7 .735
" " 11	ε *Aurigae*	8 .052	— 0 .556	+ 0 .552	— 0 .000	8 .048
" " 13	ε *Aurigae*	6 .781	+ 1 .069	+ 0 .526	— 0 .000	8 .376
" " 16	ε *Aurigae*	5 .742	+ 1 .798	+ 0 .556	— 0 .000	8 .096

DATA			STELLA	φ'	i	OROLOGIO	AZIMUT	φ
1889	Febbraio	19	ψ⁵ *Aurigae*	45° 4′ 6″.041	+ 2″.338	— 0″.019	— 0″.000	45° 4′ 8″.360
„	„	23	ψ⁵ *Aurigae*	4 .932	+ 0 .576	— 0 .073	— 0 .000	8 .435
„	„	24	ψ⁵ *Aurigae*	8 .541	— 0 .393	— 0 .139	— 0 .000	8 .009
„	Marzo	6	ψ⁵ *Aurigae*	5 .560	+ 2 .748	— 0 .187	— 0 .024	8 .097
„	„	6	μ *Ursae Majoris*	5 .710	+ 2 .579	— 0 .413	— 0 .024	7 .852
„	„	12	*31 Lyncis*	7 .089	+ 1 .754	— 0 .218	— 0 .024	8 .601
„	„	12	*58 Ursae Majoris*	7 .378	+ 1 .810	— 0 .180	— 0 .024	8 .984
„	„	13	*31 Lyncis*	8 .135	+ 0 .542	— 0 .183	— 0 .024	8 .470
„	„	14	*10 Ursae Majoris*	7 .536	+ 0 .806	— 0 .481	— 0 .024	7 .837
„	„	16	*10 Ursae Majoris*	9 .564	— 1 .258	— 0 .807	— 0 .024	7 .475
„	„	17	*31 Lyncis*	10 .381	— 1 .780	— 0 .434	— 0 .024	8 .143
„	„	17	*58 Ursae Majoris*	10 .305	— 2 .162	— 0 .357	— 0 .024	7 .762
„	„	25	*31 Lyncis*	7 .127	+ 1 .548	— 0 .403	— 0 .024	8 .248
„	„	25	*58 Ursae Majoris*	7 .001	+ 1 .365	— 0 .332	— 0 .024	8 .010
„	„	27	μ *Ursae Majoris*	6 .197	+ 2 .016	— 0 .630	— 0 .024	7 .559
„	„	28	μ *Ursae Majoris*	7 .468	+ 1 .097	— 0 .255	— 0 .024	8 .286
„	Maggio	31	*33 Bootis*	5 .518	+ 1 .168	— 0 .055	— 0 .000	6 .631
„	Giugno	1	*33 Bootis*	6 .673	+ 0 .797	— 0 .046	— 0 .000	7 .424
„	„	4	σ *Herculis*	9 .225	— 1 .194	— 0 .552	— 0 .000	7 .479
„	„	6	*33 Bootis*	7 .494	— 1 .234	— 0 .035	— 0 .000	6 .225
„	„	6	*Gr. 2533*	10 .765	— 2 .100	— 0 .589	— 0 .000	8 .076
„	„	6	α *Cygni*	10 .906	— 3 .139	— 0 .035	— 0 .000	7 .732
„	„	8	*Gr. 2533*	11 .180	— 2 .455	— 0 .729	— 0 .000	7 .996
„	„	15	σ *Herculis*	8 .595	+ 0 .937	— 1 .236	— 0 .000	8 .296
„	„	15	δ *Cygni*	8 .353	— 0 .545	— 0 .108	— 0 .000	7 .700
„	„	17	σ *Herculis*	9 .486	— 0 .455	— 1 .351	— 0 .000	7 .680
„	„	17	α *Cygni*	9 .741	— 1 .143	— 0 .098	— 0 .000	8 .500
„	„	19	σ *Herculis*	9 .018	— 0 .154	— 1 .339	— 0 .000	7 .525
„	„	19	δ *Cygni*	8 .907	— 1 .057	— 0 .117	— 0 .000	7 .733
„	Luglio	28	δ *Cygni*	10 .731	— 2 .528	— 0 .009	— 0 .000	8 .194
„	„	29	*Gr. 2533*	9 .404	— 0 .431	— 0 .127	— 0 .006	8 .846
„	„	31	*R Lyrae*	5 .434	+ 2 .934	— 0 .231	— 0 .000	8 .137

DATA	STELLA	φ′	*i*	OROLOGIO	AZIMUT	φ
1889 Settembre 14	δ *Cygni*	45° 4′ 8″.677	— 0″.730	+ 0″.049	— 0″.000	45° 4′ 7″.996
" " 17	ξ *Cygni*	11 .500	— 3 .242	— 0 .405	— 0 .000	7 .753
" " 18	ξ *Cygni*	12 .328	— 4 .541	— 0 .208	— 0 .024	7 .555
" " 22	ξ *Cygni*	6 .581	+ 1 .835	— 0 .185	— 0 .024	8 .207
" " 25	ξ *Cygni*	7 .645	+ 0 .583	— 0 .294	— 0 .047	7 .887
" " 26	ξ *Cygni*	7 .911	+ 0 .254	— 0 .359	— 0 .047	7 .759
" " 27	ξ *Cygni*	9 .839	— 1 .930	— 0 .297	— 0 .047	7 .565
" Ottobre 3	ξ *Cygni*	9 .544	— 1 .522		— 0 .071	7 .951
" " 14	ξ *Cygni*	8 .785	— 0 .564	— 0 .549	— 0 .024	7 .648
" " 15	ξ *Cygni*	10 .914	— 2 .763	— 0 .641	— 0 .024	7 .486
" " 16	ξ *Cygni*	12 .039	— 3 .868	— 0 .643	— 0 .024	8 .504
" " 23	δ *Cygni*	8 .051	— 0 .208	— 0 .057	— 0 .024	7 .762
" " 23	ι *Andromedae*	8 .280	— 0 .000	— 0 .647	— 0 .024	7 .609
" Novembre 7	ι *Andromedae*	8 .072	— 1 .104	+ 0 .122	— 0 .024	7 .066
" " 8	α *Cygni*	10 .910	— 2 .819	+ 0 .034	— 0 .024	8 .101
" " 8	κ *Andromedae*	10 .031	— 2 .695	+ 0 .327	— 0 .024	7 .639
" " 9	α *Cygni*	6 .416	+ 2 .021	+ 0 .046	— 0 .024	8 .459
" " 9	κ *Andromedae*	5 .595	+ 2 .257	+ 0 .352	— 0 .024	8 .180
" " 15	κ *Andromedae*	6 .086	+ 1 .649	+ 0 .293	— 0 .024	8 .004
" " 17	ψ^5 *Aurigae*	6 .601	+ 1 .226	+ 0 .429	— 0 .024	8 .232
" " 21	ψ^5 *Aurigae*	7 .229	+ 0 .792	+ 0 .254	— 0 .024	8 .251
" " 30	ψ^5 *Aurigae*	5 .852	+ 1 .687	+ 0 .460	— 0 .024	7 .975
" Dicembre 1	*31 Lyncis*	11 .550	— 3 .493	+ 0 .246	— 0 .024	8 .279
" " 3	*31 Lyncis*	7 .054	+ 0 .086	+ 0 .672	— 0 .000	7 .812
" " 20	*36 Lyncis*	7 .734	— 0 .194	+ 0 .364	— 0 .024	7 .880
" " 21	*10 Ursae Majoris*	7 .309	— 0 .870	+ 0 .532	— 0 .024	6 .947
" " 23	*10 Ursae Majoris*	6 .194	+ 0 .019	+ 0 .710	— 0 .024	6 .899
1890 Febbraio 9	*31 Lyncis*	9 .879	— 3 .178	+ 0 .672	— 0 .000	7 .373
" Marzo 1	*10 Ursae Majoris*	8 .638	— 2 .519	+ 1 .250	— 0 .000	7 .369
" " 10	*31 Lyncis*	4 .275	+ 3 .156	+ 0 .716	— 0 .000	8 .147
" " 28	*36 Lyncis*	9 .939	— 2 .245	+ 0 .096	— 0 .000	7 .790
" " 29	λ *Ursae Majoris*	9 .362	— 2 .191	+ 0 .103	— 0 .000	7 .274

PARTE SECONDA

Osservazioni eseguite coll'uso del filo mobile.

I metodi di Bessel e di Struve, basati sull'osservazione dei passaggi ai fili fissi del reticolo, cessano di essere applicabili utilmente quando la distanza zenitale meridiana dell'astro arrivi solo a pochi minuti di arco. In questo caso è preferibile osservare (come ha suggerito Struve) mediante un filo mosso da una vite micrometrica, la quale permetta di assegnare con precisione ad ogni istante la distanza angolare dal filo medio, e quindi (noto l'errore di collimazione) dall'asse ottico. Sostanzialmente questo metodo non è che una modificazione di quello di Bessel, analoga a quella che si pratica nelle osservazioni meridiane, quando si sostituisce il filo mobile ai fili fissi sulle stelle polari. Ha il vantaggio sopra l'altro metodo di potersi applicare anche a stelle culminanti a Nord dello zenit, di esigere pochi minuti per un numero anche considerevole di puntate, infine di attenuare tutte le cause di errore che dipendono dalla maggior durata di un'osservazione, perniciosissime fra tutte le variazioni dell'azimut istrumentale nell'intervallo fra il passaggio ad Est e quello ad Ovest. Questi notevoli meriti del metodo sono accompagnati da difetti non meno degni di nota: primo fra gli altri l'enorme influsso dell'azimut sulle osservazioni, tale da rivelarsi ad una prima occhiata nella serie delle latitudini date dalle singole puntate, quando appena la deviazione dell'asse orizzontale dal primo verticale sia sensibile. In queste condizioni sarebbe desiderabile poter determinare colla massima precisione tale errore di azimut, per poi tenerne conto nel calcolo della latitudine; invece, quando non si disponga di una mira nel primo verticale, non è possibile ricavare dalle osservazioni stesse il valore dell'azimut, e bisogna (come ho fatto io) limitarsi a calcolarne empiricamente l'effetto, deducendolo *a posteriori* dall'andamento delle latitudini date dalle singole puntate.

Prima condizione per l'uso razionale di questo metodo è la conoscenza esatta del valore di una rivoluzione del micrometro, de' suoi errori periodici e progressivi, e della posizione del filo mobile relativamente ai fili fissi. Nel corso delle osservazioni di latitudine non fu necessaria altra ricerca che quest'ultima; lo studio accurato del micrometro fu fatto in seguito, durante le osservazioni per l'azimut di Monte Vesco, ed i risultati ne sono diffusamente esposti nella relazione che di quelle osser-

vazioni ho pubblicato. Senza ripetere la discussione contenuta nelle pagine 5-14 di quella Memoria, basterà che qui sia riportata la formula definitiva

$$F = 0'',5725\ (l' - m),$$

che serve per calcolare la distanza angolare F di uno dei tre fili mobili dal filo di mezzo del reticolo fisso, quando sia l' la lettura del filo mobile ed m quella del filo di mezzo. Entrambe queste letture s'intendono corrette per gli errori periodici della vite, che sono molto piccoli, e rappresentati dalla formula

$$\epsilon = + 0^p,1297 \sin(\varphi - 62^\circ,83).$$

Di errori progressivi non risultò traccia: la vite è di una rara perfezione da un capo all'altro della sua corsa.

Per assicurarmi dell'invariabilità di posizione del reticolo fisso rispetto all'origine della numerazione sul reticolo mobile, ho osservato undici volte in dieci sere (nelle quali ho pure fatto osservazioni di latitudine con questo metodo) le coincidenze del filo mobile M coi 17 fili fissi. Confrontando il quadro delle coincidenze, che dò qui in appresso, col quadro analogo a pag. 6 del citato mio lavoro, si vede che la posizione reciproca dei due reticoli non ha mutato. L'invariabilità di forma del reticolo fisso è pure attestata dal quadro successivo, che dà gl'intervalli fra i fili fissi contigui, espressi in parti del micrometro.

COINCIDENZE DEL FILO MOBILE COI FILI FISSI

DATA	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
1888 Novembre 30	0.592	1.956	2.754	3.840	4.929	5.703	7.077	9.775	13.791	17.828	20.500	21.836	23.771	25.872	26.952	27.921	29.249
1889 Gennaio 5	606	966	762	840	924	717	087	766	781	810	488	839	766	879	944	920	235
" " 7	597	952	750	830	913	717	080	761	787	811	500	839	760	883	949	924	241
" " 28	594	961	750	835	925	718	079	768	787	820	496	841	769	889	958	932	259
" Marzo 14	603	958	764	846	924	722	080	769	794	818	506	841	768	887	952	921	236
" " 16	601	967	761	837	934	721	078	764	800	826	500	851	772	879	943	919	250
" Maggio 17	602	964	757	830	923	721	082	767	785	831	503	840	764	891	950	929	258
" Novembre 1	602	958	769	853	922	719	070	776	788	833	500	852	767	884	964	929	246
" " 15	600	965	762	846	914	724	079	773	793	833	500	847	775	882	949	929	243
	607	961	757	833	919	717	077	769	795	816	504	842	779	886	954	927	251
" " 16	597	996	765	834	926	721	074	766	798	819	510	844	770	891	953	928	239

INTERVALLI DELLE SINGOLE COPPIE DI FILI CONTIGUI

Intervalli dei fili	1888 Novemb. 30	1889 Gennaio 5	Gennaio 7	Gennaio 28	Marzo 14	Marzo 16	Maggio 17	Novembre 1	Novemb. 15 luce diurna	Novemb. 15 luce lampada	Novemb. 16
II—I	1.364	1.360	1.355	1.367	1.355	1.366	1.362	1.356	1.365	1.354	1.399
III—II	0.798	0.796	0.798	0.789	0.806	0.794	0.793	0.811	0.797	0.796	0.769
IV—III	1.086	1.078	1.080	1.085	1.082	1.074	1.073	1.084	1.084	1.076	1.069
V—IV	1.089	1.084	1.083	1.090	1.078	1.097	1.093	1.069	1.068	1.086	1.092
VI—V	0.774	0.793	0.804	0.793	0.798	0.787	0.798	0.797	0.810	0.798	0.795
VII—VI	1.374	1.370	1.363	1.361	1.358	1.357	1.361	1.351	1.355	1.360	1.353
VIII—VII	2.698	2.679	2.681	2.689	2.689	2.686	2.685	2.706	2.694	2.692	2.692
IX—VIII	4.016	4.015	4.026	4.019	4.025	4.034	4.018	4.012	4.020	4.026	4.032
X—IX	4.037	4.029	4.024	4.033	4.024	4.026	4.046	4.045	4.040	4.021	4.021
XI—X	2.672	2.678	2.689	2.676	2.688	2.674	2.672	2.667	2.667	2.688	2.691
XII—XI	1.336	1.351	1.339	1.345	1.335	1.351	1.337	1.352	1.347	1.338	1.334
XIII—XII	1.935	1.927	1.921	1.928	1.927	1.921	1.924	1.915	1.928	1.937	1.926
XIV—XIII	2.101	2.113	2.123	2.120	2.119	2.107	2.127	2.117	2.107	2.107	2.121
XV—XIV	1.080	1.065	1.066	1.069	1.065	1.064	1.059	1.080	1.067	1.068	1.062
XVI—XV	0.969	0.976	0.975	0.974	0.969	0.976	0.979	0.965	0.980	0.973	0.975
XVII—XVI	1.328	1.315	1.317	1.327	1.315	1.331	1.329	1.317	1.314	1.324	1.311

L'accordo di questi numeri *inter se* e con gli analoghi determinati poi in occasione della misura dell'azimut è veramente superiore ad ogni aspettazione, e dà un'alta idea della solida costruzione del pezzo oculare, che, a parer mio, non raramente costituisce il tallone d'Achille di istrumenti consimili.

Nei quadri successivi è riunito tutto ciò che importa conoscere delle riduzioni fatte per ricavare la latitudine dalle dodici osservazioni al filo mobile. La prima colonna contiene i tempi siderali degli appulsi (tempi osservati al cronografo, e corretti per l'errore dell'orologio); la seconda le corrispondenti letture micrometriche, corrette d'error periodico; la terza le distanze angolari v dal filo di mezzo, calcolate colla formula data sopra; la quarta gli angoli orari t; la quinta le espressioni $R = \frac{2 \sin \varphi \cos \delta \sin^2 \frac{t}{2}}{\sin 1''}$; la sesta le differenze R — v, le quali, se non esistessero gli errori strumentali, dovrebbero essere null'altro che $\varphi - \delta$, e presentare solo le piccole divergenze residue.

È noto (1) che nell'immediata prossimità dello zenit, il coefficiente dell'azimut varia con tale rapidità, da rendere sensibilmente diverse le $\varphi - \delta$ date dalle successive puntate. Ciò si verifica anche nel mio caso; e perchè non ho altro mezzo di valutare l'azimut fuorchè da questo suo più cospicuo effetto, ecco in quale maniera ne tengo conto. Poste le R — v come termini noti di altrettante equazioni di condizione della forma

$$n = x + ay,$$

ricavo coi minimi quadrati i valori di x ed y da ciascun sistema (essendo il coefficiente a dell'azimut uguale a $-\sin t \cos \delta$). In fine ad ogni quadro sono date le x e y risultanti da tale calcolo: le R — v calcolate in base alla formula sono poste nella colonna settima, di fianco alle R — v osservate; e gli errori residui scritti nell'ottava ed ultima colonna mostrano come la rappresentazione dei risultati sia soddisfacente.

È con questi residui che si è calcolato l'errore medio ϵ_1 di una osservazione, scritto in seguito ai valori di x e y.

Per avere dalle x la distanza zenitale che si sarebbe osservata in primo verticale, occorre diminuirla di $y \sin t \cos \delta$. La media delle due distanze così determinate a Verticale Est e a Verticale Ovest, sommata colla declinazione apparente, dà una latitudine φ' che, corretta per l'inclinazione dell'asse orizzontale, diventa la latitudine definitiva. Il quadro successivo, intitolato: " Risultati delle Osservazioni „ contiene questi calcoli finali.

Non è inutile insistere sul carattere affatto empirico dell'incognita y, che rappresenterebbe realmente l'azimut strumentale nel solo caso che le divergenze fra i valori osservati di R — v provenissero esclusivamente dal diverso effetto di questa correzione. Ora, nel caso nostro specialmente, si è molto lungi dal ritenere soddisfatta questa condizione; di un andamento sistematico delle R — v si potrebbe dare la colpa anche agli spostamenti progressivi del pilastro, che le variazioni dell'inclinazione dell'asse rivelano chiaramente. Ad ogni modo la natura del problema non ammette una diversa trattazione, come ho verificato io stesso, facendo molti calcoli in ipotesi differenti; e del resto l'esiguità dei residui e la distribuzione irregolare dei loro segni provano che la compensazione è riuscita soddisfacente.

(1) Una discussione molto accurata degli effetti di errori strumentali sulle osservazioni di questo genere si trova nell'eccellente: " Lehrbuch der Sphärischen Astronomie in ihrer Anwendung auf Geographische Ortsbestimmung „ di Herr e Tinter (Wien, 1887), pag. 452 e seguenti.

1888 Novembre 25 — *α Cygni.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
20^h 6^m 31^s.14	1783^p.39	230^p.99	31^m 6^s.19	951.33	720.34	720.14	+ 0.20
7 45.88	1656.19	158.16	29 51.45	876.73	718.57	719.74	— 1.17
8 43.94	1558.07	101.99	28 53.39	820.90	718.91	719.43	— 0.52
9 34.10	1475.93	54.97	3.23	774.12	719.15	719.16	— 0.01
10 16.46	1409.54	17.13	27 20.87	735.57	718.44	718.93	— 0.49
37.10	1379.92	0.00	0.23	717.32	717.32	718.82	— 1.50
12 2.07	1245.73	76.82	25 35.26	644.16	720.98	718.37	+ 2.61
58.75	1164.62	123.26	24 38.58	597.48	720.74	718.06	+ 2.68
13 50.17	1099.48	160.55	23 47.16	556.71	717.26	717.79	— 0.53
14 44.52	1025.76	202.76	22 52.81	514.98	717.74	717.49	+ 0.25
15 21.86	977.32	230.48	15.47	487.50	717.98	717.29	+ 0.69
16 0.81	931.40	256.78	21 36.52	459.52	716.30	717.08	— 0.78
17 18.74	837.92	310.41	20 18.59	405.98	716.39	716.66	— 0.27
18 6.94	782.59	341.79	19 30.39	374.53	716.50	716.42	+ 0.08
19 17.84	708.46	384.41	18 19.49	330.55	714.96	716.02	— 1.06
20 12.91	650.52	417.58	17 24.42	298.30	715.88	715.72	+ 0.16
21 35.76	572.66	462.16	16 1.57	252.85	715.01	715.28	— 0.27

$x = 710.08$ $y = + 104.98680$ $\epsilon_1 = 0''.2771$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
20^h 46^m 30^s.12	2278^p.30	514^p.38	8^m 52^s.79	77.65	592.03	592.51	— 0.48
47 44.63	2237.32	490.92	10 7.30	100.88	591.80	592.14	— 0.34
48 25.21	2212.76	476.86	47.88	114.81	591.67	591.96	— 0.29
49 6.77	2185.36	461.17	11 29.44	130.02	591.19	591.77	— 0.68
12.74	2185.36	461.17	35.40	132.26	593.43	591.74	+ 1.69
50 20.79	2134.72	432.18	12 43.46	159.41	591.59	591.42	+ 0.17
58.79	2104.50	414.88	13 21.46	175.68	590.56	591.24	— 0.68
52 8.27	2050.98	384.22	14 30.94	207.44	591.66	590.91	+ 0.75
41.76	2020.72	366.91	15 4.43	223.70	590.60	590.75	— 0.15
54 32.11	1919.01	308.69	16 54.78	281.60	590.29	590.23	+ 0.06
55 35.69	1855.59	272.38	17 58.36	317.87	590.25	589.93	+ 0.32
56 42.72	1783.39	231.04	19 5.39	358.69	589.73	589.62	+ 0.11
57 38.70	1719.41	194.41	20 1.37	394.59	589.00	589.36	— 0.36
58 35.68	1653.70	156.80	58.35	432.92	589.72	589.09	+ 0.63
59 52.33	1556.39	101.09	22 15.00	487.14	588.23	588.73	— 0.50
21 0 40.37	1493.87	65.29	23 3.04	522.86	588.15	588.50	— 0.35
1 28.81	1428.29	27.75	51.48	560.06	587.81	588.27	— 0.46
2 4.80	1379.92	0.00	24 27.47	588.59	588.59	588.10	+ 0.49

$x = 595.02$ $y = + 91.65279$ $\epsilon_1 = 0''.1435$

1889 Gennaio 5 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
5^h 23^m $57^s.80$	$977^p.32$	$230^p.49$	27^m $21^s.83$	735.94	505.45	504.09	+ 1.36
25 12.69	1086.58	167.94	26 6.94	670.44	502.54	503.95	— 1.45
26 27.98	1197.68	104.33	24 51.65	607.59	503.26	503.80	— 0.54
27 17.96	1264.18	66.29	1.67	567.58	501.29	503.70	— 2.41
58.60	1323.95	32.04	23 21.03	536.09	504.05	503.63	+ 0.42
29 7.49	1414.37	19.72	22 12.14	484.70	504.42	503.59	+ 0.83
30 25.25	1508.64	73.69	20 54.38	429.81	503.50	503.34	+ 0.16
31 13.22	1566.21	106.65	6.41	397.55	504.20	503.25	+ 0.95
32 8.28	1629.19	142.71	19 11.35	362.13	504.84	503.15	+ 0.69
33 27.43	1709.44	188.65	17 52.20	314.11	502.76	502.99	— 0.23
34 40.64	1783.39	230.99	16 38.99	272.69	503.68	502.85	+ 0.83
35 57.90	1852.61	270.61	15 21.73	232.16	502.77	502.70	+ 0.07
37 0.60	1903.50	299.75	14 19.03	201.64	501.39	502.58	— 1.19
53.20	1947.32	324.84	13 26.43	177.72	502.56	502.48	+ 0.08
38 52.20	1989.57	349.02	12 27.43	152.67	501.69	502.47	— 0.78

$x = 500.92$ $y = + 37.59831$ $\epsilon_1 = 0''.2681$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
6^h 0^m $29^s.57$	$708^p.46$	$384^p.41$	9^m $9^s.94$	82.67	467.08	469.04	— 1.96
35.35	708.46	384.41	15.72	84.40	468.81	469.03	— 0.12
1 28.07	735.32	369.03	10 8.44	101.18	470.21	468.98	+ 1.23
2 31.66	774.75	346.46	11 12.03	123.42	469.88	468.93	+ 0.95
3 9.80	799.88	332.07	50.17	137.84	469.91	468.89	+ 1.02
4 9.32	845.33	306.05	12 49.69	161.90	467.95	468.84	— 0.89
5 1.69	882.39	284.84	13 42.06	184.66	469.50	468.79	+ 0.71
6 20.92	949.42	246.46	15 1.29	221.98	468.44	468.72	— 0.28
51.73	977.32	230.49	32.10	237.41	467.90	468.69	— 0.79
7 47.04	1026.67	202.24	16 27.41	266.39	468.63	468.64	— 0.01
8 31.78	1069.09	177.95	17 12.15	291.08	469.03	468.60	+ 0.43
9 42.59	1141.83	136.41	18 22.96	332.38	468.69	468.53	+ 0.16
10 15.10	1176.72	116.33	55.47	352.18	468.51	468.50	+ 0.01
52.68	1218.61	92.35	19 33.05	375.92	468.27	468.47	— 0.20
11 35.16	1266.21	65.07	20 15.53	403.51	468.60	468.43	+ 0.17
12 30.04	1291.01	27.49	21 10.41	440.84	468.33	468.38	— 0.05
13 8.77	1379.92	0.00	49.14	468.12	468.12	468.35	— 0.23

$x = 469.54$ $y = + 17.74523$ $\epsilon_1 = 0''.1883$

1889 Gennaio 7 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
5^h 23^m $34^s.06$	$931^p.50$	$256^p.72$	27^m $49^s.73$	761.17	504.45	505.71	— 1.26
59 .30	977 .32	230 .49	24 .49	738.35	507.86	505.60	+ 2.26
25 30 .35	1110 .44	154 .28	25 53 .44	658.96	504.68	505.15	— 0.47
26 6 .96	1166 .31	122 .29	16 .83	628.25	505.96	504.98	+ 0.98
49 .46	1224 .05	89 .24	24 34 .33	594.43	504.19	504.77	— 0.58
27 41 .13	1294 .17	49 .09	23 42 .66	552.76	503.67	504.52	— 0.85
28 13 .22	1338 .12	23 .93	10 .57	528.09	504.16	504.36	— 0.20
42 .99	1379 .92	0 .00	22 40 .80	505.76	505.76	504.22	+ 1.54
29 18 .52	1422 .04	24 .11	5 .27	479.69	503.80	504.05	— 0.25
30 26 .66	1503 .50	70 .75	20 57 .13	431.66	502.41	503.72	— 1.31
31 2 .83	1546 .72	90 .49	20 .96	407.19	502.68	503.54	— 0.96
36 .22	1584 .88	117 .34	19 47 .57	385.28	502.62	503.38	— 0.76
32 13 .62	1628 .79	142 .48	10 .17	361.41	503.89	503.20	+ 0.69
53 .03	1669 .19	165 .61	18 30 .76	337.05	502.66	503.00	— 0.34
33 27 .58	1705 .01	186 .11	17 56 .21	316.47	502.58	502.83	— 0.25
56 .75	1735 .72	203 .69	27 .04	299.54	503.23	502.69	+ 0.54
34 45 .35	1783 .39	230 .99	16 38 .64	272.69	503.48	502.46	+ 1.02
35 54 .24	1844 .93	266 .22	15 29 .55	236.11	502.33	502.12	+ 0.21
36 33 .33	1878 .41	285 .38	14 50 .46	216.67	502.05	501.93	+ 0.12
37 10 .06	1908 .13	302 .40	13 .73	199.18	501.58	501.75	— 0.17

$x = 497.59$ $y = + 94.80325$ $\epsilon_1 = 0.2063$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
5^h 59^m $41^s.27$	$690^p.57$	$399^p.80$	8^m $17^s.48$	67.64	467.44	463.79	+ 3.65
6 0 11 .16	708 .46	384 .41	47 .37	77.53	461.94	463.62	— 1.68
56 .89	727 .79	373 .34	9 33 .10	89.77	463.11	463.37	— 0.26
2 8 .83	768 .30	350 .15	10 45 .04	113.71	463.86	462.98	+ 0.88
44 .53	793 .77	335 .57	11 20 .74	126.68	462.25	462.79	— 0.54
3 15 .36	813 .36	324 .36	51 .57	138.36	462.72	462.68	+ 0.04
4 21 .34	861 .74	296 .66	12 57 .55	165.21	461.87	462.26	— 0.39
49 .71	883 .78	284 .04	13 25 .92	177.50	461.54	462.11	— 0.57
5 21 .02	909 .04	269 .58	57 .23	191.55	461.13	461.94	— 0.81
6 40 .65	977 .32	230 .49	15 16 .86	229.71	460.20	461.50	— 0.30
7 34 .83	1024 .96	203 .21	16 11 .04	257.65	460.86	461.21	— 0.35
8 10 .60	1056 .66	183 .92	46 .81	276.96	460.88	461.01	— 0.13
41 .45	1088 .57	166 .80	17 17 .66	294.22	461.02	460.84	+ 0.18
9 19 .97	1130 .30	142 .91	56 .18	316.46	459.37	460.63	— 1.26
56 .96	1167 .30	121 .72	18 33 .17	338.57	460.29	460.43	— 0.14
11 11 .49	1248 .42	75 .28	19 47 .70	385.37	460.65	460.03	+ 0.62
49 .66	1292 .87	49 .84	20 25 .87	410.50	460.34	459.82	+ 0.52
12 42 .69	1356 .09	13 .64	21 18 .90	446.79	460.43	459.53	+ 0.90
13 0 .19	1379 .92	0 .00	36 .40	459.12	459.12	459.44	— 0.32
52 .95	1444 .73	37 .10	22 29 .16	497.27	460.17	459.15	+ 1.02

$x = 466.50$ $y = + 105.99216$ $\epsilon_1 = 0.2517$

1889 Gennaio 19 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
5^h 25^m $59^s.54$	$1124^p.35$	$146^p.31$	25^m $24^s.23$	632.98	486.67	486.38	+ 0.29
26 38 .01	1174 .64	117 .52	24 45 .76	601.43	483.91	486.41	— 2.50
27 15 .12	1232 .56	84 .36	8 .65	571.34	486.98	486.44	+ 0.54
28 8 .12	1303 .70	43 .64	23 15 .65	530.80	487.16	486.48	+ 0.68
29 6 .85	1379 .92	0 .00	22 16 .92	487.04	487.04	486.53	+ 0.51
30 13 .62	1461 .35	46 .62	21 10 .15	439.64	486.26	486.58	— 0.32
52 .09	1509 .94	74 .44	20 31 .68	413.39	487.83	486.61	+ 1.22
31 20 .34	1541 .13	92 .29	3 .43	394.71	487.00	486.64	+ 0.36
32 14 .45	1601 .59	126 .91	19 9 .32	360.04	486.95	486.68	+ 0.27
50 .14	1636 .52	146 .90	18 33 .63	338.08	484.98	486.71	— 1.73
33 27 .64	1680 .00	171 .80	17 56 .13	315.69	487.49	486.74	+ 0.75
34 11 .31	1724 .76	197 .42	12 .46	290.58	488.00	486.77	+ 1.23
35 14 .10	1783 .39	230 .99	16 9 .67	256.23	487.22	486.82	+ 0.40
36 23 .53	1843 .43	265 .36	15 0 .24	220.96	486.32	486.88	— 0.56
51 .12	1865 .81	278 .17	14 32 .65	207.65	485.82	486.90	— 1.08

$x = 487.60$ $y = -15.57296$ $\epsilon_1 = 0.2769$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
5^h 57^m $28^s.00$	$623^p.95$	$432^p.79$	6^m $4^s.23$	36.18	468.97	469.52	— 0.55
58 22 .25	643 .33	421 .70	58 .48	47.78	469.48	469.35	+ 0.13
59 .72	660 .16	412 .06	7 35 .95	56.69	468.75	469.24	— 0.49
6 0 40 .92	708 .46	384 .98	9 17 .15	84.65	469.63	468.93	+ 0.70
1 40 .62	743 .83	364 .16	10 16 .85	103.76	467.92	468.75	— 0.83
2 19 .36	764 .23	352 .48	55 .59	117.19	469.67	468.64	+ 1.03
3 0 .60	793 .07	335 .97	11 36 .83	132.40	468.37	468.51	— 0.14
35 .74	817 .00	322 .27	12 11 .97	146.09	468.36	468.40	— 0.04
4 29 .91	857 .08	299 .32	13 6 .14	170.65	469.97	468.24	+ 1.73
5 5 .32	883 .58	284 .15	41 .55	184.02	468.17	468.13	+ 0.04
33 .60	906 .01	271 .31	14 9 .83	196.91	468.22	468.05	+ 0.17
6 4 .42	933 .21	255 .74	40 .65	211.44	467.18	467.95	— 0.77
55 .06	977 .32	230 .49	15 31 .29	236.45	466.94	467.80	— 0.86
7 29 .22	1006 .92	213 .54	16 5 .45	254.11	467.65	467.70	— 0.05
8 4 .57	1040 .23	194 .47	40 .80	273.05	467.52	467.59	— 0.07

$x = 470.62$ $y = +58.88191$ $\epsilon_1 = 0.1850$

1889 Gennaio 28 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
$5^h\ 15^m\ 45^s.70$	$60^p.83$	$755^p.18$	$35^m\ 38^s.01$	1246.94	491.76	492.09	— 0.33
16 54 .17	196 .65	677 .42	34 29 .54	1169.30	491.88	491.81	+ 0.07
17 33 .93	277 .03	631 .40	33 49 .78	1124.26	492.86	491.65	+ 1.21
18 31 .61	384 .77	569 .72	32 52 .10	1061.25	491.53	491.41	+ 0.12
19 30 .39	492 .95	507 .79	31 53 .32	999.22	491.43	491.17	+ 0.26
20 14 .98	572 .76	462 .10	8 .75	953.10	491.00	490.99	+ 0.01
21 32 .51	708 .46	384 .41	29 51 .20	875.73	491.32	490.67	+ 0.65
50 .24	736 .42	368 .40	33 .47	858.48	490.08	490.60	— 0.52
22 56 .11	845 .63	305 .88	28 27 .60	796.01	490.13	490.33	— 0.20
23 37 .31	910 .85	268 .54	27 46 .40	758.11	489.57	490.16	— 0.59
24 18 .90	977 .32	230 .49	4 .81	720.75	490.26	489.99	+ 0.27
25 12 .81	1056 .19	185 .33	26 10 .90	693.77	489.44	489.77	— 0.33
57 .61	1123 .54	146 .78	25 26 .10	635.96	489.18	489.58	— 0.40
26 45 .89	1190 .67	108 .35	24 37 .82	596.38	488.03	489.39	— 1.36
28 3 .09	1298 .08	46 .85	23 20 .62	535.75	488.90	489.07	— 0.17
29 5 .35	1379 .92	0 .00	22 18 .36	489.15	489.15	487.78	+ 1.37

$x = 483.29$ $y = +\ 80.30976$ $\epsilon_1 = 0.1661$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
$6^h\ 0^m\ 44^s.94$	$708^p.46$	$384^p.41$	$9^m\ 21^s.23$	86.08	470.49	471.00	— 0.51
3 14 .06	797 .88	333 .22	11 50 .35	137.89	471.11	470.49	+ 0.62
55 .39	827 .08	316 .50	12 31 .68	154.41	470.91	470.29	+ 0.62
4 31 .86	854 .79	300 .64	13 8 .15	169.75	470.39	470.22	+ 0.17
5 24 .74	897 .38	276 .25	14 1 .03	193.28	469.53	470.04	— 0.51
6 58 .55	977 .32	230 .49	15 34 .84	238.81	469.30	469.72	— 0.42
7 34 .23	1008 .13	212 .85	16 10 .52	257.36	470.21	469.60	+ 0.61
8 22 .83	1055 .79	185 .56	59 .12	288.76	469.22	469.44	— 0.22
9 19 .54	1112 .86	152 .89	17 55 .83	316.23	469.12	469.24	— 0.12
52 .36	1148 .82	132 .30	18 28 .65	335.77	468.07	469.13	— 1.05
10 33 .57	1190 .87	108 .34	19 9 .86	361.20	469.54	468.99	+ 0.55
11 12 .75	1235 .82	82 .50	49 .04	386.22	468.72	468.86	— 0.14
12 15 .11	1308 .64	40 .81	20 51 .40	427.72	468.52	468.64	— 0.12
13 13 .90	1379 .92	0 .00	21 50 .19	468.82	468.82	468.44	+ 0.38
45 .99	1420 .42	23 .19	22 22 .28	492.05	468.86	468.33	+ 0.53
14 21 .01	1467 .70	50 .25	57 .30	518.07	467.82	468.21	— 0.39

$x = 472.92$ $y = +\ 66.49520$ $\epsilon_1 = 0.1265$

1889 Febbraio 17 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
5^h 20^m $18^s.21$	572^p 76	$462^p.10$	31^m $5^s.19$	949.49	487.39	487.09	+ 0.30
21 36 .69	708 .46	384 .41	29 46 .71	871.34	486.93	486.76	+ 0.17
22 29 .04	795 .47	334 .60	28 54 .36	821.11	486.51	486.55	— 0.04
23 15 .88	871 .27	291 .20	7 .52	777.40	486.20	486.36	— 0.16
52 .86	928 .39	258 .50	27 30 .54	743.77	485.27	486.20	— 0.93
24 23 .38	977 .32	230 .49	0 .02	716.54	486.05	486.08	— 0.03
25 31 .99	1081 .49	170 .85	25 51 .41	656.73	485.88	485.80	+ 0.08
26 6 .05	1130 .10	143 .02	17 .35	628.66	485.64	485.66	— 0.02
39 .46	1177 .71	115 .76	24 43 .94	601.12	485.56	485.52	+ 0.04
28 1 .31	1290 .77	51 .04	23 22 .09	636.87	485.83	485.28	+ 0.55
34 .36	1334 .22	26 .16	22 49 .04	511.92	485.76	485.04	+ 0.72
29 11 .00	1379 .92	0 .00	12 .40	484.86	484.86	484.89	— 0.03
30 38 .89	1486 .98	60 .72	20 40 .91	423.28	484.00	484.53	— 0.53
31 34 .06	1550 .71	97 .78	19 49 .34	486.42	484.20	484.30	— 0.10
32 11 .18	1591 .27	121 .00	12 .22	362.68	483.68	484.15	— 0.47
55 .54	1639 .23	148 .45	18 27 .86	335.90	483.35	483.96	+ 0.39

$x = 479.37$ $y = + 80.63636$ $\epsilon_1 = 0.1005$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
6^h 0^m $40^s.17$	$708^p.46$	$384^p.41$	9^m $16^s.77$	84.72	469.13	469.41	— 0.28
2 7 .24	759 .66	355 .10	10 43 .84	113.29	468.39	469.26	— 0.87
55 .98	787 .78	339 .00	11 32 .58	131.08	470.08	469.17	+ 0.91
3 38 .03	817 .20	322 .16	12 14 .63	147.48	469.64	469.10	+ 0.54
4 15 .68	846 .03	305 .65	52 .28	162.95	468.60	469.03	— 0.43
5 12 .67	889 .97	280 .50	13 49 .27	187.93	468.43	468.93	— 0.50
53 .18	921 .84	262 .25	14 29 .78	206.71	468.96	468.86	+ 0.10
6 56 .80	977 .32	230 .49	15 33 .40	238.06	468.55	468.74	— 0.19
7 25 .35	1001 .49	216 .65	16 1 .95	252.59	469.24	468.69	+ 0.55
8 5 .77	1040 .33	194 .41	42 .37	274.55	468.96	468.62	+ 0.34
59 .30	1093 .07	164 .22	17 35 .90	304.61	468.83	468.52	+ 0.31
9 34 .78	1130 .30	142 .91	18 11 .38	325.48	468.39	468.46	— 0.07
10 29 .91	1188 .47	109 .60	19 6 .51	359.10	468.70	468.36	+ 0.34
11 7 .46	1231 .00	85 .26	44 .06	382.98	468.24	468.29	— 0.05
12 5 .47	1297 .98	46 .91	20 42 .07	421.38	468.29	468.19	+ 0.10
13 11 .38	1379 .92	0 .00	21 47 .98	467.27	467.27	468.07	— 0.80

$x = 470.41$ $y = + 34.76543$ $\epsilon_1 = 0.1225$

1889 Febbraio 18 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
5h 32m 39s.79	1159p.06	126p.44	18m 43s.59	344.88	471.32	470.66	+ 0.66
33 20 .27	1117 .70	150 .12	3 .11	320.51	470.63	470.55	+ 0.08
53 .03	1086 .18	168 .17	17 30 .35	301.41	469.58	470.46	— 0.88
34 48 .55	1031 .10	199 .70	16 34 .83	270.42	470.12	470.31	— 0.19
35 16 .10	1004 .91	214 .69	7 .28	255.66	470.35	470.24	+ 0.11
46 .34	977 .32	230 .49	15 37 .04	239.92	470.41	470.15	+ 0.26
37 2 .72	912 .16	267 .79	14 20 .66	202.41	470.20	469.94	+ 0.26
34 .54	888 .57	281 .30	13 48 .88	187.75	469.05	469.86	— 0.81
38 5 .34	863 .04	295 .91	18 .04	174.05	469.96	469.77	+ 0.19
59 .48	824 .84	317 .78	12 23 .90	151.23	469.01	469.62	— 0.61
39 33 .49	800 .18	331 .90	11 49 .89	137.72	469.62	469.53	+ 0.09
40 6 .25	777 .51	344 .88	17 .13	125.31	470.19	469.44	+ 0.75
41 20 .33	732 .11	370 .87	10 3 .05	99.39	470.26	469.24	+ 1.02
42 8 .69	708 .46	384 .41	9 14 .69	84.09	468.50	469.10	— 0.60
43 12 .01	676 .72	402 .58	8 11 .37	65.99	468.57	468.93	— 0.36
49 .32	659 .36	412 .52	7 34 .06	56.35	468.87	468.83	+ 0.04

$x = 467.58$ $y = + 53.38537$ $\epsilon_1 = 0.1356$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
6h 0m 7s.31	2102p.20	413p.50	8m 43s.93	75.02	488.52	484.65	+ 3.87
53 .09	2069 .68	394 .89	9 29 .71	88.70	483.59	484.41	— 0.82
1 44 .35	2050 .98	384 .18	10 0 .97	98.70	482.88	484.24	— 1.36
2 23 .54	2017 .30	364 .90	11 0 .16	119.12	484.02	483.93	+ 0.09
3 0 .81	1989 .27	348 .85	37 .43	132.87	481.72	483.74	— 2.02
34 .95	1969 .09	337 .30	12 11 .57	146.27	483.57	483.56	+ 0.01
4 13 .43	1941 .13	321 .29	50 .05	161.54	482.83	483.35	— 0.52
5 11 .12	1896 .17	295 .55	13 47 .74	187.21	482.76	483.05	— 0.29
50 .86	1864 .23	277 .27	14 27 .48	205.63	482.90	482.84	+ 0.06
6 27 .76	1832 .81	259 .30	15 4 .38	223.49	482.79	482.65	+ 0.14
7 21 .72	1783 .39	230 .99	58 .34	250.95	481.94	482.36	— 0.42
8 24 .91	1724 .78	197 .41	17 1 .53	285.11	482.52	482.03	+ 0.49
9 1 .87	1685 .98	175 .22	38 .49	306.11	481.33	481.84	— 0.51
10 3 .47	1622 .74	139 .01	18 40 .09	342.75	481.76	481.52	+ 0.24
33 .83	1587 .88	119 .06	19 10 .45	361.56	480.62	481.35	— 0.73
11 6 .70	1553 .30	100 .40	43 .32	382.50	482.90	481.18	+ 1.72

$x = 487.41$ $y = + 102.41156$ $\epsilon_1 = 0.3250$

1889 Febbraio 25 — β *Aurigae.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
$5^h\ 31^m\ 15^s.53$	$1251^p.71$	$73^p.40$	$20^m\ 7^s.70$	398.42	471.82	472.28	— 0.46
33 2.45	1132.31	141.76	18 20.78	331.05	472.81	472.08	+ 0.73
46.63	1086.58	167.94	17 36.60	305.02	472.96	471.99	+ 0.97
34 18.68	1057.18	184.77	4.55	286.80	471.57	471.93	— 0.36
35 13.90	1003.80	215.33	16 9.33	256.73	472.06	471.82	+ 0.24
46.07	977.32	230.49	15 37.16	239.98	470.47	471.76	— 1.29
36 33.94	935.02	254.70	14 49.29	216.09	470.79	471.66	— 0.89
37 24.13	891.67	279.52	13 59.10	192.40	471.92	471.57	+ 0.35
54.81	868.00	293.07	28.42	178.59	471.66	471.51	+ 0.15
38 31.98	840.93	308.57	12 51.25	162.55	471.12	471.43	— 0.31
39 22.91	802.39	330.64	0.32	141.79	472.43	471.34	+ 1.09
54.69	782.59	341.97	11 28.54	129.56	471.53	471.27	+ 0.26
40 55.10	745.83	363.02	10 28.13	107.82	470.84	471.16	— 0.32
41 27.48	725.87	374.44	9 55.75	97.00	471.44	471.09	+ 0.35
42 1.09	708.46	384.41	22.14	86.37	470.78	471.03	— 0.25
44.50	686.17	397.57	8 38.73	73.53	470.70	470.94	— 0.24

$x = 469.93$ $y = +37.92685$ $\epsilon_1 = 0.1577$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
$5^h\ 56^m\ 29^s.37$	$2185^p.36$	$461^p.11$	$5^m\ 6^s.14$	25.62	486.73	486.32	+ 0.41
57 53.49	2156.29	444.47	6 30.26	41.62	486.09	486.01	+ 0.08
58 28.15	2142.13	436.36	7 4.92	49.40	485.76	485.88	— 0.12
59 6.03	2126.07	427.17	42.80	58.54	485.71	485.74	— 0.03
6 0 5.70	2097.18	410.64	8 42.47	74.59	485.23	485.52	— 0.29
50.86	2072.26	396.36	9 27.63	88.06	484.42	485.36	— 0.94
1 33.53	2050.98	384.18	10 10.30	101.75	485.93	485.20	+ 0.73
2 29.15	2015.38	363.80	11 5.92	121.18	484.98	485.00	— 0.02
59.74	1994.87	352.05	36.51	132.57	484.62	484.89	— 0.27
3 31.53	1974.15	340.20	12 8.30	144.96	485.16	484.77	+ 0.39
4 39.99	1922.94	310.88	13 16.76	173.48	484.36	484.52	— 0.16
5 14.44	1896.68	295.85	51.21	188.80	484.65	484.39	+ 0.26

$x = 487.44$ $y = +71.30278$ $\epsilon_1 = 0.1233$

1889 Maggio 17 — *33 Bootis.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
14^h 2^m $9^s.57$	$2050^p.98$	$384^p.18$	32^m $34^s.49$	1043.37	659.19	659.99	— 0.80
47 .79	1976 .92	341 .78	31 56 .27	1003.02	661.24	659.86	+ 1.38
3 17 .38	1925 .56	312 .38	26 .68	972.38	660.00	659.76	+ 0.24
4 14 .06	1826 .07	255 .42	30 30 .00	914.89	659.47	659.57	— 0.10
38 .79	1783 .39	230 .99	5 .27	890.35	659.36	659.48	— 0.12
5 7 .87	1734 .02	202 .82	29 36 .19	861.85	659.03	659.38	— 0.35
55 .16	1656 .49	158 .43	28 48 .90	816.70	658.27	659.22	— 0.95
6 33 .19	1592 .77	121 .96	10 .87	781.26	659.30	659.09	+ 0.21
7 15 .88	1427 .08	82 .24	27 28 .18	742.27	660.03	658.95	+ 1.08
8 52 .66	1379 .92	0 .00	25 51 .40	657.81	657.81	658.60	— 0.79
9 36 .63	1314 .47	37 .57	7 .43	621.02	658.59	658.45	+ 0.14
10 16 .55	1258 .66	69 .52	24 27 .51	588.66	658.18	658.32	— 0.14
11 26 .06	1163 .04	124 .26	23 18 .00	534.22	658.48	658.08	+ 0.40
12 1 .18	1118 .61	149 .70	22 42 .88	507.75	657.45	657.95	— 0.50
41 .39	1066 .31	179 .64	2 .67	478.22	657.86	657.82	+ 0.04
13 53 .76	977 .32	230 .59	20 50 .30	427.40	657.99	657.57	+ 0.42

$x = 653.28$ $y = + 66.88489$ $\epsilon_1 = 0.1570$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	v	t	R	(R — v) osservate	(R — v) calcolate	O — C
14^h 41^m $37^s.42$	$2464^p.13$	$620^p.80$	6^m $53^s.36$	46.74	667.54	667.78	— 0.24
42 12 .48	2449 .42	612 .38	7 28 .42	55.01	667.39	667.64	— 0.25
45 .03	2435 .22	604 .16	8 0 .97	63.28	667.44	667.50	— 0.06
44 14 .16	2389 .84	578 .18	9 30 .10	88.91	667.09	667.13	— 0.04
55 .79	2366 .31	564 .71	10 11 .73	102.37	667.08	666.96	+ 0.12
45 29 .16	2345 .93	553 .04	45 .10	113.83	666.87	666.82	+ 0.05
46 26 .50	2308 .03	531 .34	11 42 .44	134.96	666.30	666.58	— 0.28
47 11 .06	2278 .30	514 .32	12 27 .00	152.63	666.95	666.40	+ 0.55
46 .86	2250 .42	498 .36	13 2 .80	167.71	666.07	666.25	— 0.18
49 10 .67	2185 .36	461 .11	14 26 .61	205.40	666.51	665.90	+ 0.61
46 .18	2154 .10	443 .22	15 2 .12	222.58	665.80	665.76	+ 0.04
50 41 .03	2105 .71	415 .51	56 .97	250.99	666.50	665.53	+ 0.97
51 38 .68	2050 .98	384 .18	16 54 .62	281.52	665.70	665.29	+ 0.41
52 16 .59	2012 .06	361 .90	17 32 .53	302.96	664.86	665.13	— 0.27
53 12 .01	1951 .31	327 .12	18 27 .95	335.04	662.16	664.90	— 2.74
51 .24	1914 .78	306 .21	19 7 .18	359.83	666.04	664.74	+ 1.30

$x = 669.50$ $y = + 80.59067$ $\epsilon_1 = 0.2135$

1889 Novembre 1 — α *Cygni.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
20h 15m 9s.86	1144p.23	134p.93	22m 29s.98	498.12	633.05	632.85	+ 0.20
44.90	1098.78	160.95	21 54.94	472.55	633.50	633.05	+ 0.45
16 17.67	1058.07	184.26	22.17	449.41	633.67	633.23	+ 0.44
46.68	1024.15	203.68	20 53.16	429.29	632.97	633.39	— 0.42
17 26.36	977.32	230.49	13.48	402.55	633.04	633.60	— 0.56
18 21.41	913.56	266.99	19 18.43	366.86	633.85	633.91	— 0.06
56.47	873.95	289.67	18 43.37	345.04	634.71	634.10	+ 0.61
19 30.55	840.33	308.91	9.29	324.43	633.34	634.29	— 0.95
20 24.39	784.08	341.12	17 15.45	293.16	634.28	634.58	— 0.30
21 1.30	748.12	361.70	16 38.54	272.64	634.34	634.78	— 0.44
43.75	708.46	384.41	15 56.09	249.97	634.38	635.02	— 0.64
22 32.47	663.73	410.02	7.37	225.13	635.15	635.29	— 0.14
23 8.98	631.50	428.47	14 29.86	206.92	635.39	635.49	— 0.10
55.93	590.07	452.19	13 43.91	185.63	637.82	635.74	+ 2.08
24 23.92	572.76	462.10	15.92	173.23	635.33	635.90	— 0.57
57.31	545.83	477.52	12 42.53	159.02	636.54	636.09	+ 0.45

$x = 640.28$ $y = -106.94706$ $\epsilon_1 = 0.1888$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
20h 42m 12s.17	2472p.06	625p.25	4m 32s.33	20.29	645.54	645.41	+ 0.13
43.65	2463.83	620.54	5 3.81	25.25	645.79	645.60	+ 0.19
43 18.42	2453.30	614.51	38.58	31.42	645.93	645.80	+ 0.13
48.88	2443.93	609.15	6 9.04	37.25	646.40	645.99	+ 0.41
44 50.37	2419.11	594.94	7 10.53	50.70	645.64	646.35	— 0.91
45 57.67	2389.84	578.18	8 17.83	67.78	645.96	646.75	— 0.79
46 35.27	2372.16	568.06	55.43	78.42	646.48	646.98	— 0.50
47 39.04	2338.52	548.80	9 59.20	98.19	646.99	647.35	— 0.36
48 31.54	2307.83	531.22	10 51.70	116.15	647.38	647.67	— 0.29
49 20.87	2278.30	514.32	11 41.03	134.40	648.72	647.96	+ 0.76
54.57	2255.89	501.49	12 14.73	147.59	649.08	648.16	+ 0.92
50 35.22	2225.36	485.01	55.38	164.42	649.43	648.40	+ 1.03
52 11.11	2149.52	440.50	14 31.27	207.58	648.08	648.97	— 0.89
50.52	2118.91	423.07	15 10.68	226.78	649.85	649.21	+ 0.64
53 26.65	2085.48	403.93	46.81	245.12	649.05	649.42	— 0.37
54 4.25	2050.98	384.18	16 24.41	264.97	649.15	649.64	— 0.49

$x = 643.78$ $y = -115.52481$ $\epsilon_1 = 0.1583$

1889 Novembre 15 — α *Cygni.*

Verticale est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
20ʰ 4ᵐ 12ˢ.93	572ᵖ.76	462ᵖ.10	33ᵐ 27ˢ.52	1100.50	638.40	637.19	+ 1.21
5 25 .09	708 .46	384 .41	32 14 .36	1021.74	637.33	637.54	— 0.21
6 23 .18	814 .27	323 .83	31 16 .27	961.51	637.68	637.82	— 0.14
7 2 .62	884 .98	283 .35	30 36 .83	921.57	638.22	638.01	+ 0.21
33 .04	935 .82	254 .25	6 .41	891.35	637.10	638.16	— 1.06
56 .13	977 .32	230 .49	29 43 .32	868.73	638.24	638.27	— 0.03
8 45 .40	1059 .36	183 .52	28 54 .05	821.43	637.91	638.51	— 0.60
9 21 .20	1119 .21	149 .26	18 .25	787.91	638.65	638.69	— 0.04
53 .09	1170 .08	120 .13	27 46 .36	758.68	638.55	638.84	— 0.29
10 57 .32	1271 .17	62 .26	26 42 .13	701.39	639.13	639.16	— 0.03
11 22 .77	1310 .04	40 .01	16 .68	679.28	639.27	639.28	— 0.01
12 8 .39	1379 .92	0 .00	25 31 .06	640.21	640.21	639.50	+ 0.71
56 .67	1448 .72	39 .39	24 42 .78	600.84	640.23	639.73	+ 0.50
13 33 .80	1499 .68	68 .56	5 .65	571.19	639.75	639.92	— 0.17
14 27 .16	1572 .66	110 .34	23 12 .29	529.81	640.15	640.18	— 0.03
15 3 .07	1620 .02	137 .46	22 36 .38	502.87	640.33	640.35	— 0.02
27 .09	1651 .31	155 .37	12 .36	485.19	640.50	640.47	+ 0.09

$x = 646.98$ $y = -95.02701$ $\epsilon_1 = 0.1203$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
21ʰ 0ᵐ 46ˢ.09	1170ᵖ.08	120ᵖ.13	23ᵐ 6ˢ.64	525.50	645.63	645.76	— 0.13
1 13 .26	1206 .51	99 .28	33 .81	546.28	645.56	645.91	— 0.35
47 .99	1253 .40	72 .43	24 8 .54	573.43	645.86	646.11	— 0.25
2 22 .26	1299 .78	45 .88	42 .81	600.85	646.73	646.19	+ 0.54
3 17 .66	1379 .92	0 .00	25 38 .21	646.57	646.57	646.61	— 0.04
49 .79	1427 .28	27 .11	26 10 .34	673.82	646.71	646.79	— 0.08
4 29 .69	1486 .28	60 .89	50 .24	708.49	647.60	647.02	+ 0.58
5 5 .49	1542 .23	92 .92	27 26 .04	740.27	647.35	647.22	+ 0.13
6 4 .99	1636 .82	147 .07	28 25 .54	794.67	647.60	647.55	+ 0.05
40 .39	1698 .97	179 .79	29 0 .94	827.97	648.18	647.75	+ 0.43
7 14 .45	1751 .71	212 .85	35 .00	860.61	647.76	647.94	— 0.18
32 .66	1783 .39	230 .99	53 .21	878.36	647.37	648.04	— 0.67
8 20 .51	1864 .92	277 .66	30 41 .13	925.89	648.23	648.31	— 0.08
53 .66	1922 .24	310 .48	31 14 .21	959.41	648.93	648.50	+ 0.43
9 29 .97	1987 .48	347 .83	50 .52	996.81	648.98	648.70	+ 0.28
10 3 .86	2050 .98	384 .18	32 24 .41	1032.50	648.32	648.89	— 0.57

$x = 637.94$ $y = -109.68269$ $\epsilon_1 = 0.09210$

1889 Novembre 16 — α *Cygni.*

Verticale Est.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
20h 15m 58s.15	1087p.68	167p.31	21m 41s.27	462.88	630.19	630.60	— 0.41
16 28.99	1048.72	189.61	10.43	441.17	630.78	630.77	+ 0.01
17 8.90	999.58	217.74	20 30.50	413.92	631.66	630.99	+ 0.67
29.35	977.32	230.49	10.07	399.63	630.12	631.10	+ 0.02
18 30.74	906.52	271.02	19 8.68	360.73	631.75	631.43	+ 0.32
58.98	874.84	289.16	18 40.44	343.23	632.39	631.58	+ 0.81
19 28.81	845.13	386.17	10.61	325.23	631.50	631.74	— 0.24
55.90	816.29	322.68	17 43.52	309.28	631.96	631.89	+ 0.07
20 45.26	767.10	350.84	16 54.16	281.24	632.08	632.16	— 0.08
21 20.33	733.01	370.36	19.09	262.13	632.49	632.35	+ 0.14
47.33	708.46	384.41	15 52.09	247.88	632.29	632.50	— 0.21
22 23.65	674.25	404.00	15.77	229.33	633.33	632.69	— 0.36
23 18.97	629.90	429.39	14 20.45	202.47	631.86	632.99	— 1.13
44.65	606.01	443.06	13 54.77	190.48	633.54	633.13	+ 0.41
24 28.81	572.66	462.16	10.61	170.94	633.10	633.37	— 0.27
25 9.83	541.23	480.15	12 29.59	153.67	633.82	633.60	+ 0.22

$x = 637.67$ $y = -105.57484$ $\epsilon_1 = 0.1137$

Verticale Ovest.

Tempi siderali	Letture corrette	ν	t	R	(R — ν) osservate	(R — ν) calcolate	O — C
20h 59m 29s.65	1699p.58	183p.00	21m 50s.23	469.22	652.22	652.61	— 0.39
59.06	1663.46	162.33	22 19.64	490.50	652.83	652.79	+ 0.04
21 0 34.42	1619.62	377.23	55.00	516.76	653.99	652.99	+ 1.00
1 7.89	1572.94	110.50	23 28.47	542.19	652.69	653.19	— 0.50
2 7.77	1491.07	63.63	24 28.35	589.26	652.89	653.54	— 0.65
38.73	1449.22	39.67	59.31	614.27	653.94	653.72	+ 0.22
3 10.73	1401.69	12.46	25 31.31	640.80	653.26	653.91	— 0.65
27.83	1379.92	0.00	48.41	655.03	655.03	654.01	+ 1.02
4 27.29	1288.57	52.30	26 49.87	707.34	655.04	654.37	+ 0.67
5 1.31	1236.42	82.15	27 21.89	736.55	654.40	654.56	— 0.16
32.56	1185.48	111.32	53.14	764.84	653.52	654.75	— 1.23
6 2.84	1139.13	137.85	28 23.42	792.75	654.90	654.92	— 0.02
52.47	1060.06	183.12	29 13.05	839.61	656.49	655.22	+ 1.27
7 20.14	1011.15	211.12	40.72	866.17	655.05	655.38	— 0.33
40.06	977.32	230.49	30 0.64	885.69	655.20	655.49	— 0.29

$x = 644.87$ $y = -114.86992$ $\epsilon_1 = 0.1843$

RISULTATI DELLE OSSERVAZIONI

DATA	STELLA	VERTICALE EST			VERTICALE OVEST			φ′ — δ	δ	φ′	Inclinaz.	φ
		x	$-y \sin t \cos \delta$	$\varphi'-\delta-c$	x	$-y \sin t \cos \delta$	$\varphi'-\delta+c$					
1888												
Novembre 25	α *Cygni*	710″.082	+ 8″.344	718″.426	595″.023	— 7″.285	587″.738	10′ 53″.08	44° 53′ 14″.92	45° 4′ 8″.00	+0″.68	45° 4′ 8″.68
1889												
Gennaio 5	β *Aurigae*	500 .919	+ 2 .570	503 .489	469 .543	— 1 .213	468 .330	8 5 .91	56 5 .01	10 .92	—2 .98	7 .94
7	β *Aurigae*	497 .592	+ 6 .478	504 .070	466 .502	— 7 .242	459 .260	8 1 .66	5 .35	7 .01	+1 .01	8 .02
19	β *Aurigae*	487 .603	— 1 .062	486 .541	470 .621	— 4 .016	466 .505	7 56 .57	7 .12	3 .69	+3 .75	7 .44
28	β *Aurigae*	483 .293	+ 5 .089	488 .382	472 .919	— 4 .541	468 .378	7 58 .38	8 .09	6 .47	+1 .14	7 .61
Febbraio 17	β *Aurigae*	479 .373	+ 5 .481	484 .854	470 .410	— 2 .363	468 .047	7 56 .45	10 .33	6 .78	+0. 51	7 .29
18	β *Aurigae*	467 .580	+ 3 .629	471 .209	487 .408	— 6 .961	480 .447	7 55 .83	10 .39	6 .22	+1 .22	7 .44
25	β *Aurigae*	469 .933	+ 2 .577	472 .510	487 .444	— 4 .844	482 .600	7 57 .56	10 .78	8 .34	—0 .23	8 .11
Maggio 17	*33 Bootis*	653 .283	+ 5 .520	658 .803	669 .498	— 6 .458	663 .040	11 0 .92	53 4 .17	5 .09	+2 .27	7 .36
Novembre 1	α *Cygni*	640 .284	— 8 .407	631 .877	643 .778	+ 9 .098	652 .876	10 42 .38	26 .75	9 .13	—0 .34	8 .79
15	α *Cygni*	646 .985	— 7 .488	639 .497	637 .937	+ 8 .643	646 .580	10 43 .04	26 .03	9 .07	—2 .82	6 .25
16	α *Cygni*	637 .668	— 8 .320	629 .348	644 .868	+ 9 .052	653 .920	10 41 .63	25 .95	7 .58	+0 .72	8 .30

PARTE TERZA

Discussione dei Risultati definitivi.

Esposti nelle due parti che precedono i ragionamenti ed i calcoli per i quali siamo stati condotti ai valori della latitudine consegnati negli ultimi quadri di ciascuna di esse, dobbiamo ora raccogliere e discutere i valori stessi, per ricavarne il valor finale.

A tale scopo, raggruppando i valori dati da ciascuna stella, notiamo che le 19 medie che otteniamo debbono differire fra loro:

I. Per gli errori residui delle osservazioni;
II. Per le variazioni della latitudine;
III. Per gli errori delle declinazioni adoperate.

Rinunziando, come ho detto nella Introduzione, a ricavare dalla mia serie le variazioni a corto periodo della latitudine, e ritenendo sensibilmente nulle nell'intervallo le variazioni secolari, convien premettere ad ogni discussione ulteriore sugli errori l'eliminazione delle variazioni periodiche. A tale scopo si è calcolato una tavola che dà mese per mese, nel periodo abbracciato dalle osservazioni, il valore della differenza fra la latitudine vera φ e la media φ_0; e per fare questo calcolo si è adoperato la formula che il Chandler dà nel numero 277 dell'*Astronomical Journal:*

$$\varphi - \varphi_0 = - r_1 \cos [\lambda + (t - \mathrm{T})\theta] - r_2 \cos (\Theta - \mathrm{G}),$$

dove λ è la differenza di longitudine fra la nostra stazione e Greenwich, T l'epoca (in giorni) dell'ultimo minimo di latitudine a Greenwich, t la data dell'osservazione, θ il movimento diurno dell'oscillazione di semiamplitudine r_1, r_2 la semiamplitudine dell'oscillazione annua, Θ la longitudine del Sole, G la longitudine del Sole quando il secondo termine è massimo in valore assoluto. Dal medesimo numero dell'*Astronomical Journal* furono ricavati i valori numerici di questi simboli.

Nei quadri che seguono espongo i risultati di questa correzione. Ogni quadro contiene tutte le latitudini date da una stella, le correzioni relative, ricavate per interpolazione dalla tavola di cui si è detto, e finalmente le latitudini medie, riferite cioè non al polo istantaneo della rotazione terrestre, ma al punto (che si ritiene fisso e stabile sulla superficie del globo) nel quale l'asse dei massimi momenti incontra la superficie stessa.

β *Aurigae.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Gennaio 19	7″.706	+ 0″.052	7″.758
" " 20	8 .773	+ 0 .052	8 .825
" " 22	7 .827	+ 0 .051	7 .878
1889 Gennaio 5	7 .940	+ 0 .156	8 .096
" " 7	8 .020	+ 0 .158	8 .178
" " 19	7 .440	+ 0 .170	7 .610
" " 28	7 .610	+ 0 .165	7 .775
" Febbraio 17	7 .290	+ 0 .155	7 .445
" " 18	7 .440	+ 0 .154	7 .594
" " 25	8 .110	+ 0 .143	8 .253
		Media . . .	7″.941

σ *Herculis.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Maggio 29	6″.680	— 0″.082	6″.598
" Giugno 5	8 .272	— 0 .088	8 .184
" " 8	8 .266	— 0 .097	8 .169
1889 Giugno 4	7 .479	— 0 .118	7 .361
" " 15	8 .296	— 0 .148	8 .148
" " 17	7 .680	— 0 .152	7 .528
" " 19	7 .525	— 0 .158	7 .367
		Media . . .	7″.622

δ *Cygni.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Giugno 5	7″.836	— 0″.088	7″.748
" " 7	8 .334	— 0 .090	8 .244
" " 8	7 .562	— 0 .091	7 .471
1889 Giugno 15	7 .700	— 0 .147	7 .553
" " 19	7 .733	— 0 .158	7 .575
" Luglio 28	8 .194	— 0 .205	7 .989
" Settembre 14	7 .996	— 0 .151	7 .845
" Ottobre 23	7 .762	— 0 .082	7 .680
		Media . . .	7″.763

λ *Ursae Majoris.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Gennaio 19	8″.176	+ 0″.052	8″.228
1890 Marzo 29	7 .274	+ 0 .174	7 .448
		Media . . .	7″.838

33 Bootis.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Maggio 3	7″.409	— 0″.051	7″.358
„ „ 6	7 .529	— 0 .055	7 .474
„ „ 9	7 .622	— 0 .059	7 .563
„ „ 25	7 .714	— 0 .078	7 .636
„ Giugno 2	7 .142	— 0 .086	7 .056
„ „ 5	7 .268	— 0 .088	7 .180
1889 Maggio 17	7 .360	— 0 .074	7 .286
„ „ 31	6 .631	— 0 .107	6 .524
„ Giugno 1	7 .424	— 0 .110	7 .314
„ „ 6	6 .225	— 0 .123	6 .102
		Media . . .	7″.149

κ *Andromedae.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Novembre 19	8″.906	+ 0″.087	8″.993
„ „ 21	8 .383	+ 0 .090	8 .473
„ „ 22	7 .752	+ 0 .092	7 .844
„ „ 23	7 .954	+ 0 .094	8 .048
„ „ 25	8 .468	+ 0 .096	8 .564
„ Dicembre 3	8 .226	+ 0 .112	8 .338
„ „ 4	8 .242	+ 0 .114	8 .356
1889 Novembre 8	7 .639	— 0 .017	7 .622
„ „ 9	8 .180	— 0 .013	8 .167
„ „ 15	8 .004	+ 0 .013	8 .017
		Media . . .	8″.242

36 Lyncis.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Dicembre 20	7''.880	+ 0''.147	8''.027
1890 Marzo 28	7 .790	+ 0 .174	7 .964
		Media . . .	7''.995

α Cygni.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Novembre 24	7 .625	+ 0''.095	7''.720
„ „ 25	8 .680	+ 0 .097	8 .777
„ Dicembre 1	7 .908	+ 0 .105	8 .013
1889 Giugno 6	7 .732	— 0 .123	7 .609
„ „ 17	8 .500	— 0 .152	8 .348
„ Novembre 1	8 .790	— 0 .044	8 .746
„ „ 8	8 .101	— 0 .015	8 .086
„ „ 9	8 .459	— 0 .011	8 .448
„ „ 15	6 .250	+ 0 .014	6 .264
„ „ 16	8 .300	+ 0 .018	8 .318
		Media . . .	8''.033

ι Andromedae.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Dicembre 1	8''.377	+ 0''.108	8''.485
„ „ 2	7 .840	+ 0 .109	7 .949
„ „ 5	7 .630	+ 0 .115	7 .745
„ „ 6	7 .889	+ 0 .116	8 .005
„ „ 7	7 .638	+ 0 .118	7 .756
„ „ 8	7 .977	+ 0 .120	8 .097
„ „ 9	7 .768	+ 0 .122	7 .890
„ „ 10	8 .109	+ 0 .123	8 .232
1889 Ottobre 23	7 .609	— 0 .082	7 .527
„ Novembre 7	8 .101	— 0 .020	8 .081
		Media . . .	7''.977

58 Ursae Majoris.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Marzo 12	8″.984	+ 0″.115	9″.099
" " 17	7 .762	+ 0 .106	7 .868
" " 25	8 .010	+ 0 .086	8 .096
		Media . . .	8″.345

ν *Persei.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1888 Dicembre 1	8″.069	+ 0″.108	8″.177
" " 3	7 .579	+ 0 .111	7 .690
" " 7	7 .431	+ 0 .118	7 .549
" " 10	7 .959	+ 0 .123	8 .082
" " 13	7 .139	+ 0 .129	7 .268
1889 Gennaio 7	7 .746	+ 0 .133	7 .879
" " 8	7 .414	+ 0 .136	7 .550
" " 17	7 .680	+ 0 .163	7 .843
" " 18	7 .875	+ 0 .167	8 .042
" " 19	7 .736	+ 0 .170	7 .906
		Media . . .	7″.799

ψ^5 *Aurigae.*

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Gennaio 8	8″.182	+ 0″.136	8″.318
" " 17	7 .299	+ 0 .163	7 .462
" " 18	8 .508	+ 0 .167	8 .675
" Febbraio 19	8 .360	+ 0 .154	8 .514
" " 23	8 .435	+ 0 .146	8 .581
" " 24	8 .009	+ 0 .144	8 .153
" Marzo 6	8 .097	+ 0 .126	8 .223
" Novembre 17	8 .232	+ 0 .022	8 .254
" " 21	8 .251	+ 0 .058	8 .309
" " 30	7 .975	+ 0 .072	8 .047
		Media . . .	8″.254

10 Ursae Majoris.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Marzo 14	7″.837	+ 0″.113	7″.950
" " 16	7 .475	+ 0 .107	7 .582
" Dicembre 21	6 .947	+ 0 .150	7 .097
" " 23	6 .899	+ 0 .156	7 .055
1890 Marzo 1	7 .368	+ 0 .225	7 .593
		Media . . .	7″.455

ε Aurigae.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Gennaio 24	8″.897	+ 0″.167	9″.064
" " 25	7 .904	+ 0 .167	8 .071
" " 27	8 .006	+ 0 .166	8 .172
" " 31	8 .263	+ 0 .164	8 .427
" Febbraio 1	8 .368	+ 0 .164	8 .532
" " 5	7 .676	+ 0 .162	7 .838
" " 6	7 .735	+ 0 .161	7 .896
" " 11	8 .048	+ 0 .159	8 .207
" " 13	8 .376	+ 0 .158	8 .534
" " 16	8 .096	+ 0 .156	8 .252
		Media . . .	8″.299

μ Ursae Majoris.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Marzo 6	7″.852	+ 0″.126	7″.978
" " 27	7 .559	+ 0 .080	7 .639
" " 28	8 .286	+ 0 .077	8 .363
		Media . . .	7″.993

31 Lyncis.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Marzo 12	8″.601	+ 0″.115	8″.716
" " 13	8 .470	+ 0 .114	8 .584
" " 17	8 .143	+ 0 .106	8 .249
" " 25	8 .248	+ 0 .086	8 .334
" Dicembre 1	8 .279	+ 0 .076	8 .355
" " 3	7 .812	+ 0 .084	7 .896
1890 Febbraio 9	7 .373	+ 0 .248	7 .621
" Marzo 10	8 .147	+ 0 .213	8 .360
		Media . . .	8″.264

Gr. 2533.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Giugno 6	8″.076	— 0″.123	7″.953
" " 8	7 .996	— 0 .129	7 .867
" Luglio 29	8 .846	— 0 .205	8 .641
		Media . . .	8″.154

ξ Cygni.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Settembre 17	7″.753	— 0″.162	7″.591
" " 18	7 .555	— 0 .160	7 .395
" " 22	8 .207	— 0 .153	8 .054
" " 25	7 .887	— 0 .147	7 .740
" " 26	7 .759	— 0 .145	7 .614
" " 27	7 .565	— 0 .143	7 .422
" Ottobre 3	7 .951	— 0 .131	7 .820
" " 14	7 .486	— 0 .109	7 .377
" " 15	7 .486	— 0 .107	7 .379
" " 16	8 .504	— 0 .104	7 ,400
		Media . . .	7″.579

R Lyrae.

DATA	φ	Correzione	Latitudine
1889 Luglio 31	8″.137	— 0″.205	7″.932
		Media . . .	7″.932

Il quadro seguente ricapitola i risultati relativi ad ogni stella. Quelle segnate con asterisco non appartengono alle Fondamentali di Pulkova, e sono quindi certamente meno sicure delle altre. La *33 Bootis,* ad esempio, che scarta più di tutte le altre dal valor medio, è indubbiamente mal determinata in declinazione; essa fu osservata anche a Milano, e diede risultati meno buoni. Il suo moto proprio è ancora molto incerto.

STELLA	φ	PESO
* *58 Ursae Majoris*	45° 4′ 8″.345	3
ε *Aurigae*	8 .299	10
31 Lyncis	8 .264	8
* ψ^5 *Aurigae*	8 .254	10
* κ *Andromedae*	8 .242	10
* *Gr. 2533*	8 .154	3
α *Cygni*	8 .033	10
* *36 Lyncis*	7 .995	2
μ *Ursae Majoris*	7 .993	3
ι *Andromedae*	7 .977	10
β *Aurigae*	7 .941	10
R Lyrae	7 .932	1
λ *Ursae Majoris*	7 .838	2
ν *Persei*	7 .799	10
δ *Cygni*	7 .763	8
σ *Herculis*	7 .622	7
* ξ *Cygni*	7 .579	10
10 Ursae Majoris	7 .455	5
* *33 Bootis*	7 .149	10
Media generale 45° 4′ 7″.914		

L'errore medio di un'osservazione, calcolato in base agli scartamenti dei valori singoli dalle medie del quadro ora scritto, mediante la formula

$$\epsilon = \sqrt{\frac{[vv]}{m-k}},$$

dove m è il numero delle osservazioni e k quello delle stelle, è risultato uguale a $\pm 0'',405$. Esso è indipendente dagli errori delle declinazioni adoperate, e si può considerare come risultante di due parti, una delle quali dovuta all'incertezza colla quale si osservarono gli appulsi, l'altra a tutte le residue cause d'errore, specialmente locali ed istrumentali. Della prima è indice sicuro l'error medio ϵ_1 già calcolato per ogni stella; indicando con ϵ_2 l'error medio dovuto alle altre cause, abbiamo

$$\epsilon = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}.$$

Ora, combinando le ϵ_1, si trova che il valore di ϵ_1 risultante alla media è $\pm 0'',183$.

Quindi

$$\epsilon_2^2 = (0{,}405)^2 - (0{,}183)^2 = 0{,}130 = (0{,}361)^2.$$

In altri termini, l'error medio di una osservazione per la parte dovuta agli appulsi non è che la metà dell'error medio per la parte imperfettamente corretta degli errori strumentali e per le cause incognite di errore.

Col valore $\epsilon = \pm 0'',405$ si è calcolato l'errore medio x di una posizione del catalogo, secondo il metodo esposto nella citata " Determinazione della latitudine... di Milano... e di Parma ". Con due sole approssimazioni si ottenne

$$x^2 = 0{,}056,$$

e quindi i pesi con i quali ciascuna stella dovette fornire il valore definitivo della latitudine (essendo 1″ l'error medio corrispondente all'unità di peso) furono i seguenti:

4,544 per *R Lyrae,* osservata una volta;
7,243 " *36 Lyncis* e λ *Ursae majoris,* osservate due volte;
9,031 " *58 Ursae majoris, Gr. 2533,* μ *Ursae majoris,* osservate tre volte;
11,254 " *10 Ursae majoris,* osservata cinque volte;
12,581 " σ *Herculis,* osservata sette volte;
13,062 " *31 Lyncis* e δ *Cygni,* osservate otto volte;
13,802 " le rimanenti nove stelle, osservate dieci volte.

Con questi pesi, e coll'error probabile dato dalla formula

$$r = 0{,}6745 \frac{1''}{\sqrt{\Sigma p}},$$

si ottiene il seguente valore definitivo della latitudine del centro del Cupolino Ovest dell'Osservatorio di Torino

$$\varphi = 45^\circ\ 4'\ 7'',920 \pm 0'',045,$$

che differisce solo di 0,006 dalla media generale semplice e di 0,022 dal valore dato nella Comunicazione preliminare.

RICERCHE DI GEOMETRIA

SULLE

SUPERFICIE ALGEBRICHE

MEMORIA

DI

FEDERIGO ENRIQUES

Approvata nell'Adunanza del 25 Giugno 1893.

INTRODUZIONE

1. La geometria che studia le proprietà degli enti algebrici (curve, superficie, varietà) invariabili per trasformazioni birazionali dell'ente dicesi *geometria sull'ente* (1).

Il concetto di questa geometria scaturisce per la prima volta dalla teoria delle funzioni algebriche di una variabile nella capitale memoria di Riemann sulla *Theorie der Abelschen Functionen* (2). Da un altro lato la geometria sul piano (e sulle superficie razionali) nasce dai classici lavori sulle corrispondenze algebriche di Cremona e Clebsch (trasformazioni del piano, rappresentazione delle superficie omaloidi).

Nello sviluppo della geometria sull'ente sono da distinguersi due momenti caratterizzati da due diversi indirizzi (3).

a) In primo luogo si presenta la ricerca delle condizioni perchè due enti possano riferirsi in corrispondenza birazionale: questa ricerca è il naturale resultato della provata fecondità di quelle trasformazioni. Essa si presenta sotto due aspetti. Da un lato la determinazione di caratteri numerici invariantivi (legati alle singolarità dell'ente) come nei lavori del signor Zeuthen (4). Dall'altro lato lo studio delle funzioni collegate all'ente algebrico (in modo invariantivo). Sotto questo secondo aspetto (che può anche considerarsi come collocato fra il primo momento della geometria sull'ente ed il secondo nel quale si ricercano le proprietà dell'ente stesso) la questione della possibilità di trasformare birazionalmente un nell'altro due enti al-

---

(1) Le notizie storiche che seguono sono in parte tolte dalle lezioni litografate del sig. Klein sulle " Riemannsche Flächen „ (1892) e dalle " Vorlesungen „ di Clebsch-Lindemann (Bd. I), che si possono consultare per maggiori dettagli.

(2) Crelle, t. 64.

(3) Naturalmente la differenza tra i due indirizzi non è netta, ed alcune ricerche partecipano dell'uno e dell'altro, ma questa osservazione è soltanto un corollario della gran legge di continuità che governa le produzioni scientifiche (come ogni altra produzione organica).

(4) " Mathematische Annalen „, t. III e IV. Appartengono a questa categoria varie dimostrazioni della conservazione del genere per le curve tra le quali una del sig. Bertini. Cfr. Clebsch-Lindemann. Bd. I (3^a parte).

gebrici, venne trattata nei lavori fondamentali di Clebsch (1), che stabilì così il concetto di genere per le curve e per le superficie; questi resultati generalizzati alle varietà comunque estese furono ritrovati algebricamente dal signor Noether (*Mathematische Annalen,* II e VIII), dove insieme al genere di Clebsch (*Flächengeschlecht*) viene introdotto per le superficie il *Curvengeschlecht.*

La determinazione dei moduli per le curve (2) e per le superficie (3) rientra pure nel primo momento dello sviluppo della geometria sull'ente.

Accanto a queste ricerche sono ancora da porsi quelle che studiano la classificazione di certi enti mediante la riduzione a *tipi* (irreducibili per trasformazioni birazionali), così le ricerche sulla riduzione (all'ordine minimo) dei sistemi lineari di curve piane (4) mediante trasformazioni cremoniane, e sotto un punto di vista non molto dissimile possono riguardarsi le ricerche sulla razionalità delle superficie fra cui sono classiche quelle del signor Noether (5).

b) Nel secondo momento la geometria sull'ente diviene essenzialmente studio delle proprietà invariantive dell'ente (6). Nella geometria sopra una curva questo studio si riattacca all'applicazione delle funzioni abeliane di Clebsch (l. c.) e riceve stabile assetto geometrico nell'importante memoria dei signori Brill e Noether (7).

In questo lavoro si trovano riuniti i principali teoremi di geometria sopra una curva che hanno più tardi numerose ed utili applicazioni nella teoria delle curve gobbe dello spazio (8).

Ma una nuova idea caratterizza uno sviluppo nuovo della geometria sopra una curva rendendola indipendente (come si richiedeva per la sua perfezione) da una particolare varietà cui la curva può supporsi appartenere. Intendo parlare dell'uso degli iperspazi, i quali introdotti da Grassmann nel 1844 (come pure espressioni analitiche) e da Riemann, furono usati dal Cayley nel 1867 e 1869 (come varietà di elementi di arbitraria natura (9)) e con successo applicati allo studio delle curve dal Clifford (10) (1878).

Il signor Veronese raccogliendo questi vari materiali di geometria iperspaziale scrisse nel 1881 il suo classico lavoro (11) che fu il punto di partenza dello svolgi-

---

(1) *Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie* (Crelle, t. 63). Cfr. anche Clebsch e Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866) e Clebsch (" Comptes rendus „ 1868) dove è stabilito il concetto di genere per le superficie.

(2) Riemann, l. c., § 12. *Waierstrass,* cfr. Brill e Noether (" Math. Ann. „, VII) o Clebsch-Lindemann, Bd. I (2ª parte).

(3) Noether, *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen* (" Sitzungsberichte von Berlin „, 1888).

(4) Noether (" Math. Ann. „, Bd. V); Bertini (" Annali di Mat. „, serie 2ª, t. VIII); Guccia (" Circolo Mat. di Palermo „, t. I); Jung (" Istituto lombardo „, 1887-88 e " Annali di Mat. „, serie 2ª, t. XV e XVI); Martinetti (" Istituto lomb. „, 1887 e " Circolo di Palermo „, t. I); Castelnuovo (" Circolo di Palermo „, 1890 e " Accademia di Torino, Atti „, 1890).

(5) " Mathem. Ann. „, III.

(6) Un progresso analogo ha subìto la geometria proiettiva nel passaggio da Poncelet a Staudt.

(7) *Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (" Mathem. Ann. „, Bd. VII).

(8) Cfr. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (" Journ. für Mathem. „, Bd. 93); Halphen, *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (" Comptes rendus „, t. 70, 1870).

(9) Questo modo di vedere fu introdotto da Pluecher.

(10) *On the Classification of Loci* (" Phil. Transactions „).

(11) *Behandlung der proiectiwische Verhältnisse,* ecc. (" Math. Ann. „, XIX).

mento di quella geometria avvenuto specialmente in Italia per opera del signor Veronese stesso e del signor Segre (1).

Fu allora che si pensò di rendere indipendente la geometria sopra una curva dalla rappresentazione di essa nel piano e di sostituire così in quello studio i concetti di curve aggiunte, ecc. coi procedimenti più semplici e generali proprî delle considerazioni iperspaziali. Il signor Segre ed il signor Castelnuovo (2) riuscirono ad elevare con questo concetto una nuova teoria della geometria sopra una curva che alla semplicità ed armonia delle basi congiunge una potenza per la quale si fecero in questo campo nuovi ed importanti acquisti.

La geometria sopra una superficie non ha progredito in proporzione alla geometria sopra una curva, anzi si può dire che essa non è ancora entrata nel 2° momento del suo sviluppo, poichè la teoria generale dei sistemi lineari di curve sopra una superficie di arbitrario genere (fatta nel senso della geometria sopra una superficie) non è ancora avviata. Il lavoro fondamentale nell'argomento resta ancora quello (citato) del signor Noether del 1874-75 (*Mathem. Ann.*, VIII) nel quale le funzioni invariantive appartenenti ad una superficie vengono studiate in modo profondo. Successivamente si ha un lavoro del signor Picard (3) dove in particolare sono studiate le superficie con trasformazioni in sè stesse, e due note del signor Castelnuovo (4) contenenti notevoli esempi di particolari classi di superficie. Invece la geometria sul piano è entrata nel secondo periodo del suo sviluppo col noto lavoro del sig. Castelnuovo (5) il quale contiene concetti originali ed importanti a cui sembra possa darsi maggiore estensione coll'applicarli allo studio delle superficie di genere > 0 (6).

2. Delineato rapidamente lo svolgimento che ebbe fino ad oggi la geometria sull'ente ed in particolare sopra una superficie, debbo esporre quali contributi porti questo lavoro alla nominata teoria e quali concetti mi abbiano guidato nella ricerca.

Lo scopo principale del lavoro è lo studio dei *sistemi lineari* ∞^r di curve (algebriche) appartenenti ad una superficie (algebrica). Li definisco come sistemi tali che per r punti della superficie passi una curva di essa, e di cui gli elementi (curve) possono riferirsi proiettivamente ai punti di uno spazio lineare S_r (7).

---

(1) Per maggiori dettagli cfr. la Monografia storica del sig. Loria, *Il passato e il presente delle principali teorie geometriche* (“ Accad. di Torino, Memorie „, serie 2ª, t. 38). Cfr. pure Segre, *Su alcuni indirizzi*, ecc. (“ Rivista di Mat. „, 1891).

(2) Cfr. specialmente: Segre, *Sulle curve normali di genere* p *dei varii spazii* (“ Istituto lomb. „, 1888 e *Courbes et surfaces réglées* (“ Mathem. Ann. „, t. XXXIV e XXXV); Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (“ Accad. di Torino, Atti „, 1889).

(3) *Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (“ Journal de Lionville „, 1889).

(4) “ Istituto lombardo „ (1891).

(5) *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane* (“ Accad. di Torino, Memorie „, 1891). Tra i lavori precedenti si possono considerare come facenti parte di questo 2° momento della geometria sul piano, la nota del sig. Segre (“ Circolo di Palermo „, t. I) e quella del sig. Castelnuovo (“ Ann. di Mat. „, 1890).

(6) Per la geometria sulle superficie rigate cfr. il citato lavoro del sig. Segre (“ Mathematische Annalen „, XXXV).

(7) La 2ª proprietà è una conseguenza della 1ª pr. $r > 1$, se le curve del sistema non si spezzano. Cfr. la mia nota: *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (“ Accad. dei Lincei „, giugno 1893) e la successiva del sig. Castelnuovo (“ Accad. di Torino „, giugno 1893) in cui quel teorema è dedotto da un altro più generale relativo alle involuzioni sopra una curva.

Dopo avere premesso alcuni lemmi (noti) sui sistemi di curve riduttibili passo ad esporre il concetto di *sistema normale* e di *sistema completo*, cioè di sistema non contenuto rispettivamente in un altro dello stesso grado o dello stesso genere, e stabilisco che un sistema di dato grado D (cioè di cui due curve s'incontrano in D punti variabili) appartiene ad un determinato sistema normale dello stesso grado; e risulta poi che sopra una superficie di genere > 0 una curva appartiene ad un determinato sistema completo dello stesso genere. Ne deduco la 1ª parte del teorema del resto (*Restsatz*) (1), (cap. I).

Nel cap. II considero le curve le quali godono la proprietà di segare un gruppo residuo (nel senso di Brill e Noether) della serie *caratteristica* (2) sulla curva generica d'un sistema lineare ∞^r (dotato di curve fondamentali distinte) ed un gruppo contenuto nel residuo della serie caratteristica sopra la curva generica di un sistema ∞^{r-1} contenuto nel primo: siffatte curve, sommate con curve fondamentali del dato sistema, godono le medesime proprietà rispetto ad ogni altro sistema della superficie (anche non dotato di curve fondamentali distinte) e sono segate sopra una superficie d'ordine n in S_3 da superficie aggiunte d'ordine $n - 4$: perciò le dette curve formano un sistema lineare (se esistono) e le componenti variabili del sistema (che denomino curve *canoniche*) hanno un carattere invariantivo rispetto alla superficie il quale risulta fissato molto semplicemente dalla loro definizione (3). Nasce quindi una distinzione dei sistemi appartenenti ad una superficie in sistemi *puri* ed *impuri* secondochè le curve canoniche segano sulla loro curva generica un gruppo residuo della serie caratteristica o un gruppo contenuto in un tal gruppo residuo: sopra una superficie convenientemente trasformata (facendo segare dai piani le curve d'un sistema puro), i primi sistemi non hanno punti base, i secondi sì; la questione si riattacca alle curve eccezionali (*ausgezeichnete*) di Noether. Un sistema puro normale è necessariamente completo.

Nel cap. III introduco il concetto di *sistema aggiunto* ad un sistema lineare (C) di dimensione $r \geq 2$; se (C) ha curve fondamentali distinte, le curve del detto sistema aggiunto sono definite dal segare un gruppo canonico sulla curva generica di (C) e dal segare sopra la curva generica d'un sistema ∞^{r-1} contenuto in (C), un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e di quella differenza fra la serie segata sulla curva da (C) e la serie caratteristica del sistema ∞^{r-1} (o il gruppo dei punti base semplici se $r = 2$).

La definizione data del sistema aggiunto esclude che (C) contenga in sè un sistema ∞^{r-1} di curve razionali (il che è impossibile se la superficie non è razionale); sotto tale restrizione il sistema aggiunto a (C) coincide coll'aggiunto puro definito dal signor Castelnuovo pei sistemi di curve piane, quando la superficie è

---

(1) Noether, " Mathem. Ann. ", VIII. Come ognun vede quest'ordine di idee è una conveniente estensione alle superficie dei concetti che, come ho detto, il sig. Segre ed il sig. Castelnuovo introdussero a fondamento d'una teoria della geometria sopra una curva.

(2) Con questo nome (introdotto dal sig. Castelnuovo pei sistemi di curve piane) indico la serie che tutte le curve di un sistema segano sopra la curva generica di esso.

(3) L'invariantività è dimostrata analiticamente dal sig. Noether (" Mathem. Ann. ", VIII). Il numero delle curve canoniche linearmente indipendenti è il genere (geometrico) p della superficie.

razionale. Quando ∞^3 curve C sono sezioni piane d'ordine n d'una superficie F di S_3 il sistema aggiunto a (C) viene segato sulla F dalle superficie aggiunte d'ordine $n - 3$.

Per le superficie di genere $p > 0$ (a cui ci riferiamo) il sistema aggiunto è il *sistema normale somma* del sistema canonico di (C) e dei suoi punti base (se (C) è impuro) e questa proprietà serve a definirlo nel caso in cui (C) non abbia curve fondamentali distinte.

Stabilire la dimensione del sistema aggiunto ad un sistema (C) di genere π, è questione della massima importanza per le molteplici applicazioni cui conduce la considerazione del sistema aggiunto. Indicando con δ (C) il difetto di completezza (≥ 0) della serie (canonica) che il sistema aggiunto sega sulla curva generica C di (C), la dimensione del detto sistema aggiunto è $p + \pi - 1 - \delta$ (C).

Se (C) è un sistema puro *semplice* (cioè in cui il passaggio d'una curva per un punto non trae di conseguenza il passaggio per altri punti) si dimostra che la quantità δ (C_1) relativa ad un arbitrario sistema puro (C_1) è $\leq \delta$ (r C) (essendo (r C) il sistema rplo di (C)) per r assai grande. Se dunque il δ (r C) invece di crescere indefinitamente con r ha un massimo K (come avviene certo se la superficie ha singolarità ordinarie), K è un *vero carattere invariantivo della superficie.* Importante è il caso in cui $K = 0$; indipendentemente da qualsiasi restrizione relativa alle singolarità della superficie, si prova che è $K = 0$ se δ (2 C) $= 0$, e viceversa; quindi se (C) è un sistema puro semplice per cui δ (2 C) $= 0$ per ogni altro sistema (anche impuro) di genere π, la dimensione del sistema aggiunto è $p + \pi - 1$: se in particolare la superficie è così trasformata da avere soltanto singolarità ordinarie, il genere geometrico p di essa è uguale al suo genere numerico p_1 definito da Zeuthen e Noether, e viceversa è $K = 0$ se $p = p_1$. La restrizione $K = 0$ è ammessa nel seguito per le superficie che si considerano (fino all'ultimo cap. escl.); e nel § 7 del cap. III ho creduto opportuno (vista l'importanza della cosa) di richiamare altre circostanze che permettono di concludere la sussistenza di tale fatto.

Servendomi del sistema aggiunto dimostro quindi che ogni sistema impuro (con punti base distinti) può dedursi coll'aggiunta dei suoi punti base da un sistema puro o (forse) da un sistema con soli punti base semplici: dimostro poi la 2ª parte del Restsatz (§ 3), e nei §§ 5 e 6, do esempi relativi alle superficie di genere 0, 1 (cap. III).

Il maggiore interesse si concentra nello studio dei sistemi puri (C) (completi); il sistema aggiunto permette di dedurre che la loro serie caratteristica è completa se tale è quella del sistema canonico (o se il sistema canonico non ne ha alcuna) (cap. IV): in siffatta ipotesi per l'intersezione di due curve C di (C) passano $2p + \omega - i$ curve (linearmente indipendenti) del sistema aggiunto a (C), essendo p il genere della superficie, $i - 1$ la dimensione del sistema residuo di (C) rispetto al canonico (l'*indice di specialità* $i = 0$ se (C) è *non speciale* cioè non contenuto nel canonico) ed $\omega \geq 0$; designo ω col nome di *sovrabbondanza* di (C) perchè (come risulta più tardi) se si suppone la superficie in S_3 e si fa segare (C) mediante aggiunte in modo arbitrario, la sua dimensione *virtuale* ρ calcolata in base alle formole di postulazione di Noether è tale che (indicando con r la dimensione *effettiva* di (C)) si ha:

$$r - \rho = \omega - i.$$

Se π è il genere di (C) ed n è il suo grado, si ha la relazione

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

(dove $i = 0$ se (C) è non speciale).

Questa relazione costituisce un'estensione del noto teorema di Riemann Roch della geometria sopra una curva: essa fu data sotto forma di disuguaglianza dal signor Noether (1), ma la relativa dimostrazione mi sembra presentare una lacuna.

Definendo ω mediante l'uguaglianza $r - \rho = \omega - i$, la relazione precedente sussiste ancora se (C) è impuro (dedotto coll'aggiunta di punti base da un sistema puro) ed è ancora $\omega \geq 0$.

Infine la relazione stessa sussiste anche prescindendo dalla restrizione invariantiva per la superficie che la serie caratteristica del sistema canonico sia completa, ma allora non risulta dimostrato che sia sempre $\omega \geq 0$; si ha però certo $\omega \geq 0$ se $r \geq \frac{p^{(1)}-1}{2}$ essendo $p^{(1)}$ il 2° genere (*Curvengeschlecht*) della superficie.

L'utilità della precedente relazione si presenta nel cap. V trattando delle curve fondamentali. Poste alcune limitazioni per queste curve si dimostra una relazione fra i caratteri d'un sistema (C), il *genere* d'una curva fondamentale e i caratteri del sistema residuo (C'): se ne deduce alcune notevoli proprietà dei sistemi *regolari* ($\omega = 0$) e del sistema canonico; p. e. un sistema regolare di dimensione $> p$ non ha curve fondamentali di genere > 0. Così se di un sistema puro (C), senza curve fondamentali di genere > 0, si considera il multiplo secondo m, per m assai grande questo è regolare: si può in tal modo trattare un caso semplice delle formule di postulazione relative alle varietà che passano per una superficie negli iperspazi.

Infine le curve fondamentali di genere 0 dei sistemi lineari sono degne di attenzione perchè conducono ad un nuovo carattere invariantivo per le superficie ($p > 0$): in particolare si troverà dimostrato un teorema sui punti doppi che una superficie può acquistare (per trasformazione) in S_3.

Nel cap. VI do un rapido sguardo alle involuzioni. Estendo per quelle irrazionali un teorema fondamentale stabilito dal signor Castelnuovo (2) per le involuzioni appartenenti ad una curva.

Finalmente determino una espressione invariantiva per le involuzioni razionali sopra una superficie, formata coi caratteri di una rete di cui due curve si segano in un gruppo dell'involuzione.

Questo in breve è il tessuto del mio lavoro, di cui i numerosi mancamenti spero mi si vorranno perdonare in vista degli ostacoli che ad ogni passo s'incontrano; io sarò lieto se queste ricerche varranno ad invogliare taluno allo studio di un così bello argomento di cui le difficoltà esercitano una meravigliosa attrattiva.

1° giugno, 1893.

FEDERIGO ENRIQUES.

---

(1) " Comptes rendus ", 1886.
(2) " Accad. dei Lincei ", 1891.

I.

Generalità sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica.

1. *Definizioni. — Teoremi preliminari.* — Si dirà *sistema lineare* ∞^k *di curve* (algebriche) sopra una superficie algebrica S, un sistema di curve tale che per k punti della superficie in posizione generica passi una ed una sola curva del sistema, e tale che gli elementi (curve) di esso possono riferirsi proiettivamente agli elementi generatori (punti o iperpiani S_{k-1}) di una forma lineare S_k (in modo che ad un S_{k-1} o ad un punto corrisponda un sistema lineare immerso in quello ∞^k e viceversa) (1).

Sopra una superficie appartenente ad uno spazio S_r un sistema lineare ∞^k di varietà (ad r—1 dimensioni) non contenenti la superficie, sega sempre un sistema lineare ∞^k di curve; vedremo più tardi come in tal modo si possa ottenere qualunque sistema lineare d'una superficie S, ad es. segandola con sistemi lineari di superficie se essa appartiene allo spazio S_3 (o è stata proiettata in quello); ma noi vogliamo anzitutto ricavare le proprietà generali dei sistemi lineari dalla definizione che ne abbiamo data, senza occuparci del modo con cui sono stati costruiti.

Se si ha un sistema lineare ∞^k di curve di cui le parti variabili si segano due a due in D punti variabili, diremo che il sistema è di *dimensione* k, e *grado* D: se le curve del sistema sono irreduttibili e la curva generica ha il genere π, diremo che il sistema ∞^k è di *genere* π.

Se $k = 1$ non si può parlare di grado del sistema. Non vi sono altri casi in cui non si può parlare di grado d'un sistema irreduttibile.

Infatti se $k > 1$ per un punto della superficie deve passare più d'una curva del sistema e quindi il punto è comune a due curve; perciò l'unico caso in cui non si possa parlar di grado del sistema è quello in cui due curve aventi un punto comune abbiano comuni altri infiniti punti ossia abbiano comune una linea, l'insieme di tutte queste linee è tale che per un punto della superficie ne passa *una* ossia è ciò che dicesi un *fascio;* allora *le curve del sistema si compongono d'un certo numero* m *di curve del fascio e non sono più irreduttibili.* Per ogni sistema lineare irreduttibile di dimensione $k > 1$ i caratteri k, D, π hanno dunque un significato ben definito.

Può darsi che tutte le curve d'un sistema ∞^k passanti per un punto, debbano

---

(1) Il secondo fatto per $k > 1$ è una conseguenza del primo quando la curva generica del sistema è irreduttibile. Cfr. la mia nota: *Una questione sulla linearità dei sistemi di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (" Accad. dei Lincei ", giugno 1893). Il teorema è stato nuovamente dedotto dal sig. Castelnuovo come corollario di una importante proposizione sulle involuzioni appartenenti ad una curva algebrica (" Accad. di Torino ", giugno, 1893).

in conseguenza passare per altri punti della superficie in numero finito $m-1$ variabili con esso, e si ha allora sulla superficie una serie ∞^2 di gruppi di m punti tale che un punto appartiene ad *un* gruppo della serie, ossia ciò che può dirsi una *involuzione* I_m; possiamo dire che il sistema *appartiene* all'involuzione I_m; diremo *semplice* un sistema in cui il passaggio d'una curva generica per un punto non trae di conseguenza il passaggio per altri punti variabili con esso.

Un sistema ∞^2 (*rete*) appartiene ad una involuzione I_D, se D è il suo grado. Tranne per le superficie omaloidi un sistema semplice ha sempre la dimensione $k > 2$.

Si riferiscano proiettivamente le curve del sistema semplice (C) agli iperpiani (S_{k-1}) di S_k; ogni punto della superficie S è *base* per un sistema lineare ∞^{k-1} còstituito da tutte le curve di (C) che passano per esso; a questo sistema ∞^{k-1} corisponde in S_k la ∞^{k-1} degli iperpiani per un punto P, ossia la stella di centro P: in questo modo nascono in S_k ∞^2 punti P i quali generano una superficie F, e poichè, per ipotesi, (C) è un sistema semplice, la *superficie* F *è riferita alla* S *punto per punto.* Indicheremo brevemente la trasformazione eseguita dicendo che si è *trasformata la* S *in un'altra superficie* F *di* S_k *su cui le curve del dato sistema* (C) *sono segate dagli iperpiani* od anche dicendo che *facciamo segare sulla saperficie le curve del sistema* (C) *dagli iperpiani di* S_k.

La trasformazione indicata non riesce più biunivoca se il sistema (C) non è semplice. In tal caso possiamo sempre costruire un sistema lineare ∞^1 di curve (fascio razionale) che non appartenga all'involuzione I_m cui appartiene (C); invero basta considerare il fascio segato da un fascio di iperpiani (o di piani) nello spazio S_r a cui la superficie S appartiene, escludendo (tutt'al più) posizioni particolari dello S_{r-2} base. Ciò posto si riferiscano proiettivamente le curve del sistema (C) agli iperpiani (S_k) di un S_{k+1} per un punto O e le curve del fascio razionale agli iperpiani per un S_{k-1} in S_{k+1} non contenente O: un punto della superficie S è base per un sistema ∞^{k-1} di curve in (C) ed appartiene ad una curva del fascio; al sistema ∞^{k-1} corrisponde la forma degli iperpiani aventi una retta base per O, ed alla curva un iperpiano per lo S_{k-1} che incontra la detta retta in un punto P; il luogo dei punti P così costruiti *è una superficie* F *di* S_{k+1} *riferita biunivocamente alla* S *su cui le curve del sistema* (C) *sono segate dagli iperpiani per* O.

Questa 2ª trasformazione riesce biunivoca per tutti i sistemi (C) (naturalmente anche per quelli semplici) tali che il passaggio di una curva di essi per un punto non tragga di conseguenza il passaggio per infiniti punti. Infine anche *un fascio razionale di curve può farsi segare dai piani d'un fascio in* S_3 (o dagli iperpiani d'un fascio in un iperspazio), adoprando una rete (od altro sistema) ausiliaria e compiendo la trasformazione indicata innanzi. È utile che ci fermiamo a considerare alcune particolarità di queste trasformazioni ottenute partendo da una rete e da un fascio (nel seguito si sottintenderà razionale salvo avviso in contrario), come pure di un'altra trasformazione analoga che può ottenersi partendo da tre fasci, poichè nel seguito ci occorrerà di richiamare queste proprietà.

Si abbia una rete di grado D, ed un fascio di cui una curva generica seghi in n punti variabili una curva della rete e che non appartenga all'involuzione I_D che la rete determina; riferiamo proiettivamente le curve della rete ai piani per un punto O e le curve del fascio ai piani per una retta r (non contenente O), compiendo

così la trasformazione della data superficie. Sulla nuova superficie F i piani per r segano (fuori di r) curve d'ordine n (aventi n punti comuni coi piani per O); ad un punto della r corrispondono i D punti base d'un fascio appartenente alla rete, e quindi la r è D pla per la F, la quale risulta d'ordine $n+\mathrm{D}$; una retta per O sega la F in D punti (base d'un fascio immerso nella rete), quindi O è n plo per la superficie F: inoltre la superficie contiene curve multiple secondo $h_1, h_2, \ldots$ (in generale una curva doppia) i cui punti corrispondono risp. a gruppi di $h_1, h_2, \ldots$ punti contenuti in un gruppo della involuzione $\mathrm{I_D}$ cui appartiene la rete ed appartenenti ad una stessa curva del fascio; vi sono poi in generale rette multiple per O della F e punti multipli isolati corrispondenti a curve che non hanno intersezioni variabili con quelle della rete (*fondamentali*), ed infine la F potrà presentare anche altre singolarità in corrispondenza a singolarità della primitiva superficie. È anche d'uopo avvertire che dalla superficie F può eventualmente staccarsi un certo numero di volte il piano O r, ed allora soltanto la parte residua dovrà considerarsi la trasformata propria della superficie data; il caso accennato si verifica se il fascio e la rete hanno una curva comune cui corrisponda il piano Or sia considerato come appartenente alla stella di centro O, sia come appartenente al fascio di asse r.

In modo analogo potranno vedersi le proprietà, che ora accenno, della trasformazione in cui si fanno segare 3 fasci dai piani risp. per 3 rette r_1, r_2, r_3 (non passanti per un punto). Se le curve del 1° fascio incontrano quelle del 2° risp. in n_2, n_3 punti e quelle del 2° e del 3° s'incontrano in n_1 punti (e 3 curve di ciascuno dei fasci per un punto non han comuni altri punti variabili con esso), riferendo proiettivamente le curve dei 3 fasci risp. ai piani per r_1, r_2, r_3, la superficie si trasforma in una F di ordine $n_1+n_2+n_3$, che ha le rette r_1, r_2, r_3, multiple risp. secondo n_1, n_2, n_3, ecc. È da osservarsi che due rette ad es. r_1, r_2 possono essersi scelte passanti per un punto O, ed allora può ancora accadere che si stacchi il loro piano (un certo numero di volte) dalla superficie F.

Stabiliamo ora il seg. teorema: *Se in un sistema lineare la curva generica si spezza, o il sistema si compone delle curve irriduttibili d'un altro sistema a cui si sono aggiunte delle curve (componenti) fisse, o le componenti irriduttibili delle curve del sistema formano un fascio (razionale o no)* (1).

Facciamo segare le curve del sistema (C) (in cui si può supporre $k>1$) dagli iperpiani di S_{k+1} per un punto O sulla superficie F riferita in modo semplice o multiplo alla primitiva; la F non può essere spezzata (poichè tale non si suppone la primitiva), quindi dico che le sue sezioni iperpianali per O non possono tutte spezzarsi tranne in rette per O. Basta vedere il fatto per $k=2$ potendosi altrimenti proiettare la F in S_3. Ora ricordiamo che la F può supporsi riferita semplicemente alla primitiva superficie se la F stessa non è un cono di vertice O (ossia la rete (C) ha un grado): escluso che la F sia un cono, consideriamo un fascio di piani seganti la F il cui asse r passi per O e non appartenga alla F; le curve C sezioni dei piani per r formano un fascio cioè un sistema che sulla superficie irreduttibile F non può

(1) Cfr. pei sistemi lineari nel piano: Bertini (" Istit. lomb. ", 1882), e per quelli su una qualunque superficie: Noether, " Math. Ann. ", III, pag. 171; VIII, p. 524.

spezzarsi in più sistemi; se in ogni piano per r la sezione della F è spezzata in $s\,(> 1)$ curve K, sulla varietà ∞^1 che ha per elementi le curve K (componenti un fascio) i gruppi di s curve costituenti le C formano una serie lineare g_s^1 la quale possiede almeno $2\,(s - 1)$ elementi di coincidenza: si arriverebbe così alla conclusione che per un'arbitraria retta r per O vi sono dei piani tangenti alla F lungo una linea (una K), e poichè vi sarebbero infiniti di tali piani la F sarebbe contata più volte, ciò che è assurdo.

Ciò posto nel 1° caso (cioè se le sezioni generiche della F per 0 sono irreduttibili) alla curva generica di (C) corrisponde una parte variabile irreduttibile sezione della F con un iperpiano per O, ed il punto 0 che non può esser dato se non da componenti fisse; nel 2° caso le curve del sistema (C) si compongono con quelle del fascio, rappresentato dalle ∞^1 rette per O sulla F. Così ogni sistema riduttibile di cui le curve non si compongono delle curve d'un fascio definisce un sistema irreduttibile di ugual dimensione ottenuto staccando le componenti fisse: diremo genere e grado del primitivo sistema quelli del sistema irreduttibile così definito, ed *escluderemo nel seguito la considerazione dei sistemi di cui la curva generica si compone di* m *curve d'un fascio.*

Sussiste pure il teorema:

In un sistema lineare di curve irreduttibili la curva generica non può avere punti multipli fuori dei punti base, e delle linee multiple della superficie (1).

Nel sistema lineare si consideri un fascio (razionale); basterà dimostrare che non può esistere una linea, non singolare per la superficie, luogo di punti multipli delle curve del fascio; ne seguirà allora immediatamente il teorema enunciato. Ora la dimostrazione si farà per assurdo.

Supposto che esista una tal curva C luogo dei punti multipli delle curve del fascio, si può immaginare sulla superficie una rete di curve per la quale il passaggio per un punto della C non porti di conseguenza il passaggio per altri punti della C stessa (in modo cioè che la C non sia luogo di coppie appartenenti a gruppi dell'involuzione definita dalla rete), ed allora si può trasformare la superficie in una F su cui le curve della rete sien segate dai piani per un punto O, quelle del fascio dai piani per una retta r, ed alla curva C venga a corrispondere sulla F una curva C' non singolare; ora la sezione piana generica della F per r non può avere punti multipli fuori della curva multipla della F stessa e della retta multipla r la quale contiene i punti di contatto con F del piano generico per r; è dunque assurdo che le sezioni piane per r della F abbiano dei punti multipli i quali descrivano la C' come avverrebbe per conseguenza della nostra ipotesi sulla C.

2. *Sistemi normali e sistemi completi.* — Come è noto una superficie si dice *normale* in un S_n a cui appartiene, quando essa non può ritenersi come proiezione di una superficie dello stesso ordine (ossia da un punto esterno) di S_{n+1}; traducendo questa definizione in linguaggio invariantivo diremo *normale un sistema lineare (avente un grado) che non può esser contenuto in un altro dello stesso grado.* È chiaro, appunto

(1) Cfr. pei sistemi piani: Bertini (l. c.).

per la considerazione proiettiva da cui siamo partiti, che se un sistema semplice è contenuto in un altro dello stesso grado, anche i generi dei due sistemi debbono essere uguali. Non sussiste però la proprietà inversa, giacchè proiettando una superficie normale da un suo punto semplice (da S_n in S_{n-1}) si ottiene una nuova superficie normale le cui sezioni sono curve dello stesso genere, ma di cui l'ordine è diminuito di una unità. Questa osservazione fa nascere l'idea di considerare accanto ai sistemi normali quei sistemi (che diremo *completi*) *i quali non possono esser contenuti in altri di ugual genere;* il concetto di sistema completo è dunque più largo di quello di sistema normale, poichè, per quanto abbiamo osservato, *un sistema completo è sempre un sistema normale* (anche se non è semplice come risulta da un successivo teorema), *ma non viceversa.* È anche opportuno rilevare con esattezza ciò che può intendersi dicendo che un sistema *è contenuto* in un altro. Dato un sistema (K) di curve K, un sistema (C) di curve C è contenuto in (K) in modo *totale* se ogni curva C è da sola una K; ma può anche darsi che invece ogni curva C non costituisca da sola una K, mentre una curva composta di una C e di un'altra C′ sia una K; si dirà allora che il sistema (C) è contenuto in (K) in modo *parziale* (ossia che le C sono curve parziali di (K)). Ora io dico che *un sistema non può essere contenuto parzialmente in un altro di ugual grado.*

Infatti se un sistema ∞^h (K) ne contiene uno ∞^r (C), facendo segare le curve K di (K) dagli iperpiani di S_{h+1} per un punto O, sulla superficie F, le curve C di (C) risulteranno segate dagli iperpiani per un S_{h-r} contenente O: se ora le C sono contenute in (K) in modo parziale il detto S_{h-r} sega F secondo una curva C′ (o in un gruppo di punti) che insieme a ciascuna C dà una K ed allora si può considerare un sistema ∞^{r+1} immerso in (K) contenente parzialmente (C). Si facciano segare le curve del nuovo sistema dagli iperpiani di S_{r+1} sulla superficie F′ (la quale potrebbe essere anche in corrispondenza [1 m] colla F); alla curva C′ corrisponde su F′ un punto, in generale multiplo, e proiettando la F′ da questo punto si ottiene certo una superficie d'ordine minore; dunque il sistema (K) ha il grado maggiore di (C). Dalle considerazioni occorse risulta pure che, ove si voglia attribuire un senso invariantivo al fatto che un sistema sia contenuto parzialmente o totalmente in un altro, bisogna intendere che una curva C′ la quale insieme ad una C costituisce una curva K di (K), possa anche esser rappresentata da un punto; così se in un sistema lineare se ne considera un altro contenuto con qualche punto base di più (in modo che il grado diminuisce), il secondo sistema è contenuto parzialmente nel primo.

Per il resultato precedente si vede che la definizione di sistema normale come di sistema non contenuto in altro di ugual grado è indipendente dalla larghezza di significato che voglia attribuirsi alla parola *contenere,* dicendo contenuto in un altro anche un sistema che vi è contenuto parzialmente, giacchè è inutile cercare un sistema di ugual grado che ne contenga un altro parzialmente. Invece non accade lo stesso per rispetto alla definizione di sistema completo, ed un esempio varrà ad illuminare meglio la cosa. Si abbia sopra una superficie F un sistema (C) del genere π; le curve C per un punto semplice O costituiscono un sistema contenuto in esso dello stesso genere; ora si trasformi la superficie in modo che al punto O corrisponda una curva semplice K della superficie trasformata F′; alle curve C corrispondono sulla F′ le curve C′ d'un sistema (C′), ed alle curve C per O curve C′ spezzate nella K ed in

altre curve d'un sistema lineare (C''); *il sistema* (C'') *è contenuto parzialmente in quello* (C') *dello stesso genere.* Da questa osservazione scaturisce la necessità di fissare bene il senso della parola *contenere* nella definizione di sistema completo, e noi fissiamo di chiamare *completo un sistema che non può essere contenuto in altro di ugual genere nemmeno parzialmente;* questa definizione più larga è assolutamente necessaria (come appare dal prec. esempio) ove si voglia che il carattere d'un sistema di essere completo (invariantivo per trasformazioni birazionali della superficie) esprima qualcosa di differente da quello di esser normale.

Si considerino ora due fasci di curve irreduttibili di ugual genere aventi comune una curva totale dello stesso genere e sulla superficie F si facciano segare le curve di essi risp. dai piani per le rette r, r' che s'incontrano nel punto O; se la trasformazione è fatta nel modo generale indicato, alla curva comune dei due fasci, secondochè si considera appartenente all'uno o all'altro fascio, corrisponde la retta multipla r o la r' sulla F; abbiamo già notato però che se si fa corrispondere, nella proiettività posta tra ciascuno dei due fasci ed il fascio di piani omologo, la curva comune al piano rr', questo si stacca (un certo numero di volte) dalla superficie F; dico che alla rimanente F non appartengono le rette r, r'. Un punto infinitamente vicino alla curva comune C dei due fasci individua in generale una curva in ciascun fascio, e quindi alla curva comune dei due fasci corrisponde punto per punto la sezione della F col piano rr' fuori di r ed r'; se la retta r appartiene (come semplice o multipla) alla F, le corrisponde una curva che insieme alla C compone una curva del fascio segato sulla F dai piani per r'; quindi nell'ipotesi fatta che la C sia una curva totale per i due fasci, le rette r, r' non appartengono alla F, e su questa i piani per O segano una rete di curve dello stesso genere dei due fasci, in cui questi sono contenuti totalmente.

Supponiamo ora che la curva C comune ai due fasci sia contenuta parzialmente in uno di essi o in ambedue, ma abbia però il genere comune dei due fasci. Compiendo la trasformazione eseguita prima, sulla F (da cui è staccato quante volte occorre il piano rr') alla C corrisponde la sezione del piano rr' fuori di r ed r'.

Le rette r, r' (ambedue o una sola di esse) apparterranno ora alla F con molteplicità i, i' risp. Sia n l'ordine della F, m la molteplicità del punto O, δ il numero dei punti doppi a cui equivalgono (rispetto alle formule pluecheriane) i punti multipli di una sezione generica per O fuori di O, π il genere di tale sezione; si avrà:

$$\pi = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \delta.$$

La r potrà incontrare la curva multipla di F in qualche punto, in modo che una sezione piana per r da cui sia tolta la r avrà $\delta - \delta_1$ punti doppi fuori di O (o molteplicità equivalenti) essendo $\delta \geq \delta_1$; indicando con π_1 il genere di una tale curva si avrà dunque

$$\pi_1 = \frac{(n-i-1)(n-i-2)}{2} - \frac{(m-i)(m-i-1)}{2} - \delta + \delta_1:$$

dando a π_1', δ_1' gli analoghi significati di π_1, δ_1, rispetto alle sezioni piane della F per r' da cui è tolta la r', si ha pure

$$\pi'_1 = \frac{(n - i' - 1)(n - i' - 2)}{2} - \frac{(m - i')(m - i' - 1)}{2} - \delta + \delta_2.$$

La curva C di genere π_2 sezione della F col piano $r\ r'$ da cui sieno tolte le r, r', è d'ordine $n - i - i'$, ed ha $\delta - \delta_1 - \delta_2$ punti doppi (almeno) fuori di O (o molteplicità equivalenti), poichè la curva composta $C + r + r'$ ha δ punti doppi (o molteplicità equivalenti) sulla curva doppia (o multipla) della F fuori di O, di cui δ_1 dipendono dal fatto che il piano della C passa per la retta multipla r, δ_1' dal fatto che passa per r_1'. Il genere della C vale dunque

$$\pi_2 \leq \frac{(n - i - i' - 1)(n - i - i' - 2)}{2} - \frac{(m - i - i')(m - i - i' - 1)}{2} - \delta + \delta_1 + \delta'_1,$$

dove il segno $<$ dovrebbe prendersi se la C avesse ulteriori punti multipli accidentali (di cui potrebbe escludersi l'esistenza).

Ora dalle uguaglianze scritte segue:

$$\pi - \pi_1 = i\,(n - m - 1) - \delta_1$$
$$\pi - \pi'_1 = i'\,(n - m - 1) - \delta'_1$$
$$\pi - \pi_2 \geq (i + i')\,(n - m - 1) - \delta_1 - \delta'_1,$$

ossia

$$\pi - \pi_2 \geq 2\pi - \pi_1 - \pi'_1.$$

Ma secondo le nostre ipotesi

$$\pi_2 = \pi_1 = \pi'_1,$$

quindi

$$\pi - \pi_2 \geq 2(\pi - \pi_2)$$
$$\pi \leq \pi_2.$$

Dico che ne segue

$$\pi = \pi_2 \text{ e perciò } \pi = \pi_1 = \pi'_1.$$

Infatti π è il genere d'una sezione piana generica della stella di centro O su F, se questa sezione si particolarizza comunque spezzandosi in s parti di genere k_1, $k_2 \ldots k_s$ di cui due parti di genere k_r, k_ρ si segano in $i_{r\rho}$ punti, si ha, secondo una formula di Noether (1),

$$\pi \geq k_1 + \ldots + k_s + \Sigma i_{r\rho} - 1$$

(1) " Acta Mathematica ", 1886. È da prendersi il segno $=$ quando nessuna delle componenti della curva spezzata acquista punti multipli accidentali.

dove la somma è estesa a tutte le combinazioni di r, ρ; siccome la curva composta spezzata è connessa perchè limite di una curva irreduttibile connessa, almeno s fra le $i_{r\rho}$ non possono essere o, quindi

$$\pi \geq k_1 + k_2 + \ldots + k_s;$$

perciò nel nostro caso:

$$\pi \geq \pi_2 \qquad \pi = \pi_2 = \pi_1 = \pi'_1.$$

Si deduce che i piani per O segano ancora sulla F una rete di curve dello stesso genere dei due fasci e della loro curva comune parziale, nella quale i due fasci sono contenuti (tutti e due parzialmente o uno parzialmente e uno totalmente). Si conclude:

Due fasci di curve dello stesso genere aventi comune una curva di ugual genere, sono contenuti in una rete dello stesso genere, e sono contenuti totalmente in una tal rete se la loro curva comune è totale.

Questo teorema è suscettibile di una immediata generalizzazione. Infatti, sia estendendo il metodo qui seguìto, sia mediante le più elementari proprietà dei sistemi lineari di enti si deduce che:

Se due sistemi lineari ∞^r, ∞^s di curve sopra una superficie hanno comune un sistema ∞^σ di curve dello stesso genere comune ai due sistemi (per $\sigma = o$ s'intende una curva), vi è un sistema lineare $\infty^{r+s-\sigma}$ che ha pure il detto genere in cui i due sistemi sono contenuti.

Il sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ si costruisce prendendo risp. nei due sistemi ∞^r, ∞^s due fasci che abbiano comune una curva del sistema ∞^σ e costruendo la rete che contiene i due fasci come prima abbiam visto.

Supponiamo che i sistemi ∞^r, ∞^s e quello ∞^σ comune abbiano il grado D ($\sigma \geq 2$); ossia che il sistema ∞^σ sia contenuto totalmente nei due. Facendo segare le curve del sistema $\infty^{r+s-\sigma}$ dagli iperpiani per un punto O in $S_{r+s-\sigma+1}$, si vede che questo sistema ha pure il grado D, giacchè altrimenti gli $S_{r-\sigma}$, $S_{s-\sigma}$ base dei sistemi d'iperpiani seganti i due sistemi ∞^s, ∞^r conterrebbero qualche curva o punto della superficie F ed il sistema ∞^σ segato dagli iperpiani per lo $S_{r+s-2\sigma}$ a cui $S_{r-\sigma}$, $S_{s-\sigma}$ appartengono, avrebbe un grado minore di quello dei due sistemi ∞^r, ∞^s. Tanto basta per concludere che un sistema di dato grado non può appartenere a due diversi sistemi normali (s'intende dello stesso grado), giacchè questi sarebbero contenuti in un altro di ugual grado. Ora poichè la dimensione d'un sistema lineare non può superare il grado aumentato di una unità, concludiamo:

Un sistema lineare di dato grado appartiene ad un determinato sistema normale dello stesso grado.

Quando si ha una sola curva (od un fascio) non si può parlare di sistema normale individuato da essa, mancando per essa la nozione di grado: bisogna quindi ricorrere al concetto di sistema completo.

Noi possiamo per ora asserire (in modo analogo al prec. teor.) che:

Una curva non può appartenere a due diversi sistemi completi dello stesso suo genere.

Non possiamo però trarne la conclusione generale che esista un sistema com-

pleto (con un numero finito di dimensioni) individuato da una data curva: occorre perciò fissare un massimo della dimensione d'un sistema di dato genere, e questo massimo manca ad es. pei sistemi di curve razionali nel piano e di curve di genere più alto sulle rigate di genere > 0: queste classi di superficie verranno escluse nei cap. che seguiranno, e dopo aver parlato del genere p delle superficie vedremo come per $p > 0$ il teorema accennato sussista senza eccezione (cap. II). *Intanto una curva appartiene ad un determinato sistema completo se si sa che essa è contenuta (anche parzialmente) in un sistema completo.*

3. *Sistemi residui. — Teorema del resto.* — Tutte le curve C′ d'un sistema lineare (K) che insieme ad una stessa C formano una curva totale C + C′ di (K) costituiscono *il sistema residuo della curva* C *rispetto al sistema* (K): è da avvertire che la C potrà essere una curva composta e tra le sue componenti potranno esservi dei punti base per (C′).

Sia (K) un sistema completo e (C′) il residuo della curva C rispetto ad esso. Si consideri (se vi è) un sistema contenente (C′) e dello stesso genere di esso, ed in quel sistema un fascio contenente una curva generica C′ di (C′); il detto fascio venga fatto segare sulla superficie F dai piani per una retta r', mentre un fascio di curve K di (K) contenente la C + C′ venga segato dai piani per una retta r intersecante la r' in un punto O: inoltre il piano $r\,r'$ considerato come appartenente ai due fasci corrisponda risp. alle curve C′ e C + C′, di guisa che esso si stacchi (un certo numero di volte) dalla superficie F. Staccato il detto piano la curva C′ vien rappresentata dalla sezione di esso sulla F fuori di $r\,r'$.

Sia π il genere d'una sezione piana generica della F per O, π_1 il genere d'una sezione per r, π_1' quello d'una sezione per r', π_2 il genere della C′; si ha per ipotesi $\pi_2 = \pi_1'$: come abbiam visto nel precedente §, sussiste la relazione

$$\pi - \pi_2 \geq 2\pi - \pi_1 - \pi'_1$$

e quindi, posto in esso $\pi_1' = \pi_2$, segue $\pi \leq \pi_1$ e però $\pi = \pi_1$.

Si deduce che le sezioni per O della F sono curve del sistema completo (K) di genere π, e poichè la C + C′ è una curva totale di questo sistema la r non appartiene ad F.

Il fascio delle sezioni piane per r' (contenente C′) appartiene dunque parimente a (K) ed esso è il residuo della componente della C rappresentata dalla r'; le altre componenti debbono necessariamente essere curve razionali giacchè se il genere di una curva spezzata (connessa) è uguale al genere di una componente, le altre componenti sono di genere 0 (avendosi il genere della curva composta maggiore od uguale della somma dei generi delle sue parti): si vede così che nel caso più generale possibile la C si spezza in due parti C_1, C_2 (la 2ª delle quali composta di parti razionali) in modo che il sistema residuo di C_1 rispetto a (K) è il sistema completo a cui appartiene il residuo (C′) della C ($= C_1 + C_2$).

Così si ha intanto:

Il sistema residuo d'una curva C, *senza componenti razionali (o punti), rispetto ad un sistema completo* (K) *è completo.*

Supponiamo che (C′) abbia un grado e consideriamo il sistema normale di ugual grado ∞^s a cui appartiene: questo è contenuto nel sistema completo residuo di C_1 rispetto a (K).

Si consideri (se esso non è completo) un sistema ∞^{s+1} di curve generiche del sistema completo residuo di C_1 che contenga in sè il sistema normale ∞^s e si facciano segare queste curve dagli iperpiani di S_{s+1} sulla superficie (semplice o multipla) F′. Il sistema ∞^s vien segato dagli iperpiani per un punto O in generale multiplo per F′, ed al punto O corrisponde sulla data superficie una curva C_3 (composta forse anche di punti) tale che il residuo della $C_1 + C_3$ rispetto a (K) è il sistema normale a cui appartiene (C′). Perciò la C_3 fa parte della C_2 (la quale insieme con C_1 costituisce la C che ha per residuo (C′)), e siccome il sistema (C′) deve esser contenuto totalmente nel sistema normale di ugual grado che esso determina, si deduce che C_3 coincide con C_2, e però (C′) col sistema normale residuo di $C_1 + C_3 = C_1 + C_2 = C$.

La deduzione sussiste ancora se il sistema (K) non è completo ma soltanto normale purchè appartenente ad un sistema completo. Infatti in tal caso se la dimensione di (K) è r, possiamo considerare un sistema ∞^{r+1} che lo contenga appartenente al sistema completo (U) che (K) determina; le ∞^{r+1} curve posson farsi segare dagli iperpiani di S_{r+1} sulla superficie (semplice o multipla) F′; su di essa si ha allora un punto (in generale multiplo) O rappresentante una curva L il cui residuo rispetto al sistema completo (U) è il sistema normale (K); basta aggiungere alla C la L e considerare il residuo di L + C rispetto al sistema completo (U) per trarne la conclusione che il sistema residuo (C′) è normale. Dunque:

Il residuo d'una curva rispetto ad un sistema normale (appartenente ad un sistema completo) è un sistema normale (se ha un grado).

Nel sistema completo (K) sieno contenuti parzialmente i due sistemi irreduttibili (C) e (C′) tali che (C′) sia il residuo di una curva generica C rispetto a K, e (C) il residuo di una generica C′. Supposto (per brevità) che la superficie non sia razionale, le C, C′ generiche non sono razionali, quindi (C′) e (C) (residui di esse rispetto al sistema completo (K)) sono completi (la deduzione sussiste anche per le superficie razionali). Poichè una curva generica di un sistema completo lo determina in modo unico, si trae la conclusione che (C′) è il residuo d'ogni altra curva C di (C), e (C) è il residuo di ogni altra curva C′ di (C′). Dunque:

Se in un sistema completo (K) *sono contenuti parzialmente due sistemi irreduttibili* (C), (C′), *tali che ciascuno di essi sia il residuo rispetto a* (K) *di una curva generica dell'altro, ciascuno dei due sistemi è il residuo rispetto a* (K) *di ogni curva dell'altro; così tra i sistemi* (C), (C′) *è stabilito un tal legame reciproco che ogni curva dell'uno insieme ad una curva dell'altro costituisce una curva totale di* (K).

Questo teorema è noto sotto il nome di teorema del resto (*Restsatz* (1)), i due sistemi (C), (C′) diconsi residui uno dell'altro.

4. *Sistema somma di due sistemi.* — Sieno dati due sistemi ∞^r, ∞^s e si facciano segare le curve di essi sulla superficie F in S_{r+s} risp. dagli iperpiani per un S_{r-1} e

(1) Noether, “ Math. Ann. ”, 8.

per un S_{s-1} riferendo le dette curve proiettivamente ai nominati iperpiani; le quadriche di S_{r+s} per S_{r-1}, S_{s-1} segano sulla F un sistema contenente tutte le coppie di curve composte con una curva d'un sistema e uno dell'altro, e contenente totalmente le dette coppie: così accade che se n, n', sono i gradi dei due sistemi e la curva generica dell'uno incontra in D punti quella dell'altro, il sistema segato su F dalle quadriche per S_{r-1}, S_{s-1} è di grado $n + n' + 2$ D. Il detto sistema apppartiene ad un determinato sistema normale; non possono esistere due sistemi normali diversi contenenti tutte le coppie di curve dei due dati sistemi poichè essi avrebbero comune un sistema dello stesso grado. Dunque:

Esiste un determinato sistema normale irreduttibile contenente totalmente tutte le coppie di curve composte con una curva d'un sistema normale e una d'un altro (irreduttibili): esso si dirà il sistema somma dei due nominati.

Il sistema somma d'un sistema (C) con se stesso si dirà il suo *doppio;* il sistema *rplo* di (C) risulta definito come somma di (C) col sistema $(r - 1)$ *plo* di (C) ed *è un determinato sistema normale contenente totalmente tutti i gruppi di* r *curve di* (C).

Si può considerare il sistema somma di (C) con una curva (che in una trasformazione può essere sostituita da un punto), ma le curve di questo possono anche esser spezzate in quelle di (C) e nella curva nominata.

II.

Il sistema canonico.

1. *Superficie aggiunte.* — Una superficie F di S_3 ha in generale una o più curve multiple e dei punti multipli particolari che diremo *isolati* appartenenti in vario modo alle curve multiple. Se si considera una retta r non appartenente alla F che passi per un suo punto multiplo o, può darsi che la sezione piana generica della F per r abbia in o una singolarità superiore di quella competente alla sezione generica della stella di centro o; si dirà in tal caso che sulla retta r vi è un punto multiplo infinitamente vicino ad o; se la r è tangente ad una curva ipla per o, vi è certo su di essa un punto iplo infinitamente vicino ad o, ma questo non è un punto iplo isolato. Se non vi sono punti multipli isolati infinitamente vicini a qualche punto multiplo (isolato) della F si dirà che *la* F *ha punti multipli isolati distinti:* introduciamo per ora tale restrizione. Diremo *superficie aggiunta* alla F (1) ogni superficie che gode delle due proprietà caratteristiche seguenti:

(1) Cfr. Noether (“ Math. Ann. „, 2, 8).

a) sega un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana della F;

b) sega un piano passante per un punto multiplo isolato secondo una curva che insieme ad una retta arbitraria per il punto costituisce una linea aggiunta alla detta sezione piana.

Segue che se la F è dotata solo di singolarità ordinarie una sua superficie aggiunta è sottoposta alla condizione di avere come $(i-1)$pla ogni curva $i$pla della F e come $(n-2)$plo ogni punto $n$plo di essa: ma non possiamo escludere che per effetto delle condizioni imposte ogni superficie di un dato ordine aggiunta alla F possa avere nei punti singolari della F molteplicità superiori di quelle assegnate, o (come diremo più brevemente) delle *ipermolteplicità*.

Quando poi si tratta di singolarità straordinarie, per questo solo fatto può avvenire che le aggiunte debbano avere nei punti (o curve) multipli molteplicità superiori di quelle indicate: così p. e. un punto doppio isolato ordinario non appartiene in generale alle aggiunte della superficie F, ma se il punto è un *contatto della superficie con sè stessa* (tacnodo) (1), in guisa che in ogni piano per esso la sezione ha ivi un tacnodo, segue dalla definizione che le superficie aggiunte alla F debbono passare (semplicemente) per quel punto.

Se n è l'ordine della superficie F, una sua aggiunta ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ (se esiste) sega un piano qualunque secondo una curva C_{n-4} aggiunta alla sezione C_n della F, (la quale insieme ad una retta dà una C_{n-3} aggiunta alla C_n) e quindi se la ψ_{n-4} non ha ipermolteplicità nella linea singolare della F, la sua curva sezione colla F (fuori della linea multipla) sega una C_n sezione piana generica in un gruppo residuo (2) di quelli segati dalle rette del piano: per togliere ogni caso d'eccezione noi possiamo osservare che, allorquando la ψ_{n-4} e quindi la C_{n-4} ha delle ipermolteplicità nei punti singolari della C_n, si debbono riguardare come cadute in quei punti alcune delle intersezioni della ψ_{n-4} colla C_n, giacchè in una trasformazione della C_n a quei punti in quanto sono ipermultipli corrispondono punti della curva trasformata che completano su di essa il gruppo residuo di quello corrispondente all'intersezione di una retta colla C_n. Un riguardo analogo deve aversi per le sezioni piane passanti per un punto multiplo della F.

Così si abbia una superficie F d'ordine n dotata di un punto $i$plo O (ordinario) e si supponga che O abbia una molteplicità $> i-2$ (per precisare $i-1$) per le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F: allora ciascuna di esse sega sopra una sezione piana per O *fuori dei punti multipli* un gruppo residuo di quello segato da una retta generica del piano, e *contenuto* nel residuo di quello segato da una retta per O; secondo le nostre convenzioni riguardo alle ipermolteplicità dobbiamo però considerare il gruppo segato da una ψ_{n-4} sulla sezione piana di F per O *fuori dei punti multipli come la somma del gruppo considerato e di quello degli* i *punti infinitamente*

(1) Cfr. ad es. la superficie del 4° ordine con tacnodo di Cremona (" Collectanea mathematica ") e Noether (" Göttinger Nachrichten ", 1871 e " Math. Ann. ", 33).

(2) Nel senso dei signori Brill e Noether (" Math. Ann. ", 7), cioè rispetto alla serie speciale g_{2p-2}^{p-1} della curva che (seguendo una denominazione del sig. Segre) si dirà serie *canonica* della curva.

vicini ad O: trasformando la superficie si ha come corrispondente alla sezione della ψ_{n-4} in F la curva che corrisponde alla sezione propria della ψ_{n-4} e quella luogo dei punti corrispondenti ai punti infinitamente vicini ad O, ed allora questa curva composta delle due nominate sega proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sopra una curva generica della rete trasformata di quella delle sezioni piane per O della F.

Per chiarire riferiamoci ad un esempio. Si consideri un sistema lineare ∞^r, ($r > 2$) ed in esso le curve d'una rete che hanno $r-2$ punti fissi: si può costruire (fissando una curva del sistema fuori della rete) un sistema ∞^3 che contenga la rete, e supporremo che esso sia semplice: facendo segare le sue curve dai piani sulla superficie F d'ordine n le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F segano sulla F una curva C la quale determina un gruppo residuo della serie segata dai piani sopra una sezione piana generica, per modo che la linea corrispondente C′ sulla prima superficie sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema ∞^3; supponiamo inoltre che la F abbia solo una curva doppia e non di molteplicità superiore, cioè non esistano infinite terne di punti presentanti una sola condizione alle curve del sistema ∞^3. Al gruppo base di $r-2$ punti per la rete contenuta nel sistema ∞^3 che stiamo considerando, corrisponde sulla F un punto O $(r-2)$plo che è $\frac{(r-2)(r-3)}{2}$plo per la curva doppia: si vede quindi che il punto O è $(r-3)$plo per le ψ_{n-4} aggiunte alla F (anzichè $(r-4)$plo); questo fatto porta che la C′ sega sulla curva generica della rete un gruppo residuo della serie caratteristica aumentata del gruppo base (di $r-2$ punti) della rete, ciò che è d'altra parte una conseguenza del modo con cui la C′ è stata costruita: la C′ aumentata degli $(r-2)$ punti base della rete sega quindi un gruppo residuo della serie caratteristica sopra la curva generica della rete; essa gode dell'analoga proprietà anche rispetto al sistema ∞^3 contenente la rete, poichè i punti base della rete sono curve senza intersezioni colle linee del sistema che non passano per essi.

Ciò posto possiamo dire che:

Una superficie ψ_{n-4} *d'ordine* n-4 *aggiunta ad una* F *d'ordine* n *sega sopra una sezione piana generica (fuori dei punti multipli) un gruppo residuo di quello segato da tutte le rette del piano, e sopra una qualunque sezione piana per un punto multiplo isolato un gruppo residuo di quello segato dalle rette per il punto.* Così pure *sega un gruppo speciale, contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici, sopra la sezione piana generica di un fascio il cui asse contenga quanti si vogliano punti multipli o sia una retta multipla.*

Infatti una retta r ipla della F è $(i-1)$ipla per una ψ_{n-4} aggiunta e quindi la sezione della ψ_{n-4} con un piano generico passante per la retta si compone di una curva C_{n-i-3} e della retta r contata $(i-1)$ volte; la C_{n-i-3} ha come punto $(\rho-1)$plo un punto ρplo della sezione C_{n-i} della F fuori di r, e così pure come punto $(\rho-1)$plo un punto $(\rho+i)$plo della C_{n-i} sulla r, giacchè questo punto $(\rho+i)$plo per la sezione totale di F, è $(\rho+i-2)$plo per la curva composta di C_{n-i-3} e di r contata $i-1$ volte.

Se invece la r non appartiene alla F, essa, insieme alla sezione C_{n-4} della ψ_{n-4} con un piano per essa, dà una curva C_{n-3} aggiunta alla sezione piana della F.

Le proprietà che secondo il teorema precedente competono ad una curva sezione della ψ_{n-4} sulla F (tolta la curva multipla) sono caratteristiche per questa curva, anzi due sole di esse bastano a definirla, dico cioè (per limitarmi a ciò che qui occorre) che:

Se si ha una superficie F (*non rigata*) *e si considera una stella di sezioni piane di essa tale che pel suo centro non passino rette multiple infinitamente vicine, e si ha una curva* C *la quale seghi un gruppo residuo di quello segato dai piani della stella sulla sezione generica di essa e seghi un gruppo speciale contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva sezione generica d'un fascio contenuto nella stella, la* C *è sezione della superficie* F (*d'ordine* n) *con una determinata superficie aggiunta d'ordine* n — 4 (ψ_{n-4}).

Sia O il centro della stella ed r una qualunque retta per esso, la quale supporremo non incontri la curva in questione C: un piano per r sega la F secondo una curva K, su cui la C sega un gruppo che insieme al gruppo segato da una retta per O dà un gruppo canonico, cioè un gruppo sezione di una determinata curva d'ordine $n-3$ aggiunta alla K: questa aggiunta d'ordine $n-3$ si spezza per altro necessariamente (anche se O è multiplo) nella retta per O ed in una curva χ d'ordine $n-4$ aggiunta alla K tranne tutt'al più nel punto O che risulta $(i-2)$plo almeno per essa se è iplo per la F $(i>2)$: ora il luogo della curva χ variando il piano scelto per r è una superficie (contenente la data curva C) che si comporta nel punto O e rispetto alla curva multipla della F (tranne eventualmente rispetto a rette multiple per O) come una superficie aggiunta: se questa superficie contenesse r essa dovrebbe segare F in qualche curva passante per le intersezioni di r con F, ma poichè (la r essendo una retta arbitraria per O) per queste non passa C nè la curva multipla, e la ulteriore curva intersezione non ha con un piano per r altri punti comuni fuori di C e dei punti multipli, la detta ulteriore intersezione dovrebbe comporsi di rette incontranti la retta arbitraria r fuori di O, mentre la F non è rigata. Dunque la superficie luogo della curva χ è una ψ_{n-4} di ordine $n-4$ come la χ. Resta a vedersi che questa superficie ψ_{n-4} si comporta come una aggiunta anche rispetto alle rette multiple (eventuali) per O ed ai punti multipli isolati fuori di O e che essa è determinata in modo unico dalla C, ossia è indipendente dalla r.

Sia a una retta hpla della F per O $(h>0)$: se la ψ_{n-4} contiene la a con una molteplicità $<h-1$ (o non la contiene), essa sega un piano per a secondo una curva d'ordine $>n-h-3$ (oltre la a) la quale è aggiunta della sezione piana della F (fuori di a) tranne forse rispetto a punti su a; per conseguenza in tale ipotesi la ψ_{n-4} segherebbe sopra la sezione piana del fascio di asse a un gruppo non speciale, mentre il gruppo sezione appartenendo alla C è per ipotesi un gruppo speciale: così risulta che la ψ_{n-4} ha come $(h-1)$pla (almeno) la retta hpla a della F.

Si consideri ora un punto multiplo isolato $0'$ della F, ρplo per essa: la retta $a\equiv 00_1$ sarà in generale $h$pla per F con $h\geq 0$. Suppongasi dapprima $h=0$: la ψ_{n-4} sega (come la C) un gruppo speciale sopra una sezione piana generica della F per a, contenuto nel residuo del gruppo sezione di a (fuori dei punti multipli), quindi la curva d'ordine $n-4$ sezione della ψ_{n-4} con un tal piano dà insieme alla a una curva d'ordine $n-3$ segante la sezione piana di F in un gruppo speciale, la quale si comporta come un'aggiunta rispetto ai punti multipli della detta sezione fuori di a, dunque essa ha

la molteplicità $\rho - 1$ (almeno) nel punto ρplo $0'$ della F e perciò questo è $(\rho - 2)$plo (almeno) per la ψ_{n-4}: la conclusione permane se vi sono più punti multipli isolati sulla a, giacchè le ipermolteplicità che la ψ_{n-4} potrebbe avere in qualcuno di essi rappresenterebbero soltanto dei punti del gruppo segato da C caduti nell'intorno di un punto multiplo. Suppongasi invece $h > 0$: allora la a è $(h - 1)$pla per la ψ_{n-4} e la ψ_{n-4} sega sopra un piano per a una curva d'ordine $n - h - 3$ la quale si comporta come un'aggiunta rispetto alla curva d'ordine $n - h$ sezione della F col piano (fuori di a) nei punti multipli della curva multipla; poichè essa sega sulla detta curva un gruppo speciale si vede (analogamente al caso precedente) che ogni punto $0'$ ρplo su a deve essere $(\rho - 1)$plo (almeno) per essa, ossia la ψ_{n-4} ha come $(\rho - 1)$plo (almeno) ogni punto ρplo sulla retta hpla a.

Finalmente la superficie ψ_{n-4} (che si è dimostrato essere aggiunta alla F) è unicamente determinata dalla condizione di contenere la curva C. Infatti l'intersezione della ψ_{n-4} colla F si compone della curva multipla, della C ed eventualmente di rette per O; queste rette per O non possono variare al variare della retta r che ha servito per la costruzione della ψ_{n-4} giacchè altrimenti la F sarebbe un cono, quindi l'intersezione della ψ_{n-4} colla F è fissa al variare della r: tanto basta per affermare che la ψ_{n-4} stessa è indipendente dal variare della r, giacchè altrimenti si avrebbe un fascio di superficie ψ_{n-4} aventi fissa l'intersezione colla superficie F d'ordine n $(> n - 4)$, ciò che è assurdo.

Così rimane stabilito il teorema enunciato in principio.

Escluderemo nel seguito le superficie F *rigate e le loro trasformate per le quali d'altra parte si può stabilire che non esistono superficie aggiunte* ψ_{n-4}.

Se è data una superficie F d'ordine n in S_3 e si considera la stella delle sezioni piane per un punto fuori di essa si deduce:

Se una curva C *sega un gruppo residuo di quello segato da una retta arbitraria sopra una sezione piana generica della* F, *ed un gruppo contenuto nel residuo di quello segato da una retta pel punto multiplo sopra una sezione piana generica per un punto multiplo isolato, la detta curva* C *è la sezione colla* F *di una determinata superficie* ψ_{n-4} *d'ordine* n — 4 *aggiunta alla* F.

2. *Il sistema canonico.* — I teoremi del precedente § sono suscettibili d'una più vasta estensione conducendo ad un resultato generale che possiamo enunciare sotto forma invariantiva.

A tal fine diremo *curva fondamentale* per un sistema lineare ogni curva parziale del sistema (cap. I), la quale presenti una sola condizione ad una curva del sistema che debba contenerla; se la curva è irreduttibile basta assegnare la condizione che la curva fondamentale non abbia intersezioni variabili colle curve del sistema, non così se è composta: intendiamo per altro di includere sempre in una curva fondamentale composta tutte le linee parziali (o punti) che si staccano da una linea del sistema in conseguenza dello staccarsi di una parte di essa.

Allora una linea fondamentale d'una rete di curve, quando questa venga segata dai piani d'una stella, è rappresentata o da una retta (multipla) pel centro della stella, o da uno o più punti multipli isolati sopra una retta pel detto centro ed eventual-

mente anche dalla retta stessa; nel 1° caso la curva non è fondamentale per il sistema ∞^3 segato dai piani, nel 2° sì se si tratta d'un solo punto multiplo isolato.

Una linea fondamentale d'un sistema semplice viene sempre rappresentata da un punto multiplo sopra la superficie F trasformata facendo segare dagli iperpiani (o piani) le curve del sistema: diremo che il sistema *ha curve fondamentali distinte* se la superficie F ha punti multipli isolati distinti (cfr. § prec.). Fisseremo l'analoga definizione per una rete dicendo che essa *ha curve fondamentali distinte quando è impossibile fare segare le curve di essa sopra la superficie dai piani per un punto* (*in* S_3) *per cui passano due rette multiple infinitamente vicine:* è facile vedere che una rete generica immersa in un sistema semplice ∞^3 con curve fondamentali distinte ha curve fondamentali distinte, poichè non contiene due fasci infinitamente vicini residui di curve fondamentali.

Ciò posto noi stabiliamo ancora di definire come *serie caratteristica* di un sistema lineare la serie g_D^{r-1} che le curve del sistema (di dimensione r e grado D) segano sopra una curva generica del sistema stesso (1): i piani d'una stella (ossia le rette pel centro) segano sopra una sezione piana la serie caratteristica della rete delle sezioni piane della stella stessa, ecc.

Si abbia sopra una superficie una rete con curve fondamentali distinte e si consideri un arbitrario sistema lineare ∞^k $(k \geq 1)$ ed in esso un fascio generico avente m punti base semplici: facciamo segare sulla superficie F (d'ordine n) le curve della rete dai piani per un punto o, e le curve del fascio dai piani per una retta r non passante per o; ai punti base semplici del fascio corrispondono rette per o semplici per F (curve fondamentali della rete aventi una intersezione con ciascuna curva del fascio).

Sia c una curva la quale seghi un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica della rete, ed un gruppo speciale contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva d'un fascio contenuto nella rete; come nel prec. § si prova che la c è sezione della superficie F d'ordine n con una superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ la quale si comporta come un'aggiunta rispetto alle linee multiple della F (quantunque forse la F possa non avere punti multipli isolati distinti): dico inoltre che la ψ_{n-4} contiene le rette semplici per o corrispondenti ai punti base del fascio fatto segare dai piani per r. Infatti un piano per una tal retta a sega la F secondo una curva K_{n-1} d'ordine $n-1$ (fuori di r) e la c sega la K_{n-1} secondo un gruppo che insieme ad una retta per o, p. es. insieme alla r, costituisce un gruppo canonico, sicchè la curva sezione della ψ_{n-4} fuori di r è una curva d'ordine $n-5$ che insieme alla r costituisce un'aggiunta d'ordine $n-4$ alla K_{n-1}, perciò la r appartiene alla ψ_{n-4}, cdd. Ne segue che la c aumentata delle rette per o analoghe ad a sega sopra la curva sezione della F con un piano per r, un gruppo appartenente a quello segato dalla ψ_{n-4}, ossia dalla curva d'ordine $n-i-3$ sezione della ψ_{n-4} col piano fuori della r (supposta ipla per F) ed aggiunta alla sezione piana di F: in altre parole la c sega un gruppo contenuto nel residuo del gruppo dei punti base semplici sulla curva del fascio fatto segare dai piani per r, e sommata (ove occorra)

(1) Cfr. pei sistemi di curve piane, CASTELNUOVO (" Accad. di Scienze Torino, Memorie ", 1891).

con curve fondamentali della rete (ulteriore sezione della ψ_{n-4} con F fuori delle rette analoghe ad *a*) sega proprio un tal gruppo residuo sulla curva generica del detto fascio. Si deduce che la *c* insieme ad eventuali curve fondamentali della data rete sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema ∞^k.

Il ragionamento precedente patisce eccezione se il fascio preso ad arbitrio nel sistema ∞^k sulla superficie appartiene alla involuzione che la rete determina; in tal caso sussiste ancora la conclusione precedente perchè la *c* (completata ove occorra) gode della stessa proprietà fissata per la primitiva rete rispetto ad altre reti non appartenenti alla stessa involuzione.

Così possiamo enunciare il teorema:

Se una curva C *sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'un sistema* ∞^r *(con* $r \geq 2$*) dotato di curve fondamentali distinte, ed un gruppo contenuto nel residuo della serie caratteristica (che si riduce al gruppo dei punti base semplici per un fascio) sulla curva generica di ogni sistema* ∞^{r-1} *contenuto nel primo, residuo d'una curva fondamentale, la curva* C *sola o insieme a qualche curva fondamentale pel dato sistema sega un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'un sistema* ∞^s $(s \geq 2)$ *(semplice o no) arbitrariamente fissato sulla superficie.*

Da questo teorema risulta che le curve C definite dalle proprietà indicate rispetto ad un sistema ∞^r $(r \geq 2)$ non dipendono dalla natura del sistema ove si prescinda da certe componenti fisse di esse (*curve eccezionali*): le curve C si ottengono come sezioni della superficie F d'ordine n in S_3 colle superficie aggiunte d'ordine $n-4$ quando la F sia stata preventivamente trasformata in modo da avere punti multipli isolati distinti (come supponiamo), e perciò compongono un sistema lineare; segue che *le componenti variabili del sistema lineare segato sopra una superficie d'ordine* n *dalle superficie d' ordine* n — 4 *aggiunte ad essa, si trasformano in curve analoghe quando si trasforma birazionalmente la superficie;* queste curve, legate invariantivamente alla superficie, che diremo *curve canoniche, segano sulla curva generica d'ogni sistema lineare un gruppo contenuto in un gruppo residuo della serie caratteristica o proprio residuo di essa* (1): dovremo poi distinguere quando si presenti l' uno o l'altro caso.

Il *sistema canonico* (costituito dalle curve canoniche) conduce in generale a due caratteri invariantivi della superficie; cioè il *1° genere p* (o semplicemente genere) cioè *la dimensione del sistema canonico aumentata di 1* (Flächengeschlecht) (2), ed il *2° genere* $p^{(1)}$ cioè il *genere del sistema canonico* (Curvengeschlecht di Noether); un terzo carattere, il *grado* $p^{(2)}$, è legato al 2° genere $p^{(1)}$ dalla relazione

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

stabilita dal Noether (Mathem. Ann. VIII), di cui ora dovremo discorrere.

---

(1) L'invariantività delle curve canoniche è stata dimostrata per la prima volta dal sig. Noether (" Math. Ann. ", II, VIII) con un lungo procedimento analitico. Il sig. Castelnuovo (" Istituto lomb. ", 1891) ne ha dedotto la proprietà qui enunciata di queste curve, la quale sotto le restrizioni del precedente teorema risulta ora caratteristica di quelle curve.

(2) Il concetto del genere per le superficie, fu dapprima stabilito da Clebsch (" Comptes rendus ", 1868), quindi il detto concetto fu stabilito dal sig. Noether (" Mathem. Ann. ", II) per tutte le varietà algebriche più volte estese.

Se il 1° genere $p = 1$, mancano le curve canoniche propriamente dette (secondo la nostra definizione), ma ogni sistema lineare ha la serie caratteristica speciale: manca il secondo carattere $p^{(1)}$: esiste *una* superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta alla superficie supposta d'ordine n in S_3.

3. *Curve eccezionali.* — Consideriamo un sistema semplice ∞^r (C) ($r \geq 3$) con un punto base iplo (isolato) in un punto semplice O della superficie F e trasformiamo la superficie in una F′ di S_3 su cui ∞^3 curve generiche C di (C) vengano segate dai piani: al punto O corrisponde sulla F′ una curva d'ordine i (che può anche ridursi ad una curva d'ordine $\frac{i}{j}$ contata j volte) la quale deve essere aggiunta ad ogni curva canonica (insieme forse ad altre curve) per segare un gruppo residuo della serie caratteristica sulla sezione piana generica di F′; infatti la curva composta di una curva canonica e del punto O sulla F sega un gruppo residuo della serie caratteristica sopra la curva generica di ogni sistema non avente il punto base O e quindi pel teorema principale del precedente § sega un gruppo residuo della serie caratteristica anche sopra la curva generica d'un arbitrario sistema avente il punto base O. Dunque *la curva d'ordine* i *che corrisponde al punto* O *su* F′ *appartiene a tutte le superficie d'ordine* n — 4 *aggiunte alla* F′ *supposta d'ordine* n; per questa proprietà la detta curva dicesi (secondo il Noether Math. Ann. VIII) una *curva eccezionale* della F′ (ausgezeichnete).

Viceversa si supponga l'esistenza di una curva eccezionale C d'ordine i sulla F′: il sig. Noether (op. cit., § 514) ha indicato una trasformazione della superficie F′ in una F su cui alla C corrisponde un punto semplice per la F e base iplo per il sistema delle curve corrispondenti alle sezioni piane della F′.

La curva eccezionale C su F′ può eventualmente essere sostituita da un punto; la trasformazione della F′ in una superficie F su cui la C è rappresentata da un punto O semplice (per F) e base (con data molteplicità) per il sistema delle curve C′ corrispondenti alle sezioni piane della F′ continua a sussistere, ma nel punto O le curve C′ hanno le tangenti fisse altrimenti ad O corrisponderebbe una linea su F′: reciprocamente se sopra una superficie F si considera un sistema (semplice) ∞^3 (almeno) di curve C′ con un punto base O semplice per F e con data molteplicità per le C′, dove le C′ hanno le tangenti fisse, facendo segare le curve C′ dai piani (di S_3) sopra la superficie F′, si ha su F′ un punto O′ multiplo eccezionale, ossia un punto ipermultiplo di cui un intorno rappresenta una curva appartenente a tutte le curve canoniche; in particolare si può considerare l'esempio in cui le C′ tocchino in O una data retta, O′ è allora un punto doppio eccezionale per la F′.

Risulta di qua che non vi può essere sulla F′ un punto eccezionale semplice (per F′), ossia un punto base pel sistema canonico (semplice per la F′). Infatti sulla superficie trasformata F il punto O corrispondente ad O′ non potrebbe essere un punto base isolato per le C′, altrimenti gli corrisponderebbe una curva sulla F′, e d'altra parte se in O le C′ hanno una tangente fissa il punto O′ risulta doppio almeno per la F′.

Ora si consideri una trasformata F della F′ senza curve (nè punti) eccezionali, come è possibile con successive trasformazioni che mutino in punti semplici le curve eccezionali della F′; sulla F, supposta d'ordine n, le superficie aggiunte ψ_{n-4} (d'or-

dine $n - 4$) segano fuori della curva multipla *soltanto* curve canoniche (e non componenti fisse eccezionali), e quindi le curve canoniche segano sulle sezioni piane della F proprio un gruppo residuo della serie segata dai piani (non un gruppo contenuto in un gruppo residuo).

Se si considera sulla F un sistema semplice (∞^3 almeno) senza punti base e si fanno segare le sue curve dai piani di S_3, sulla superficie trasformata non nascono curve eccezionali (che corrisponderebbero necessariamente a punti sulla F) e quindi la proprietà indicata compete alle curve canoniche anche rispetto alle curve del nuovo sistema.

La proprietà di una superficie di S_3 di non possedere curve eccezionali si traduce in una proprietà invariantiva pel sistema delle sezioni piane che può enunciarsi dicendo che il *sistema è privo di punti base,* intendendo che il sistema non può acquistare punti base (semplici per la superficie) sopra una superficie trasformata, e scegliendo per tipo fra le trasformate una superficie senza curve eccezionali sulla quale il sistema avrebbe necessariamente punti base se li avesse sopra un'altra superficie riferita ad essa biunivocamente: con questa scelta della superficie tipo rimane pure fissato che cosa si deve intendere quando si dice che un sistema ha certi punti base con certe molteplicità; nella scelta medesima evitiamo di riferirci a quelle superficie su cui accidentalmente i punti base del sistema cadano infinitamente vicini a punti multipli. Infine queste definizioni non esigono che il sistema di cui si tratta sia semplice.

Con queste convenzioni *l'esistenza di punti base d'un sistema costituisce una proprietà invariantiva di esso che compete evidentemente al sistema normale definito dal dato sistema* (altrimenti il grado aumenterebbe).

Diremo per brevità *puro* o *impuro* un sistema secondochè non ha o ha punti base; diremo pure *curva eccezionale* sopra una superficie in S_n la curva che corrisponde ad un punto base pel sistema delle curve trasformate delle sue sezioni iperpianali.

Ora sopra una superficie F senza curve eccezionali si abbia un sistema puro (semplice o no): se una curva canonica non segasse proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica del sistema (supposto di dimensione ≥ 2), tale proprietà competerebbe alla somma di essa con una curva eccezionale su F; questa curva non potrebbe essere che un punto base pel sistema, ciò che contrasta all'ipotesi che il sistema sia puro. Concludiamo:

Una curva canonica sega proprio un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica d'ogni sistema puro (∞^2 almeno) ed è caratterizzata da questa proprietà.

Parimente:

Se un sistema impuro (∞^2 almeno) ha s *punti base isolati di molteplicità* $i_1\, i_2 \ldots i_s$, *una curva canonica sega sulla curva generica di esso un gruppo che aumentato dei gruppi di* $i_1\, i_2 \ldots i_s$ *punti infinitamente vicini ai rispettivi punti base dà un gruppo residuo della serie caratteristica.*

Il sistema canonico non ha punti base (come abbiamo osservato), quindi *la serie caratteristica del sistema canonico è autoresidua e perciò*

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1$$

(cfr. citaz. precedente): va fatta eccezione per il caso che il sistema canonico si spezzi nelle componenti d'un fascio (o per $p = 1$ in cui il teorema non ha significato) giacchè tali sistemi sono stati esclusi dalle nostre considerazioni nel § 1°, cap. I; nondimeno il signor Noether ha stabilito che in tale ipotesi le curve componenti le curve canoniche sono ellittiche, sicchè $p^{(2)} = 0$, $p^{(1)} = 1$, e la relazione è ancora verificata.

Possiamo ora estendere il concetto di superficie aggiunta anche al caso in cui la superficie F sia stata trasformata in modo da non avere più punti multipli isolati distinti, basandoci sulla invariantività del sistema canonico ($p > 0$). Invero una curva canonica C insieme alle curve eccezionali sega un gruppo residuo della serie caratteristica del sistema ∞^3 segato dai piani sulla sezione piana generica della F, ed un gruppo residuo di quello segato dai piani per il punto sopra la sezione piana per un punto multiplo isolato, perciò col ragionamento del § 1 si prova che la curva composta della C e delle curve eccezionali (corrispondenti ai punti base del sistema ∞^3 segato dai piani) è sezione di una determinata superficie ψ_{n-4} d'ordine $n - 4$ (essendo n l'ordine della F) la quale soddisfa alle condizioni *a*) *b*) del § 1 richieste dalla definizione di superficie aggiunta rispetto ad una superficie con punti multipli isolati distinti; inoltre la ψ_{n-4} si comporta nei punti multipli isolati della F in un modo particolare pienamente determinato (p. e. si può vedere che essa ha come $(i - 2)$plo }almeno{ un punto iplo infinitamente vicino ad un punto multiplo); noi assumiamo il modo di comportarsi della ψ_{n-4} nei punti multipli come definizione del modo di comportarsi delle superficie aggiunte alla F, con riguardo però al fatto che debbono considerarsi come ipermoltiplicità della F i punti multipli rappresentanti una curva eccezionale; per evitare discussioni troppo minute diciamo che *sono aggiunte alla superficie* F *dotata di arbitrarie singolarità e di curve eccezionali distinte, le superficie che segano un piano generico secondo una curva aggiunta alla sezione piana e si comportano nei punti multipli isolati come le* ψ_{n-4}; invero nessuna curva eccezionale (immagine d'un punto base isolato) può in questo caso ridursi all' intorno d'un punto multiplo.

Osserviamo che la costruzione delle ψ_{n-4} riesce per $p = 1$ anche se mancano le curve eccezionali, essendovi in ogni piano *una* curva d'ordine $n - 4$ aggiunta alla sezione piana: va fatta eccezione per le superficie del 4° ordine (genere 1) a cui sono aggiunte tutte le superficie.

4. *Applicazioni.* — Una conclusione emerge subito dai resultati del § 2°. Se il genere p di una superficie è > 0, la dimensione r d'un sistema lineare di genere π è $\leq \pi$ (poichè la serie caratteristica è speciale), quindi ricordando gli ultimi resultati del cap. precedente si ha:

Sopra una superficie di genere > 0 *una curva appartiene ad un determinato sistema completo.*

E parimente (poichè allora ogni sistema normale è contenuto in un sistema completo):

Il residuo d'una curva rispetto ad un sistema normale è sempre un sistema normale (*se ha un grado*).

Si consideri ora un sistema normale di grado n (C), appartenente ad un sistema completo puro di grado $n + \delta$ ($\delta > 0$), sopra una superficie di genere $p > 0$. Una

curva canonica sega la curva generica del sistema completo di genere π in $2(\pi - 1) - n - \delta$ punti, ed insieme ai punti base di (C) sega una curva generica C (di (C)) in $2(\pi - 1) - n$ punti; i detti punti base non possono essere multipli perchè (C) ha lo stesso genere π del sistema completo a cui appartiene, quindi (C) ha almeno δ punti base semplici, e precisamente ne ha δ perchè è δ la differenza fra il suo grado e quello del sistema completo.

Si deduce che se $\delta = 0$ (C) coincide col sistema completo a cui appartiene. Dunque:

Un sistema puro normale è necessariamente completo ($p > 0$).

III.

Il sistema aggiunto.

1. *Definizione del sistema aggiunto.* — In S_3 si abbia una superficie F d'ordine n; una superficie ψ_{n-3} d'ordine $n - 3$ aggiunta alla F sega la F (fuori dei punti multipli) secondo una curva K la quale gode delle due proprietà seguenti:

a) sega una sezione piana generica della F secondo un gruppo canonico,

b) sega una sezione piana generica (non razionale) per un punto multiplo O della F secondo un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma di quella canonica e della serie differenza di quella segata sulla curva dai piani generici di S_3 e di quella segata su di essa dai piani per O. Escludiamo che la F abbia una stella di sezioni piane razionali (nel qual caso sarebbe razionale).

Se il punto O è un punto iplo ordinario la serie differenza di quella segata dai piani generici di S_3 sopra una sezione piana per O e di quella segata sulla curva stessa dai piani per O, è la serie determinata dal gruppo degli i punti della curva in questione infinitamente vicini al punto O.

In modo analogo a quello con cui è stato dimostrato il teorema principale del § 1°, cap. II si stabilisce che:

Se la F *è dotata solo di punti multipli isolati distinti, una curva la quale goda delle proprietà* a), b), *è la sezione della* F *con una determinata superficie aggiunta* ψ_{n-3} *d'ordine* $n - 3$.

Le proprietà *a*), *b*) di una curva K rispetto alla F, si traducono in proprietà della K rispetto alle sezioni piane di una stella col centro fuori della F o in un punto semplice di essa, le quali d'altra parte (per la dimostrazione analoga a quella citata) sono caratteristiche per la K. Si ha dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè la K *sia la sezione della* F (*dotata di punti multipli isolati distinti*) *con una superficie* ψ_{n-3} *d'ordine* n — 3 *aggiunta alla* F *stessa, è che la* K:

α) *seghi un gruppo canonico sopra ogni sezione generica della* F *con un piano appartenente ad una stella il cui centro* O *è fuori della* F *o è semplice per essa,*

β) *seghi un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della canonica colla serie differenza di quella segata dai piani per* O *e di quella individuata dal gruppo dei punti base semplice del fascio, sopra la curva generica d'un fascio segato da piani per* O.

Si supponga che le sezioni piane della F di genere π sieno le curve di un sistema generico ∞^3 immerso in un sistema completo (C) di dimensione $r > 3$ (e necessariamente semplice). Le curve C si facciano segare sulla superficie trasformata φ dagli iperpiani di S_r: il sistema delle sezioni piane della F viene segato dagli iperpiani per un S_{r-4} di S_r non incontrante la φ. Dato un altro S_{r-4} non incontrante la φ in S_r si può sempre costruire una serie di S_{r-4} in S_r (avente per estremi i due dati) tale che due S_{r-4} consecutivi giacciano in un S_{r-3} senza intersezioni colla φ. Allora una curva K che gode delle proprietà *a*), *b*) rispetto al primo sistema ∞^3 (quando le sue curve sieno fatte segare dai piani di S_3), gode delle proprietà α), β) rispetto alle curve della rete data dagli iperpiani per S_{r-3} (che vien segata dai piani d'una stella col centro fuori di F, quindi gode delle proprietà *a*), *b*) rispetto al 2° sistema ∞^3 immerso in (C) e così via fino all'ultimo (supposto che tutti questi sistemi sieno semplici).

Allora traducendo in linguaggio invariantivo le proprietà α), β), *a*), *b*) si può enunciare il teorema:

Sia (C) *un sistema completo semplice di dimensione* $r \geq 3$ *dotato di curve fondamentali distinte, e sia* K *una curva la quale goda delle due proprietà seguenti:*

α) *di segare un gruppo canonico sopra la curva generica di una rete generica immersa in* (C),

β) *di segare sopra la curva generica di un fascio contenuto nella rete un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e di quella differenza tra la serie segata dalla rete e quella individuata dal gruppo dei punti base semplici del fascio; allora la curva* K *gode le due proprietà caratteristiche seguenti:*

a) *sega un gruppo canonico sopra ogni curva generica di* (C),

b) *sega sopra la curva generica d'un sistema* ∞^{r-1} *residuo di una curva fondamentale di* (C) *un gruppo contenuto in uno appartenente alla serie somma della serie canonica e della serie differenza fra quella segata sulla curva da* (C) *e la serie caratteristica del sistema* ∞^{r-1}.

La curva K *è caratterizzata dal fatto di essere la sezione (fuori della linea multipla) della superficie* F *d'ordine* n *ottenuta facendo segare dai piani di* S_3, ∞^3 *curve generiche di* (C), *con una superficie* ψ_{n-3} *d'ordine* n — 3 *aggiunta ad essa* F. *Perciò le curve* K *compongono un sistema lineare che si dirà il sistema aggiunto di* (C).

Se si tratta di una superficie di genere $p > 0$, le proprietà *a*), *b*) rispetto ad un sistema (C) con punti base *distinti* (1), competono alle curve composte di una curva C (di (C)) e di una curva canonica aumentata dei punti base di (C) (cfr. cap. II, § 3),

(1) Ossia tali che in nessuno di essi le curve C hanno una tangente fissa. Sebbene introduca costantemente questa ipotesi per non entrare in una analisi troppo minuta, non sarebbe difficile estendere molti resultati anche al caso in cui (C) abbia punti base di arbitraria natura, come si fa nel piano colla considerazione delle singolarità straordinarie delle curve.

e quindi evidentemente anche alle curve del sistema (normale) somma di (C), del canonico, e delle curve rappresentate dai punti base di (C).

Viceversa consideriamo il sistema (K) aggiunto di (C). Sulla curva generica C di (C) una K di (K) sega un gruppo canonico per il quale passano oltre la K ∞^{p-1} curve del sistema aggiunto spezzate nella C ed in una curva canonica aumentata dei punti base (o curve eccezionali corrispondenti) di (C), quindi pel detto gruppo canonico passano almeno ∞^p curve di (K); ma per il gruppo non possono passare più di ∞^p curve K giacchè altrimenti vi sarebbero più che ∞^{p-1} curve di (K) spezzate nella C ed in una curva residua, la quale per le proprietà *a*), *b*) di (C) possiede necessariamente le proprietà caratteristiche (indicate nel cap. II, §§ 2, 3) proprie di una curva canonica e delle linee eccezionali (o punti base) di (C); dunque per un gruppo canonico sezione d'una curva irreduttibile K con una curva generica C passano appunto ∞^p curve K. Il sistema (K) è dunque il sistema normale somma di (C) col sistema canonico e colle curve eccezionali (distinte) di (C), e *questo fatto si assumerà come definizione per* (K) *se* (C) *non ha curve fondamentali distinte* (per $p > 0$): risulta ancora (per la convenzione del cap. prec.) che (K) viene segato dalle superficie d'ordine $n - 3$ aggiunte sulla superficie d'ordine n le cui sezioni piane sono curve generiche di (C).

Come ora abbiamo osservato le curve di (K) residue di una C sono curve canoniche aumentate dei punti base di (C); allora consideriamo un punto base O iplo isolato di (C) (sopra una superficie senza curve eccezionali) e supponiamo per pura semplicità di ragionamento che (C) non abbia altri punti base.

Staccando da (K) una curva C generica si ha un sistema residuo somma del sistema canonico e del punto O, ciò vuol dire che il punto O ha come residuo rispetto a (K) il sistema somma di (C) e del canonico; poichè il sistema canonico non ha punti base (è puro) il detto sistema somma ha il punto O come base iplo; ora si possono fare due ipotesi; o il sistema (K) è spezzato nel detto sistema somma e nel punto O (se si vuole curva eccezionale corrispondente), oppure il punto O ha una tale molteplicità s per le curve K che imponendo ad una di esse di avere un altro punto infinitamente vicino ad O oltre agli s tenuti fissi (ossia staccando O, o se si vuole la curva eccezionale corrispondente, da (K)) il punto O diviene iplo per le curve K residue; il punto O facendo parte *una sola volta* delle curve K spezzate in una C in una canonica ed in O, segue che $s = i - 1$, ossia il punto O è $(i - 1)$ plo per (K). D'altra parte (K) non può avere altri punti base fuori di quelli di (C) poichè un punto base O di (K) è base pel residuo del canonico e pel residuo rispetto al nuovo sistema di curve o punti non contenenti O. Deduciamo:

Sopra una superficie di genere > 0 *il sistema* (K) *aggiunto a* (C) *(*∞^2 *almeno) è il sistema normale somma di* (C)*, del sistema canonico e dei punti base (supposti isolati) (o curve eccezionali) di* (C)*: un punto base iplo di* (C) *o si stacca (forse) da tutte le curve di* (K) *ed allora è iplo per le componenti irreduttibili di esso, o è base* $(i - 1)$ *plo per* (K); (K) *non ha punti base fuori di quelli di* (C).

2. *Dimensione del sistema aggiunto.* — Le curve del sistema (K) aggiunto a (C) segano sulla curva generica C (di (C)) gruppi canonici; sorge la questione " la serie segata da (K) sulla curva C è la serie canonica completa? ".

Con effettivi esempi (di superficie aventi il genere geometrico diverso dal numerico che avrò occasione di menzionare) si vede che può avvenire l'uno o l'altro caso; importa però a noi di stabilire che questo fatto è legato invariantivamente alla superficie e non dipende dal particolare sistema (C) considerato.

Intanto notiamo che la questione posta equivale a quella di determinare la dimensione del sistema (K) aggiunto al sistema (C) di genere π sopra una superficie di genere p, infatti abbiamo avuto occasione di osservare nel precedente § che per un gruppo canonico della C sezione di una K (di cui la C non fa parte) passano ∞^p curve K, quindi la dimensione di (K) è $p + \pi - \omega - 1$ essendo ω (≥ 0) il difetto di completezza della serie che (K) sega sulla C. Questa quantità $\omega \geq 0$ che esprime la differenza fra la dimensione virtuale (per dir così) $p + \pi - 1$ dell'aggiunto a (C) e la dimensione effettiva del detto sistema aggiunto, si designerà nel seguito con δ (C).

Il sistema (C) sia un sistema puro semplice (quindi ∞^3 almeno, essendo $p > 0$), e ∞^3 delle sue curve generiche sieno segate sulla superficie F dai piani di S_3; la F risulta senza curve eccezionali; s'indichi con (C') il sistema canonico e con (C + C') il sistema normale somma di (C), (C'), ossia il sistema aggiunto a (C); analogamente con (r C + C') il sistema aggiunto ad (r C); infine $\pi^{(r)}$ designi il genere di (r C) ($\pi^{(1)} = \pi$). Il sistema (r C) contiene in sè (totalmente) quello segato sulla F da tutte le superficie φ_r di ordine r; dato un arbitrario sistema (C_1) si può prendere r così grande che per la curva generica C_1 passino delle φ_r, e quindi (C_1) sia contenuto (parzialmente) in (r C); anzi per r assai elevato le φ_r passanti per C_1 non passeranno in conseguenza per altri elementi fissi e perciò il residuo di (C_1) rispetto ad (r C) sarà un sistema puro (C_2); supponiamo ancora che (C_1) stesso sia un sistema puro.

Indicando con π_1, π_2 i risp. generi di (C_1), (C_2), la curva spezzata $C_1 + C_2$ non ha fuori dei punti multipli per le curve di (r C), altri punti multipli che i D punti doppi intersezioni di C_1, C_2 (essendo (C_1), (C_2) due sistemi puri residui un dell'altro rispetto ad (r C)), quindi secondo la formola di Noether che dà il genere d'una curva spezzata si ha:

$$\pi^{(r)} = \pi_1 + \pi_2 + D - 1.$$

Ora il sistema aggiunto di (r C), ossia (r C + C') è anche la somma (C_2 + (C_1 + C')) ossia è la somma di (C_2) e dell'aggiunto a (C_1). Sopra la curva generica C_2 (di genere π_2) il sistema (C_2 + (C_1 + C')) = (C_1 + (C_2 + C')) sega una serie g (forse scompleta) di grado

$$D + 2\,\pi_2 - 2$$

e però di dimensione

$$D + \pi_2 - 2 - \omega_2 \qquad (\omega_2 \geq 0):$$

se

$$p + \pi^1 - 1 - \omega_1 \qquad (\omega_1 = \delta\,(C_1) \geq 0)$$

è la dimensione di (C_1 + C'), per un gruppo della serie g passano $\infty^{p+\pi_1-\omega_1}$ curve di ($C_2 + C_1$ + C') tra cui $\infty^{p+\pi_1-1-\omega_1}$ spezzate nella C_2 ed in una curva arbitraria di (C_1 + C'); dunque la dimensione del sistema aggiunto ad (r C), cioè di (r C + C') = ($C_2 + C_1$ + C') vale

$$p + \pi_1 + \pi_2 + D - 2 - \omega_1 - \omega_2;$$

ma
$$\pi_1 + \pi_2 + D - 1 = \pi^{(r)},$$
quindi è
$$\delta(r\,C) = \omega_2 + \delta(C_1) \qquad (\delta(C_1) = \omega_1)$$
ossia
$$\delta(r\,C) \geq \delta(C_1).$$

Dunque la quantità $\delta(C_1)$ relativa ad un qualunque sistema puro (C_1) non supera l'analoga quantità calcolata per $(r\,C)$ dove si prenda r assai elevato. Perciò se il $\delta(r\,C)$ anzichè crescere indefinitamente con r assume un valore massimo (che sarà pur quello di $\delta((r+s)\,C)$ per $s \geq 0$), questo valore è un *vero carattere invariantivo della superficie;* effettivamente se la F ha singolarità ordinarie in guisa che si possano applicare da un certo punto in poi le formule di postulazione di Noether per calcolare le dimensioni dei sistemi delle superficie (di dato ordine) aggiunte alla F (di ordine n), si verifica con un semplice calcolo che la dimensione del sistema aggiunto ad $(r\,C)$ che contiene quello segato dalle aggiunte d'ordine $n-4+r$ è (per r assai elevato)
$$\geq p_1 + \pi^{(r)} - 1$$
dove p_1 è un numero indipendente da r che esprime il numero *virtuale* delle superficie aggiunte d'ordine $n - 4$ (linearmente indipendenti) e dicesi *genere numerico* della F; si ha dunque:
$$\delta(r\,C) \leq p - p_1,$$
e perciò il $\delta(r\,C)$ *ha un massimo* K *che esprime il massimo difetto di scompletezza della serie segata sulla curva generica di un arbitrario sistema dal suo sistema aggiunto* (e si stabilirebbe essere $= p - p_1$ dimostrando che è completo il sistema segato sulla F da tutte le aggiunte di ordine assai elevato) (1). Ma ciò che a noi interessa è la considerazione del caso in cui $K = 0$, e delle condizioni che permettono di trarre tale conclusione, a cui vogliano giungere *senza occuparci della natura delle singolarità che la* F *possiede.*

Occorre premettere un lemma di geometria sopra una curva la cui dimostrazione si compie facilmente usando di un ragionamento adoperato dal signor Castelnuovo in un suo recente lavoro (2). Il lemma è il seguente:

Sopra una curva piana d'ordine n *e genere* π *la minima serie* g *di grado* $(r+1)\,n + 2\,(\pi - 1)$ *contenente tutti i gruppi composti dell'intersezione d'una curva aggiunta d'ordine* $n - 3 + r$ *e dell'intersezione d'una retta, è la serie completa somma della* $g^{rn+\pi-2}_{rn+2(\pi-1)}$ *segata dalle curve aggiunte d'ordine* $n - 3 + r$, *e della* g^2_n *segata dalle rette.*

(1) Così risulterebbe fissata in ogni caso la invariantività di p_1 che i signori Zeuthen ("Math. Ann.", IV) e Noether ("Mathem. Ann.", VIII) hanno stabilito soltanto con restrizioni alle singolarità nascenti sulla superficie nelle trasformazioni considerate. Effettivi esempi di superficie aventi il genere geometrico diverso dal numerico (comunque elevato) sono stati dati dal sig. Castelnuovo ("Istituto lomb.", 1891).

(2) "Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica" ("Circolo Mat. di Palermo", t. VII).

Per dimostrare questo lemma osserviamo anzitutto che la serie g in questione è certo contenuta nella serie completa segata sulla nostra curva C_n dalle $C_{n-3+(r+1)}$ aggiunte d'ordine $n-3+(r+1)$; basta quindi stabilire che è completo il minimo sistema lineare contenente tutte le curve composte d'una C_{n-3+r} (d'ordine $n-3+r$) aggiunta alla C_n e d'una retta: infatti il sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ che sega la g sulla C_n (comprese in esso sistema tutte le $C_{n-3+(r+1)}$ per un gruppo della g) è appunto tale che contiene in sè *tutte* le curve composte d'una retta e d'una C_{n-3+r} e non può essere completo se è scompleta la detta serie g. Ora per ipotesi fra le curve $C_{n-3+(r+1)}$ vi sono quelle composte di una retta fissa a e di una C_{n-3+r} che sono

$$\infty^{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}}$$

e così pure quelle composte di una retta fissa a' e di una C_{n-3+r}; i due sistemi hanno comune il sistema delle $C_{n-3+(r-1)}$ la cui dimensione è

$$\pi-1+(r-1)\,n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}$$

e però il loro minimo sistema somma ha una dimensione

$$\geq 2\left\{\pi-1+rn+\frac{r(r-3)}{2}\right\}-\left\{\pi-1+(r-1)\,n+\frac{(r-1)(r-4)}{2}\right\},$$

cioè

$$\geq \pi-2+(r+1)\,n+\frac{(r+1)(r-2)}{2},$$

ma questo sistema è contenuto o coincide con quello delle $C_{n-3+(r+1)}$ passanti per il punto comune ad a, a', e poichè le $C_{n-3+(r+1)}$ seganti la g sulla C_n non passano tutte per quel punto, la dimensione del sistema delle $C_{n-3+(r+1)}$ in questione è

$$\geq \pi-1+(r+1)\,n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

e quindi è appunto la dimensione

$$\pi-1+(r+1)\,n+\frac{(r+1)(r-2)}{2}$$

del sistema completo di *tutte* le $C_{n-3+(r+1)}$ *c d d.*

Ritornando alla questione precedente si ha come immediata applicazione del lemma ora stabilito, che se il sistema $(r\,C+C')$ aggiunto ad $(r\,C)$ (dove $r>1$) sega sulla curva generica C una serie completa, lo stesso accade per $((r+1)\,C+C')$, e poichè la differenza (≥ 0) fra $\delta\,((r+1)\,C)$ e $\delta\,(r\,C)$ è la scompletezza ω della serie segata da $((r+1)\,C)$ sulla C, si ha in tal caso

$$\delta\,(r\,C)=\delta\,((r+1)\,C)=\ldots\ldots=K.$$

Un corollario di questo resultato è il seguente: se per $r > 1$ è $\delta(r\,C) = 0$, la superficie ha il carattere $K = 0$; il resultato più semplice si ha per $r = 2$. Possiamo così enunciare il teorema:

Se sopra una superficie di genere p > 0 *esiste un sistema puro semplice* (C) *(quindi* ∞^3 *almeno) tale che il sistema aggiunto a* (2 C) *seghi la serie canonica completa sulla curva generica di* (2 C) *(ossia abbia la dimensione* $p + 2\pi + n - 2$ *dove* π *ed* n *sono risp. il genere e il grado di* (C)) *allora sulla curva generica di ogni sistema puro di genere* Π, *appartenente alla superficie, il sistema aggiunto sega la serie canonica completa, ossia esso ha la dimensione*

$$p + \Pi - 1.$$

In altre parole la condizione necessaria e sufficiente affinchè per una superficie sia il carattere invariantivo

$$K = 0$$

è che esista un sistema puro semplice (C) *tale che*

$$\delta(2\,C) = 0.$$

Il teorema verrà poi esteso anche ai sistemi impuri; dobbiamo prima illuminarne meglio il contenuto ponendolo in relazione colle proprietà che si riferiscono al genere numerico della superficie, ed ai sistemi segati su di essa da superficie aggiunte.

3. *Sistemi segati sopra una superficie dalle superficie aggiunte.* — Consideriamo in S_3 la superficie F d'ordine n di genere $p > 0$ senza curve eccezionali, dotata di singolarità qualunque, le cui sezioni piane appartengono ad un sistema puro (C); indichiamo col simbolo ψ_μ le sue superficie aggiunte d'ordine μ. Come nel § 1 per le ψ_{n-3}, si dimostra che le curve appartenenti al sistema (normale) somma di (C) e del sistema aggiunto a (C) sono sezioni della F con una ψ_{n-2}, e però che le ψ_{n-2} segano sulla F un sistema normale; poichè (C) è puro le ψ_{n-2} segano sulla F il sistema puro completo aggiunto a (2C) (cioè $(2\,C + C')$ se (C') è il sistema canonico). Parimente si vedrebbe ancora che le ψ_{n-1} segano sulla F il sistema completo $(3C + C')$ (poichè ancora il gruppo sezione sopra una sezione piana C appartiene ad *una* curva aggiunta d'ordine $n - 1$).

Supponiamo che le superficie ψ_{n-3+r} $(r > 1)$ seghino la serie completa sopra una sezione piana generica C della F; per il lemma di geometria sopra una curva stabilito nel precedente §, segue che le $\psi_{n-3+(r+1)}$ segheranno pure sopra la C la serie completa; allora se il sistema segato dalle ψ_{n-3+r} sulla F è il sistema $(r\,C + C')$ completo, quello segato dalle $\psi_{n-3+(r+1)}$ è necessariamente il sistema completo $((r+1)\,C + C')$ e si ha (come si è visto)

$$\delta(r\,C) = \delta((r+1)\,C).$$

Dunque se $\delta(2\,C) = 0$ (poichè le ψ_{n-2} segano sulla F *tutto* il sistema $(2\,C + C')$), le superficie aggiunte alla F ψ_{n-4+r} $(r > 1)$ segano pure sulla F *tutto* il sistema

$(r\,C + C')$. In tal caso le ψ_{n-3+r} segano sulla F un sistema di dimensione $p + \pi^{(r+1)} - 1$ (essendo $\pi^{(r)}$ il genere di $(r\,C)$); per ogni curva sezione passano (se $r \geq 3$) $\binom{r}{3} + 1$ ψ_{n-3+r} linearmente indipendenti fra cui $\binom{r}{3}$ spezzate nella F ed in una arbitraria superficie d'ordine $r - 3$, quindi il numero A_{n-3+r} della superficie ψ_{n-3+r} linearmente indipendenti è dato da

$$A_{n-3+r} = p + \pi^{(r+1)} + \binom{r}{3} \quad (\text{dove } \binom{r}{3} = 0 \text{ se } r < 3).$$

Se $\pi^{(1)} = \pi$ è il genere di (C) si ha

$$\pi^{(r+1)} = \pi^{(r)} + \pi + rn - 1,$$

quindi

$$A_{n-3+r} = A_{n-3+(r-1)} + \pi + rn - 1 + \binom{r-1}{2},$$

uguaglianza la quale significa che le ψ_{n-3+r} segano sopra un piano il sistema lineare completo delle curve d'ordine $n - 3 + r$ aggiunte alla sezione piana la cui dimensione è $\pi + rn - 2 + \binom{r-1}{2}$.

Ma se la F è dotata di singolarità ordinarie e se i numeri A_{n-3+r}, $A_{n-3+(r-1)}$ sono quelli dati dalle formule di postulazione di Noether si deduce appunto (per differenza) la precedente uguaglianza (come il signor Castelnuovo ha osservato (1)): valendo la detta formula ricorrente (che è stata dimostrata partendo dall'ipotesi $K = \delta(2\,C) = 0$), si conclude dunque che valgono le formule di postulazione di Noether per le ψ_{n-3+r} se valgono per le ψ_{n-3} e poichè esse dànno $p_1 + \pi$, ψ_{n-3} linearmente indipendenti se p_1 è il numero virtuale delle ψ_{n-4} (ossia il genere numerico), è condizione necessaria e sufficiente affinchè valgano per r assai grande le dette formule di postulazione che sia

$$p_1 = p;$$

siccome effettivamente le formule di postulazione di Noether valgono per r assai elevato, l'uguaglianza $p = p_1$ risulta stabilita. Viceversa se $p = p_1$ valendo le formule di postulazione per r assai grande, si ha $\delta(r\,C) = 0$ e quindi $K = 0$.

Si conclude il teorema:

Le superficie di genere $p > 0$ *per le quali il carattere invariantivo* $K = 0$ *allorchè sieno trasformate in modo da avere soltanto singolarità ordinarie (se è possibile) e non curve eccezionali, hanno il genere numerico* $p_1 = p$, *e viceversa* (2).

Poichè p_1 non è definito per le superficie con singolarità straordinarie assumeremo per esse convenzionalmente $p_1 = p$ quando è $K = 0$.

Possiamo enunciare il teorema (dimostrato mediante le considerazioni precedenti):

Sopra una superficie d'ordine n *di* S_3 *senza curve eccezionali, dotata di singolarità*

---

(1) " Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche " (" Circolo Mat. di Palermo ", t. IV, 1890).

(2) Indipendentemente dai ragionamenti fatti che suppongono $p > 0$, tenendo conto dell'osservazione che la differenza virtuale $A_\mu - A_{\mu-1}$ è la dimensione del sistema di tutte le curve d'ordine μ aggiunte ad una sezione piana, partendo dall'ipotesi che le formule di postulazione valgano per μ assai grande (come accade se la superficie ha singolarità ordinarie) si prova che è $p_1 \leq p$ e se $p_1 = p$ le formule di postulazione valgono per le ψ_{n-4+r} $(r \geq 0)$.

qualunque, avente il genere numerico uguale al geometrico > 0, *(ossia* $K = 0$*), le superficie aggiunte di arbitrario ordine segano un sistema completo.*

La dimostrazione è stata data soltanto per le ψ_{n-3+r} con $r \geq 0$ (poichè esse segano *tutto* il sistema aggiunto ad un sistema puro il quale è un sistema puro normale e perciò un sistema completo), ma in vista del teorema del resto del cap. I, staccando successivamente sezioni piane si stabilisce la cosa in ogni caso.

Allora adoperando il ricordato teorema del resto del cap. I si ha:

Il sistema completo a cui appartiene una curva C *sopra la superficie* F *viene segato da tutte le superficie aggiunte di arbitrario ordine che passano per una intersezione complementare irreduttibile della* C *e si comportano debitamente nei punti multipli della* C *stessa.*

È questo il complemento del ricordato teorema del resto (*Restsatz*, secondo Noether).

4. *Sistemi impuri.* — Sopra la superficie F di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, le cui sezioni piane appartengono ad un sistema puro (C), si consideri ora un sistema impuro (C_1) avente s punti base multipli risp. secondo $i_1, i_2 \ldots i_s$; possiamo prendere r così grande che (C_1) sia contenuto in (rC) ed abbia come residuo rispetto ad esso il sistema puro (C_2). Indicando con π_1, π_2 i risp. generi di (C_1), (C_2), con $\pi^{(r)}$ quello di $(r\,C)$, e considerando che un punto jplo d'una curva le cui tangenti stanno in un piano diminuisce di $\frac{j(j-1)}{2}$ il genere della curva, si ha

$$\pi^{(r)} = \pi_1 + \pi_2 + D - 1 + \sum_1^s \frac{i_\rho\,(i_\rho - 1)}{2}$$

dove D è il numero delle intersezioni di una C_1, con una C_2. Sia (C') il sistema canonico e quindi $(rC + C')$ l'aggiunto di (rC), ed $(rC + C' - C_2)$ il residuo di (C_2) rispetto al detto aggiunto; ripetiamo il ragionamento del § 2; $(rC + C')$ sega sulla C_2 una serie di grado $D + 2\,\pi_2 - 2$ e quindi di dimensione $D + \pi_2 - 2 - \omega$, $(\omega \geq 0)$, sicchè la dimensione di $(rC + C' - C_2)$ è

$$p + \pi^{(r)} - D - \pi_2 + \omega,$$

ossia è

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho\,(i_\rho - 1)}{2} - 1 + \omega.$$

Le curve d'un sistema lineare che hanno un punto jplo in un punto semplice di F soddisfano ad $\frac{j(j+1)}{2}$ condizione lineari al più; quindi le curve di $(rC + C' - C_2)$ che hanno un punto $(i_\rho - 1)$plo in ogni punto base $i_\rho$plo di (C_1) costituiscono un sistema di dimensione

$$\geq p + \pi_1 - 1 + \omega;$$

questo sistema appartiene evidentemente al sistema somma di (C_1) con (C') e coi punti base di (C_1) ossia all'aggiunto di (C_1), il quale ha una dimensione $\leq p + \pi_1 - 1$;

segue $\omega = 0$, e la dimensione del nominato sistema aggiunto a (C_1) è quindi proprio

$$p + \pi_1 - 1.$$

Dunque:

Sopra una superficie F *di genere geometrico uguale al numerico* $p > 0$, *anche ogni sistema impuro di genere* Π *ha il sistema aggiunto di dimensione* $p + \Pi - 1$ *come ogni sistema puro.*

Se il sistema impuro (C_1) ha i suoi punti base distinti (come supponiamo) non può nessuno di essi staccarsi dal sistema (K) aggiunto a (C_1), poichè (K) deve segare la serie canonica completa sulla curva generica C_1, e questa non ha come punti fissi gli i punti infinitamente vicini ad un punto iplo; quindi (cfr. anche il § 1):

Sopra la superficie F *il sistema aggiunto ad un sistema impuro con punti base distinti è irreduttibile ed ha come* $(i - 1)$ *plo un punto base iplo del nominato sistema impuro.*

Sopra la superficie F senza curve eccezionali di genere geometrico uguale al numerico $p > 0$ di cui le sezioni piane appartengono al sistema (puro) (C), si torni a considerare il sistema impuro (C') di genere π_1 con s punti base distinti di molteplicità $i_1, i_2 \dots i_s$, e si prenda r così grande che il sistema (rC) di genere $\pi^{(r)}$ contenga (C) in modo che (C_1) abbia come residuo rispetto ad esso un sistema puro (C_2) di genere π_2; sia ancora (C') il sistema canonico. Il sistema $(rC + C' - C_2)$ residuo di (C_2) rispetto ad $(rC + C')$ ha la dimensione

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2} - 1$$

(come abbiamo visto essendo $\omega = 0$); questo sistema non può avere alcun punto base fuori dei punti base di (C_1), poichè un tal punto sarebbe base per l'aggiunto di (C_1); d'altra parte se un punto O base iplo per (C_1) fosse base per $(rC + C' - C_2)$, imponendo a questo sistema di avere il punto O come $(i - 1)$ plo si imporrebbe alla curva generica di esso meno di $\frac{i(i-1)}{2}$ condizioni lineari e ne conseguirebbe che la dimensione del sistema aggiunto a (C_1) sarebbe $> p + \pi_1 - 1$ mentre ciò è impossibile; si conclude che staccando (C_2) da $(rC + C')$ il sistema residuo $(rC + C' - C_2)$ non può acquistare punti base, ossia è un sistema puro. Consideriamo il sistema $(rC - C_2)$ residuo di (C') rispetto al nominato sistema $(rC + C' - C_2)$; il sistema aggiunto ad $(rC - C_2)$ è la somma di $(rC + C' - C_2)$ coi punti base eventuali di $(rC - C_2)$, e però ha la dimensione

$$\geq p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2} - 1$$

(numero esprimente la dimensione di $(rC + C' - C_2)$); ma il genere di $(rC - C_2)$ è

$$\leq \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2}$$

e precisamente vale

$$\pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2}$$

se $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ non ha punti base multipli e vale meno del detto numero in caso contrario; tenendo conto del fatto che la dimensione del sistema aggiunto ad un dato sistema è uguale al genere di esso aumentato di $p - 1$, si conclude che $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ non ha punti base multipli e quindi è di genere

$$\pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2},$$

ed il suo aggiunto è proprio il sistema $(r\mathrm{C} + \mathrm{C}' - \mathrm{C}_2)$ di dimensione

$$p + \pi_1 + \sum_1^s \frac{i_\rho (i_\rho - 1)}{2} - 1.$$

Sono dunque possibili due casi:

o il sistema $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ è un sistema puro ed allora (C_1) si ottiene da esso imponendo i punti base colle molteplicità $i_1, i_2 \ldots i_s$ alle sue curve generiche;

o (forse) il sistema $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ ha alcuni punti base semplici (conseguenza dello staccare (C_2) da $(r\mathrm{C})$) i quali cadono in punti base di (C_1), ma però coincide col residuo del sistema canonico (C') rispetto al suo aggiunto (mentre in generale un sistema impuro è contenuto nel residuo del canonico rispetto al suo aggiunto, quando lo staccare il sistema canonico dal detto sistema aggiunto non tragga di conseguenza lo staccarsi dei punti base del primitivo sistema); allora (C_1) si ottiene da $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$ imponendo le molteplicità $i_1, i_2 \ldots i_s$ nei punti base di (C_1) sieno essi base o no per $(r\mathrm{C} - \mathrm{C}_2)$.

In ogni caso possiamo dunque concludere:

Ogni sistema impuro (con punti base distinti) può dedursi coll'aggiunta dei suoi punti base, non traenti con sè lo staccarsi di alcuna altra curva, da un sistema che coincide col residuo del canonico rispetto all'aggiunto, il quale è puro o (forse) ha soltanto dei punti base semplici.

5. *Cenno sulle superficie di genere* 0. — Nei precedenti §[i] abbiamo escluso le superficie di genere 0 alle quali non si estende la dimostrazione del teorema fondamentale del § 2. In virtù però delle considerazioni svolte in quel § (cfr. anche una nota di esso) intorno alle formule di postulazione di Noether, ed approfittando del citato teorema di Zeuthen e Noether sulla invariantività del genere numerico nelle trasformazioni che non producono sulla superficie singolarità straordinarie, possiamo concludere che:

Sopra una superficie di genere geometrico uguale al numero 0, *un sistema* (C) *semplice di genere* π, *tale che la superficie su cui gli iperpiani segano le curve di* (C) *ha soltanto singolarità ordinarie, possiede un sistema aggiunto* $\infty^{\pi-1}$.

Ora stabiliremo il seguente teorema:

Se sopra una superficie razionale dotata di punti multipli isolati distinti vi è un sistema semplice (C) (∞^3 *almeno*) *tale che i residui delle sue curve fondamentali sieno sistemi di genere* > 0, *quando la superficie sia rappresentata sul piano, il sistema aggiunto a* (C) *viene rappresentato dal sistema delle curve d'ordine* n — 3 *aggiunte alle curve* C'_n *d'ordine* n *immagini di quelle di* (C), *spogliato delle componenti fisse eventuali* (1).

Per la dimostrazione si consideri nel piano il sistema (C'_n) delle C'_n e quello (C'_{n-3}) delle curve aggiunte d'ordine $n - 3$; le curve C'_{n-3} segano anzitutto sopra la curva generica C'_n un gruppo canonico. Sia G una curva fondamentale di (C'_n) e (C'_p) il sistema residuo d'ordine p: sia (C'_{p-3}) il sistema delle curve d'ordine $p - 3$ aggiunte alle C'_p (le quali sono di genere > 0). Fra le C'_{n-3} vi sono le curve composte $G + C'_{p-3}$ le quali segano sopra una C'_p dei gruppi di punti (individuanti la serie segata da C'_{n-3}) che sommati con un gruppo sezione di una C'_p dànno gruppi equivalenti (cioè appartenenti alla stessa serie completa) a quelli segati sulla C'_p dalla curva composta $C'_n + C'_{p-3} = (G + C'_p) + C'_{p-3}$. Dunque le C'_{n-3} segano sulla C'_p gruppi della serie somma della serie canonica (segata dalle C'_{p-3}) e di quella differenza tra la serie segata dalle C'_n e la serie caratteristica di (C'_p). Tanto basta (secondo la definizione del § 1) perchè il teorema risulti dimostrato; giacchè il sistema aggiunto a (C) di genere π è in tal caso $\infty^{\pi-1}$ ed è pure $\infty^{\pi-1}$ quello (C'_{n-3}) nel piano: le componenti fisse delle C'_{n-3} nel piano rappresentano curve che si possono impunemente aggiungere al sistema aggiunto a (C) perchè essendo fondamentali per (C) non ne risultano alterati i caratteri essenziali di esso (§ 1).

6. *Un teorema sulla superficie del 4° ordine.* — Sopra una superficie di genere 1 (geometrico e numerico) si consideri un sistema (C) con s punti base distinti di molteplicità $i_1, i_2 \dots i_s$ risp., e sia i la più alta molteplicità di un punto base. Indichiamo con (C') il sistema aggiunto a (C), con (C'') l'aggiunto di (C') (o, se si vuole, 2° aggiunto di (C)), ecc.; il sistema $(C^{(i)})$ i^{esimo} aggiunto di (C) è un sistema puro da cui (C) è dedotto coll'aggiunta dei suoi punti base.

Sopra una superficie di genere 1 non vi sono curve canoniche (non eccezionali), quindi *un sistema puro di genere* π *è l'aggiunto di sè stesso e però ha la dimensione* π *e il grado* $2(\pi - 1)$.

Si possono classificare le superficie di genere 1 a seconda del sistema puro di dimensione minima che esse contengono. In questa classificazione s'incontra dapprima la superficie del 4° ordine, poi la superficie del 6° ordine di S_4 sezione d'una quadrica con una varietà cubica, poi la superficie di 8° ordine sezione di 3 quadriche in S_5, e così via; l'irreducibilità di queste superficie (generali) a quella generale del 4° ordine seguirà dalle considerazioni che andiamo ad esporre (2).

---

(1) Ossia dal sistema aggiunto puro di quello (C'_n) delle C'_n secondo la definizione di Castelnuovo. La restrizione che i sistemi residui delle curve fondamentali di (C) sieno di genere > 0 dipende solo dal fatto che la definizione data pel sistema aggiunto non si estende al detto caso escluso: siccome una superficie con una rete di curve razionali è razionale, possiamo estendere convenzionalmente il teorema di guisa che il sistema aggiunto risulta definito anche pei sistemi (C) ∞^r contenenti un sistema ∞^{r-1} di curve razionali.

(2) Il sig. Castelnuovo mi segnalò le dette classi di superficie di genere 1 contenenti lo stesso numero di moduli delle superficie del 4° ordine e ad esse irreducibili.

Senza toccare l'interessante questione di assegnare *tutti* i tipi irreducibili di superficie del genere 1, ci limitiamo quà a risolvere il seguente problema:

Quando due superficie generali del 4° ordine possono essere riferite punto per punto?

Si dimostrerà che questo avviene soltanto quando esse sono proiettive.

Invero si immaginino due superficie generali del 4° ordine riferite punto per punto; alle sezioni piane dell'una corrispondono sull'altra le ∞^3 curve d'un sistema lineare, le quali se la superficie è generale debbono essere intersezioni complete di altre superficie (1); se esse non fossero ancora sezioni piane (cioè se le superficie non fossero proiettive), il sistema ∞^3 suddetto (essendo di genere 3) avrebbe dei punti base multipli e quindi non sarebbe puro: ciò è assurdo perchè in una trasformazione birazionale d'una superficie un sistema puro è sempre mutato in un sistema puro. Dunque:

Due superficie generali del 4° ordine riferibili punto per punto sono proiettive.

Si trae pure poichè gli unici sistemi puri sopra una superficie generale del 4° ordine sono quelli segati da tutte le superficie d'ordine n, che:

Una superficie generale del 4° ordine non è riferibile ad altre superficie normali senza curve eccezionali di uno spazio superiore, tranne di ordine 4 n^2 *nello spazio* S_{2n^2+1} *(a sezioni iperpianali di genere* $2n^2+1$).

Il teorema dato prima per le superficie generali del 4° ordine si estende a quelle generali d'ordine $n > 4$, sia collo stesso metodo, sia (anche più semplicemente) usando qui del sistema canonico; per modo che si conclude:

Due superficie generali d'ordine $n \geq 4$ *(in* S_3*) si possono riferire biunivocamente solo quando sieno proiettive.*

Il teorema non sussiste per $n = 3$.

7. *Osservazioni sui resultati contenuti in questo capitolo.* — I resultati fondamentali di questo capitolo fondati sopra l'esistenza d'un sistema $\infty^{p+\pi-1}$ aggiunto ad un sistema di genere π sopra una superficie di genere geometrico $p > 0$ son fatti dipendere dalla restrizione $K = 0$ che si è trovata verificata se esiste un sistema puro semplice (C) tale che $\delta(2C) = 0$.

Poichè si tratta d'un punto fondamentale nella teoria delle superficie è interessante stabilire come la uguaglianza $\delta(2C) = 0$ segua da quella $\delta(C) = 0$ ove si sappia che la serie caratteristica di (C) è completa. Invero nel seguente capitolo verrà dimostrato che ogni sistema puro ha la serie caratteristica completa se tale proprietà compete al sistema canonico; sebbene non sembri possa dedursi un tal fatto dalla restrizione già ammessa per la superficie ($K = 0$), pure il fatto stesso appare così legato alla restrizione medesima per effetto del teorema accennato che vogliamo dimostrare.

Premettiamo le seguenti considerazioni fondate sullo stesso concetto che ha servito per il lemma del § 2°:

Sopra una superficie si abbiano due sistemi (C), (K); sia r_0 la dimensione di (C), r_1 quella di $(C + K)$, r_2 quella di $(C + 2K)$.

---

(1) Cfr. Noether, *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven*, § 11, " Abhandl. d. Akad. d. Wiss. ", Berlin, 1883.

Al sistema $(C + 2K)$ appartiene il sistema ∞^{r_1} costituito da una curva fissa K' di (K) presa insieme con tutte le curve di $(C + K)$, cioè (simbolicamente) il sistema

$$(C + K) + K':$$

parimente se K'' è un'altra curva di (K) a $(C + 2K)$ appartiene il sistema

$$(C + K) + K'';$$

i due sistemi (∞^{r_1} ciascuno) hanno comune un sistema di dimensione r_o (cioè $(C) + K' + K''$) e però il loro sistema somma ha la dimensione

$$\geq 2r_1 - r_o.$$

Ora questo sistema è contenuto nel sistema delle curve di $(C + 2K)$ che passano per le D intersezioni delle curve K', K''; se dunque sono ν_2 le condizioni imposte dal gruppo $K'\,K''$ alle curve di $(C + 2K)$ che debbono contenerlo, si ha:

$$r_2 \geq 2r_1 - r_o + \nu_2.$$

Indichiamo con ν_1 il numero delle condizioni che il gruppo $K'_o K''$ impone alle curve di $(C + K)$, e sia r la dimensione di (K); allora per $\nu_1 - 1$ tra i D punti del gruppo $K' K''$ passa una curva di $(C + K)$ non contenente tutti i D punti del gruppo, e per $r - 2$ punti del gruppo medesimo (appartenente alla serie caratteristica g_D^{r-1} di (K)) si può condurre una curva K''' di (K) non contenente tutti i D punti, la quale insieme con una curva di $(C + K)$ pei detti $\nu_1 - 1$ punti compone una curva di $(C + 2K)$ non contenente tutto il gruppo $K' K''$; ne segue che

$$\nu_2 \geq \nu_1 + r - 2 \quad \text{o} \quad \nu_2 \geq D - 1$$

(l'ultima disuguaglianza valendo nel caso che sia $\nu_1 + r - 3 > D - 1$). Si deduce

$$\nu_2 \geq 2r_1 - r_o + \nu_1 + r - 2,$$

o

$$r_2 \geq 2r_1 - r_o + D - 1.$$

Ora sia (C) il sistema canonico (supposto irreduttibile, con $r_o = p - 1 \geq 2$), e (K) sia un sistema puro semplice ∞^r di genere π e grado D, la cui serie caratteristica sia (per ipotesi) completa; inoltre il sistema $(C + K)$ aggiunto a (K) abbia la dimensione $p + \pi - 1$.

Il gruppo della serie caratteristica completa g_D^{r-1} di (C), impone (pel teorema di Riemann Roch)

$$\nu_1 = D - r + 1$$

condizioni alle curve del sistema aggiunto $(C + K)$ che debbono contenerla; in questo caso è dunque:

$$\nu_2 \geq D - 1, \ (r_1 = p + \pi - 1),$$

e perciò

$$r_2 \geq 2(p + \pi - 1) - (p - 1) + D - 1$$

$$r_2 \geq p + 2\pi + D - 2;$$

e poichè $2\pi + D - 1$ è il genere π_2 di $(C + K)$ si ha proprio

$$r_2 = p + \pi_2 - 1$$

(non potendo essere $r_2 > p + \pi_2 - 1$).

Dunque (poichè è ora $\delta(K) = \delta(2K) = 0$) si ha il teorema:

Se sopra una superficie di genere p > 2 *(a sistema canonico irreduttibile) si ha un sistema puro semplice di genere* π *avente la serie caratteristica completa, e di cui l'aggiunto è* $\infty^{p+\pi-1}$, *per ogni altro sistema di genere* Π *appartenente alla stessa superficie la dimensione del sistema aggiunto è*

$$p + \Pi - 1,$$

cioè la superficie ha il genere geometrico uguale al numerico.

IV.

Sistemi puri. — Estensione del teorema di Riemann-Roch.

1. *La serie caratteristica.* — In seguito al teorema del capitolo precedente § 4°, il nostro maggior interesse si rivolge allo studio dei sistemi puri, poichè dalle proprietà di questi potranno dedursi quelle di tutti i sistemi impuri ottenuti coll'aggiunta di punti base, non avendo in complesso a superare difficoltà maggiori di quelle che s'incontrano nello studio dei sistemi lineari di curve piane e di una indole non molto diversa. In questo capitolo parlando di un sistema (C) (ove non si avverta espressamente il contrario) intendiamo senz'altro che sia un sistema puro irreduttibile di dimensione ≥ 2 (completo); supponiamo inoltre che la superficie di cui si tratta abbia il genere geometrico uguale al numerico $p > 0$, e intendiamo che il *sistema* (K) *aggiunto a* (C) *sia semplice,* e per ciò basta che sia semplice (C) o il sistema canonico.

Dato il sistema (C) se ne designerà con π *il genere,* con n *il grado,* con r *la dimensione,* e diremo senz'altro che (C) ha i *caratteri* π, n, r. Sia (K) il sistema ag-

giunto di (C) (necessariamente puro) e Π, N, R i suoi caratteri. Vi sono curve K di (K) spezzate in una C di (C) ed in una C′ del sistema canonico (C′); una curva generica C o una generica C′ (poichè (C), (C′) son sistemi puri) non hanno punti multipli in punti semplici della superficie (o ipermolteplicità nei punti multipli) dimodochè per la formula di Noether (1)

$$\Pi = p^{(1)} + 3(\pi - 1) - n:$$

due curve spezzate ciascuna in una C ed una C′ si segano come due K in N punti quindi:

$$N = p^{(1)} - 1 + 4(\pi - 1) - n;$$

si ha poi (Cap. III, § 2):

$$R = p + \pi - 1.$$

Si riferiscano ora le curve K del sistema (K) aggiunto a (C) agli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ e si consideri la superficie F così trasformata.

Una curva C sta sulla F in un $S_{\pi-1}$ poichè vi sono ∞^{p-1} K spezzate in una C ed in una curva canonica, ossia ∞^{p-1} iperpiani per la C. Invece una curva canonica C′ sta in un $S_{p+\pi-2-r}$, poichè vi sono ∞^r K spezzate in una C′ fissa ed in una C. Le curve K ossia gli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ segano sulla C la serie canonica completa (la C è curva canonica in $S_{\pi-1}$). Consideriamo gli iperpiani che passano per lo $S_{p+\pi-2-r}$ contenente una C′ e la serie che essi segano sopra una curva C; essa viene segata nello $S_{\pi-1}$ della C dagli $S_{\pi-2}$ contenenti l'intersezione dello $S_{p+\pi-2-r}$ di C′ e dello $S_{\pi-1}$ di C; essa è dunque completa se i $2(\pi-1)-n$ punti comuni alle C, C′, *individuano* l'intersezione dei 2 spazi a cui le C, C′, risp. appartengono; se questo non accade, ed i detti $2(\pi-1)-n$ punti non individuano quella intersezione, ma uno spazio di dimensione minore, la detta serie è invece necessariamente scompleta. Ma allora per la stessa ragione è scompleta (e con un difetto di completezza non minore) la serie che gli iperpiani ($S_{p+\pi-2}$) passanti per la detta intersezione degli spazi di C, C′, segano sulla C′. Ora la 1ª serie non è altro che la serie caratteristica del sistema (C), la 2ª è quella del sistema canonico (C′) (suppostane l'esistenza). Dunque:

Se la serie caratteristica del sistema canonico è completa, è completa la serie caratteristica di ogni altro sistema puro (2).

Nel seguito considereremo per ora soltanto le superficie aventi la *serie caratteristica del sistema canonico completa* (se $p > 2$). Così su tali superficie *ogni sistema puro ha la serie caratteristica completa;* ciò accade anche se $p = 1$ (cfr. cap. III), e se le curve canoniche si compongono di quelle d'un fascio ($p \geq 2$) bastando ripetere in questo caso il precedente ragionamento; *anche questi casi nei quali non esiste serie caratteristica del sistema canonico sono tra quelli che consideriamo.*

---

(1) " Acta Mathematica ", 1886.

(2) Il teorema si estenderebbe colla medesima dimostrazione anche ai sistemi impuri che coincidono col residuo del canonico rispetto all'aggiunto, notando che una curva eccezionale non ha intersezioni con una curva canonica.

2. *Estensione del teorema di Riemann Roch.* — Ci proponiamo il seguente problema:

Quante curve del sistema aggiunto a (C) passano per un gruppo della sua serie caratteristica, cioè per un gruppo comune a due curve C ?

Supponiamo dapprima il sistema (C) *non speciale* (cioè non contenuto nel canonico), e consideriamo il sistema (K) aggiunto a (C). Sieno $\pi\ n\ r$ i caratteri di (C); e riferiamo le curve K agli iperpiani di $S_{p+\pi-1}$ in guisa da ottenere una superficie trasformata F, sulla quale (come prima abbiam visto) una C sta in un $S_{\pi-1}$.

Due arbitrari $S_{\pi-1}$ contenenti ciascuno una curva C non possono esser contenuti in uno spazio a meno di $p+\pi-1$ dimensioni, altrimenti il sistema *doppio* di (C) (contenente tutte le coppie di curve C) sarebbe contenuto nell'aggiunto (K) di (C) e quindi (togliendo una C da ambedue i sistemi) (C) sarebbe contenuto nel canonico (cioè sarebbe speciale); quindi due tali $S_{\pi-1}$ si segano secondo uno spazio $S_{\pi-1-p}$ per il quale passano ∞^{2p-1} iperpiani. Ognuno degli ∞^{2p-1} iperpiani passanti per $S_{\pi-1-p}$ passa per gli n punti comuni alle due curve C, quindi per gli n punti passano almeno ∞^{2p-1} curve K, ed in generale $\infty^{2p-1+\omega}$ con $\omega \geq 0$.

La quantità ω ha un altro significato notevole; invero poichè gli iperpiani segano sulla C una serie completa, quelli passanti per una C segheranno sopra un'altra C una serie il cui difetto di completezza è ω (cfr. § prec.) poichè gli n punti comuni a due C stanno in un $S_{\pi-1-p-\omega}$ immerso nello $S_{\pi-1-p}$ comune ai due $S_{\pi-1}$ che contengono le dette C.

Ora questa serie è quella che le curve canoniche segano sulla curva C, la quale (poichè (C) è non speciale) è una $g^{p-1}_{2(\pi-1)-n}$ immersa dunque in una serie completa $g^{p-1+\omega}_{2(\pi-1)-n}$. Si vede intanto che per il gruppo di punti comune a due curve C d'un sistema non speciale passano $\infty^{2p-1+\omega}$ curve del sistema aggiunto, essendo ω il difetto di completezza della serie che le curve canoniche segano sulla C.

Sia ora (C) un sistema speciale, e sia r' la dimensione del *residuo* (s'intende residuo di esso rispetto al canonico), designeremo la quantità $i=r'+1$ col nome di *indice di specialità* del sistema. (Quando $i=0$ il sistema è non speciale). Allora il doppio di (C) è contenuto nell'aggiunto (K) ed il residuo di questo doppio rispetto a (K) è il residuo di (C) (rispetto al canonico) e quindi è di dimensione r'; due $S_{\pi-1}$ contenenti ciascuno una C sulla F in $S_{p+\pi-1}$, sono ora immersi in un $S_{p+\pi-1-i}$ e quindi han comune un $S_{\pi-1-p+i}$ per il quale passano ∞^{2p-1-i} iperpiani. Quindi si conclude come nel caso precedente che pel gruppo comune a due curve C passano $\infty^{2p-i-1+\omega}$ curve del sistema aggiunto, dove $\omega \geq 0$ è ancora il difetto di completezza della serie segata sopra una C dalle curve canoniche, la quale serie è dunque una $g^{p-1-i}_{2(\pi-1)-n)}$ (poichè essendo r' la dimensione del sistema residuo di (C) per un gruppo della serie passano $\infty^{i}=\infty^{r'+1}$ curve canoniche giacchè una C fa parte di ∞^{-1} curve canoniche) immersa in una serie completa $g^{p-1-i+\omega}_{2(\pi-1)-n}$. Così possiamo concludere:

Per un gruppo comune a 2 curve C *d'un sistema non speciale, sopra una superficie di genere* p, *passano* $2\,\mathrm{p}+\omega$ *curve linearmente indipendenti del sistema aggiunto; e se il sistema è speciale coll'indice di specialità* i *ne passano* $2\,\mathrm{p}-\mathrm{i}+\omega$; *la quantità* $\omega \geq 0$ *è in ambi i casi il difetto di completezza della serie segata dalle curve canoniche sopra una curva* C (1).

(1) Il teorema può anche enunciarsi dicendo che in S_3 vi sono per una retta $2p+\omega-i$ super-

Diremo ω la *sovrabbondanza* del sistema (C); questa denominazione è intanto giustificata dal fatto che per $p = 0$ (quindi anche $i = 0$) la ω è la ordinaria sovrabbondanza dei sistemi lineari di curve piane (1) (supposta la superficie razionale); ma la denominazione stessa verrà meglio giustificata quando considereremo il sistema (C) come segato da superficie aggiunte sopra una superficie in S_3 ed esamineremo la differenza fra la sua dimensione effettiva e quella *virtuale* data dalle formule di postulazione di Noether.

D'ora innanzi parlando di un sistema dovremo considerare insieme ai caratteri π, r, n già definiti anche la sua sovrabbondanza ω; se $\omega = 0$ diremo il sistema regolare. I caratteri π, r, n, ω (ed i, cioè l'indice di specialità, se si tratta d'un sistema speciale) di un sistema (C) sono legati da una relazione nella quale figura il genere p della superficie. Invero sopra una curva C la serie caratteristica g_n^{r-1} (che è completa), è residua di una serie completa $g_{2(\pi-1)-n}^{p-1+\omega-i}$ a cui appartiene quella $g_{2(\pi-1)-n}^{p-1-i}$ segata dal sistema canonico, quindi per il teorema di Riemann Roch si ha

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

dove è $i = 0$ se (C) è non speciale.

Questa relazione dà un'estensione alla superficie (e per ora soltanto pei sistemi puri) del teorema di Riemann Roch relativo alle serie lineari appartenenti alle curve algebriche. Si può enunciare il resultato sotto la forma seguente:

Per un sistema puro non speciale di caratteri π, r, n, ω *si ha:*

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega \quad (2).$$

Se un sistema speciale puro di caratteri π, r, n, ω *ha un sistema residuo di dimensione* r' *si ha:*

$$r' = p - \pi + n - r + \omega \quad (3).$$

---

ficie linearmente indipendenti d'ordine $n - 3$ aggiunte ad una d'ordine n e genere p, quando le sezioni piane appartengono ad un sistema (puro) d'indice di specialità i e sovrabbondanza ω, essendo ω il difetto di completezza del sistema delle curve d'ordine $n - 4$, segato sopra un piano dalle aggiunte d'ordine $n - 4$.

(1) Cfr. Castelnuovo, " Accademia di Torino, Memorie ", 1891.

(2) Enunciando questo resultato sotto forma proiettiva si ha l' estensione del noto teorema di Clifford per le curve (" Phil. Transactions ", 1878).

(3) Non si creda che possa prendersi sempre in queste formule $\omega = 0$. Basta per ciò considerare gli esempi seguenti: 1° il sistema segato dalle quadriche sopra la superficie del 5° ordine dotata di un punto triplo; 2° il sistema segato dei piani sulla superficie del 7° ordine con due punti tripli ed il residuo segato dalle quadriche per i due punti.

Il 2° teorema sotto la forma

$$r' \geq p - \pi + n - r$$

è stato dato dal sig. Noether (" Comptes rendus ", 1886) con una dimostrazione non differente da quella qui usata: mancano solo là le restrizioni da noi introdotte, che appariscono necessarie per dimostrare come la serie caratteristica di un sistema (C) sia completa (ciò che viene omesso), ed il teorema appare qua completato essendosi assegnato il significato di ω.

I due teoremi enunciati vengono poi estesi anche ai sistemi impuri.

3. *Sistemi speciali residui uno dell'altro.* — La relazione precedentemente trovata permette di esprimere in funzione dei caratteri di un sistema speciale la dimensione del residuo, nell'ipotesi che il dato sistema sia puro; la restrizione stessa è in generale soddisfatta quando si considerano due sistemi residui uno dell'altro di dimensione ≥ 2 in relazione reciproca (C), (C').

Sieno (C), (C') due sistemi puri residui uno dell'altro (di dimensione ≥ 2), esprimiamo tutti i caratteri π', r', n', ω' dell'uno (C') in funzione di quelli π, r, n, ω dell'altro (C), o viceversa.

Sia al solito $p^{(1)}$ il 2° genere della superficie, e sia D il numero dei punti comuni ad una curva C ad una C'. Poichè il sistema canonico è la somma di (C), (C') usando di note formule già adoperate, si ha:

$$p^{(1)} = \pi + \pi' + D - 1$$

$$(p^{(2)} =)\ p^{(1)} - 1 = n + n' + 2D,$$

e, poichè una curva canonica incontra una C in $2(\pi - 1) - n$ punti,

$$2n + D = 2(\pi - 1).$$

Mediante l'ultima relazione eliminando D si deduce

$$D = 2(\pi - 1) - 2n$$

$$p^{(1)} = 3(\pi - 1) + \pi' - 2n$$

$$p^{(1)} - 1 = n' + 4(\pi - 1) - 3n;$$

siccome poi sottraendo segue

$$n - \pi = n' - \pi'$$

e si ha

$$r + r' = p - \pi + n + \omega = p - \pi' + n' + \omega',$$

così si deduce:

$$\omega = \omega'.$$

Dunque: *Fra i caratteri* π, r, n, ω, π', r', n', ω', *dei due sistemi speciali (puri)*, (C), (C') *residui uno dell'altro, di dimensione* > 1, *sussistono le relazioni*

$$\left\{\begin{aligned} r' &= p - \pi + n - r + \omega \\ \pi' &= p^{(1)} - 3(\pi - 1) + 2n \\ n' &= p^{(1)} - 1 - 4(\pi - 1) + 3n \\ \omega' &= \omega \qquad (n - \pi = n' - \pi'). \end{aligned}\right.$$

4. *La sovrabbondanza. Dimensione virtuale d'un sistema.* — Il concetto della sovrabbondanza d'un sistema (C) cui siamo giunti partendo dalla considerazione delle curve del sistema aggiunto a (C) che passano pel gruppo comune a due curve C, è suscettibile di ricevere un'altra interpretazione, cui già ho accennato, la quale rende meglio ragione della denominazione scelta.

Si consideri un sistema (K) di caratteri Π, R, N, Ω, I (dove l'indice di specialità $I = 0$ se (K) è non speciale) ed un sistema (C) contenuto in esso e residuo di una curva C′; sieno π, r, n, ω, i i caratteri di (C), e la curva C′ sia di genere π' incontrata in D punti da una curva C.

Supponiamo che la C′ non abbia punti multipli in punti semplici della superficie (o ipermolteplicità nei punti multipli) di guisa che, essendo (C) un sistema puro, una curva $C + C'$ non abbia altri punti multipli che non siano tali per le K eccetto i punti doppi intersezioni di una C e di una C′, allora si ha:

$$\Pi = \pi + \pi' + D - 1.$$

Una curva K incontra una curva K spezzata in una C e nella C′ in N punti; d'altra parte una curva K spezzata in una C ed una C′ incontra una C in $n + D$ punti, quindi una K incontra la C′ in D′ punti dove:

$$N = n + D + D'.$$

Ora il sistema (K) sega su C′ una serie $g_{D'}^{R-r-1}$; se indichiamo con ϵ il difetto di completezza della serie e con h il suo indice di specialità si ha dunque:

$$R - r - 1 + \epsilon = D' - \pi' + h$$

ossia:

$$R = D' - \pi' + h - \epsilon + r + 1.$$

Ne segue:

$$\Pi - 1 - N + R = (\pi + \pi' + D - 1) - 1 - (n + D + D') + (D' - \pi' + h - \epsilon + r + 1)$$

ossia:

$$\Pi - 1 - N + R = \pi - 1 - n + r + (h - \epsilon):$$

d'altra parte è:

$$\Pi - 1 - N + R = p + \Omega - I$$

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

quindi

$$\Omega - I = \omega - i + (h - \epsilon)$$

ed

$$\omega - i = \Omega - I + (\epsilon - h).$$

Dunque:

Se da un sistema (K) *se ne deduce un altro puro* (C) *come residuo di una curva* C' *che non abbia punti multipli in punti semplici della superficie (nè ipermolteplicità nei suoi punti multipli), la differenza fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità di* (C) *è uguale all'analoga differenza per* (K) *aumentata dalla differenza fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie che le curve* K *segano sulla* C'.

Di questo teorema è utile il corollario:

La differenza fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità d'un sistema (C) *residuo della curva* C' *rispetto ad un sistema regolare non speciale* (K) *è uguale alla differenza fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie segata dalle curve* K (*di* (K)) *sulla* C'.

Per il nostro scopo occorre ancora dimostrare il lemma:

Il sistema aggiunto ad un sistema puro (C) *è regolare.*

Questo si verifica immediatamente. Infatti se π, r, n, sono i caratteri del sistema (C), e Π, R, N, Ω quelli del suo aggiunto, si ha:

$$\Pi = \pi + p^{(1)} + 2(\pi - 1) - n - 1$$

$$R = p + \pi - 1$$

$$N = n + p^{(1)} - 1 + 2\{2(\pi - 1) - n\}$$

e quindi:

$$\Pi - 1 - N + R = p,$$

ed

$$\Omega = 0. \quad \text{c d d.}$$

Deduciamo che sopra una superficie F di S_3 d'ordine n, senza curve eccezionali, le superficie aggiunte d'ordine $\geq n - 3$ segano un sistema regolare; infatti abbiamo già avuto occasione di osservare che le aggiunte d'ordine $n - 3 + r$ segano sulla F il sistema aggiunto a quello rplo delle sezioni piane.

Ora si consideri sulla F un sistema (C) segato da superficie aggiunte d'ordine $> n - 4$. Sappiamo che il sistema segato da tutte le superficie aggiunte d'ordine $> n - 4$ ha la dimensione che si può calcolare in base alle formule di postulazione di Noether, le quali in base alla convenzione $p_1 = p$ (cap. III, § 3) ed al corollario di Castelnuovo secondo il quale si ha l'espressione della differenza fra il numero delle superficie aggiunte di un dato ordine e quello delle superficie aggiunte dell'ordine consecutivo, debbono riguardarsi come valevoli anche per le superficie dotate di singolarità straordinarie. Se vogliamo calcolare secondo queste formule di postulazione la dimensione che dovrebbe competere al sistema (C), dobbiamo far passare per una curva C (di (C)) un'aggiunta d'ordine $n - 3 + l$ ($l \geq 0$), ψ_{n-3+l}, la quale seghi ulteriormente la F in una curva C' (che possiamo supporre non avente punti multipli in punti semplici della superficie) e vedere quante condizioni la C', unita al gruppo base, imponga ad una ψ_{n-3+l} che debba contenerla. Possiamo dire che il numero così calcolato (che, per così dire dovrebbe esprimere la dimensione del sistema (C)) è la dimensione *virtuale* del sistema (C); ma può sorgere il dubbio che questo numero vari con l, o muti rifacendo la costruzione per una superficie trasformata.

A questa questione rispondono i risultati precedenti. Infatti quando uniamo la C' al gruppo base delle ψ_{n-3+l}, e vogliamo calcolare l'effetto prodotto sulle formule di postulazione, noi veniamo in sostanza a considerare la serie g_n segata da tutte le ψ_{n-3+l} sulla C' (di genere π') come completa e non speciale, ed allora la sua dimensione vien data dal teorema $n - h = \pi'$; il numero ρ così calcolato è la dimensione virtuale di (C), ed in base al calcolo precedente (poichè il trinomio $(\pi - 1 - n + \rho$ non differisce dall'analogo calcolato per il sistema regolare non speciale segato dalle $\psi_{n-3+l})$ si ha:

$$\pi - 1 - n + \rho = p.$$

Se vogliamo la dimensione effettiva r dobbiamo introdurre la differenza θ fra il difetto di completezza e l'indice di specialità della serie che le ψ_{n-3+l} (ossia le curve del sistema regolare non speciale che esse segano sulla superficie) segano sulla C', e si avrà:

$$r = \rho + \theta,$$

dove $\theta = \omega - i$; cioè si avrà appunto come abbiamo trovato

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i.$$

Concludiamo:

La dimensione ρ *(virtuale) di un sistema puro* (C) *calcolata facendo segare il sistema* (C) *da superficie aggiunte d'ordine* $> n - 4$ *sopra una superficie d'ordine* n (*in* S_3) *priva di curve eccezionali, è un carattere invariantivo del sistema* (C) *e coincide colla dimensione effettiva se il sistema è regolare non speciale, in modo che si ha:*

$$\pi - 1 - n + \rho = p.$$

La differenza $(\omega - i)$ *fra la sovrabbondanza e l'indice di specialità di* (C) *è uguale alla differenza* $(r - \rho)$ *tra la dimensione effettiva e quella virtuale del sistema stesso.*

Così la denominazione di sovrabbondanza data alla quantità ω (definita nel § 2) appare pienamente giustificata. Di più è interessante notare che *il teorema stabilito sussiste indipendentemente dalla completezza della serie caratteristica del sistema canonico* (1) (da cui segue quella di (C)) *e quindi anche prescindendo da quella ipotesi si ha la relazione:*

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i$$

dove la sovrabbondanza ω *è definita dalla uguaglianza*

$$\omega - i = r - \rho.$$

Solo non risulta così che sia sempre $\omega \geq 0$ come si è riconosciuto sotto la precedente restrizione, ma questo resultato sarà stabilito nel successivo § al di là di un certo limite per r.

Il teorema stesso si estende ai sistemi impuri (C') *normali, dedotti da* (C) *coll'aggiunta di* s *punti base di molteplicità* $h_1, h_2 \ldots h_s$; infatti i caratteri $\pi', n', r', \omega', i'$ di (C') si esprimono per quelli di (C) mediante le formule:

---

(1) Infatti nel dimostrarlo non si è tenuto conto di quella ipotesi.

$$\pi' = \pi - \Sigma \frac{h(h-1)}{2},\ n' = n - \Sigma h^2,\ r' = r - \Sigma \frac{h(h+1)}{2} + \theta$$

(dove $\theta \geq 0$ è il numero dei legami tra i detti punti base) dimodochè risulta

$$\pi' - 1 - n' + r' = \pi - 1 - n + r + \theta;$$

d'altra parte $i' = i$ (poichè (C′) e (C) hanno lo stesso sistema residuo) e la dimensione virtuale ρ' di (C′) vale

$$\rho' = \rho - \Sigma \frac{h(h+1)}{2},$$

sicchè si conclude:

$$\pi' - 1 - n' + r' = p + \omega' - i' \ (\omega' = \omega + \theta)\ (1).$$

Ora è opportuno rilevare una differenza peculiare che si presenta fra lo studio delle serie complete lineari di gruppi di punti sopra una curva e quello dei sistemi lineari di curve sopra una superficie. Nella geometria sulle curve di genere π si presentano accanto alle serie g_n^r non speciali la cui dimensione è data dal teorema $n - r = \pi$ quelle speciali la cui dimensione è, per così dire, superiore a quella virtuale, quindi per una g_n^r completa il binomio $n - r$, che di regola può considerarsi uguale al genere π della curva sostegno, non supera mai questo genere π, ed è $n - r < \pi$ solo quando la g_n^r è contenuta in una data serie (la canonica $g_{2(\pi-1)}^{\pi-1}$). Nel piano la dimensione di un sistema lineare normale può superare quella virtuale (se vi sono legami tra i punti base), ma non può esserle inferiore; per così dire una sola causa perturbatrice opera anche qui in un solo senso sulla dimensione del sistema, ma a differenza di quel che avviene sulle curve la causa perturbatrice non cessa con lo elevarsi dalla dimensione del sistema (ma solo coll'elevarsi della dimensione in confronto al genere).

Sulle superficie, di genere qualunque, vi sono in generale due cause perturbatrici opposte per le quali la dimensione effettiva può differire dalla virtuale; l'una dipende dall'esser il sistema contenuto nel canonico ed opera quindi limitatamente (come per le curve, ma in senso opposto), l'altra opera invece (come vedremo) su sistemi comunque elevati (come nel piano) ed è legata (pure come nel piano) alle curve fondamentali del sistema (2). Per ciò la opportunità di dare due nomi diversi (sovrabbondanza e indice di specialità) ai caratteri modificatori della dimensione che provengono dalle due cause nominate, giacchè introducendo soltanto la loro differenza ($\omega - i = r - \rho$) si avrebbe un termine correttivo algebrico, ma si presenterebbe allora come regolare un sistema speciale sovrabbondante in cui $\omega = i$, un sistema cioè che (dal punto di vista geometrico) apparisce doppiamente irregolare.

---

(1) Pei sistemi di curve piane sussiste pure la relazione $\pi - 1 - n + r = \omega$ ($p = 0$; $i = 0$) contenuta essenzialmente nel teorema del sig. SEGRE (" Circolo Mat. di Palermo ", t. I) o in quello del sig. CASTELNUOVO (" Accad. di Torino, Memorie ", 1891, pag. 24).

(2) Così anche segando sopra una superficie un sistema mediante le superficie per una curva, l'errore nell'applicazione delle formule di postulazione dipende dall' esser scompleta o speciale la serie che le superficie postulabili segano sulla curva.

5. *Un teorema sulla sovrabbondanza.* — Per un sistema puro o impuro (C) di caratteri π, r, n, ω, i, sopra una superficie di genere p, siamo pervenuti alla relazione

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i,$$

o, introducendo la dimensione virtuale ρ, all'altra

$$\pi - 1 - n + \rho = p,$$

ed abbiamo visto che $\omega \geq 0$ supponendo che la serie caratteristica del sistema canonico fosse completa, poichè di là abbiamo dedotto che la serie caratteristica di un sistema puro doveva pure esser completa; si sono esclusi soltanto i sistemi impuri dedotti coll'aggiunta di punti base da un sistema con soli punti base semplici coincidente col residuo del canonico rispetto al suo aggiunto (anzichè puro), ma anche per quelli sarebbe facile dimostrare come sussista la relazione precedente lievemente modificata (aggiungendo al grado il numero dei detti punti base semplici).

Quando non si sa nulla circa la completezza della serie caratteristica del sistema canonico e quindi del sistema puro da cui (C) è dedotto, rimane incerto il segno di ω, che soltanto può asserirsi essere non minore della sovrabbondanza del corrispondente sistema puro.

Vediamo cosa possa dirsi del segno di ω prescindendo dalla detta ipotesi; possiamo supporre (senza restrizione), che (C) sia un sistema puro (di caratteri π, n, r, ω, i); indichiamo con (K) l'aggiunto a (C) di caratteri Π, N, R, Ω ($I = 0$).

Secondo quel che abbiamo dimostrato, se è θ il difetto di completezza della serie $g^{p+\pi-1-(r+1)}_{2(\pi-1)-n+p^{(1)}-1}$ segata da (K) sopra una curva canonica (generica) C' diminuito dell'indice di specialità della medesima serie g, sussiste la relazione

$$\Pi - 1 - \mathrm{N} + \mathrm{R} = \pi - 1 - n + r - \omega + i = \pi - 1 - n + r - \theta \ (= p):$$

poichè $i \geq 0$ se anche $\theta \geq 0$ segue necessariamente $\omega \geq 0$.

Basta dunque perchè si possa concludere che $\omega \geq 0$, sapere che la serie g segata da (K) sulla C' è non speciale, come ad esempio se

$$2(\pi - 1) - n > p^{(1)} - 1.$$

È notevole il fatto che questa circostanza può essere accertata soltanto col prendere r abbastanza grande. Appunto la determinazione di questo limite per r forma l'oggetto di questo §.

Per ciò che abbiamo notato alla fine del § 1 si può supporre qui che sia $p > 2$ e che il sistema canonico sia irreduttibile.

Supponiamo dapprima che il passaggio per un punto di una curva canonica tragga di conseguenza il passaggio di essa per un altro punto coniugato della detta curva supposta iperellittica; allora (secondo Noether) (1) è

$$2p - 2 = p^{(1)} - 1.$$

(1) " Math. Ann. „, VIII.

Sia (C) un sistema puro di dimensione

$$r \geq \frac{p^{(1)}-1}{2}.$$

Se (C) è speciale deve essere

$$r = p - 1$$

e però (C) è il sistema canonico per il quale $\omega = 0$.

Se (C) è non speciale ($i = 0$), ma contiene il sistema canonico, la serie segata dall'aggiunto (K) sulla curva canonica C′ è non speciale o è (forse) la serie canonica; nel 1° caso $\omega \geq 0$; il 2° caso è impossibile giacchè (C) conterrebbe totalmente il sistema canonico (poichè la C e la C′ hanno $p^{(1)} - 1$ punti comuni) e quindi avrebbe lo stesso grado di esso (cap. I) mentre esso è normale (anzi completo). Infine se (C) non contiene il sistema canonico pur essendo non speciale, la serie segata da (C) sulla C′ è una serie g di dimensione r e però (secondo un noto teorema di Clifford) di grado $\geq 2r$, cioè di grado $\geq p^{(1)} - 1$; ma la serie g potrebbe avere soltanto il grado $2r$ se fosse $r = p^{(1)} - 1$, quindi la detta serie ha il grado $> p^{(1)} - 1$; ne segue che l'aggiunto (K) di (C) sega sulla C′ una serie di grado $> 2p^{(1)} - 2$ e quindi non speciale, ed in conseguenza è

$$\omega \geq 0.$$

Suppongasi invece che il sistema canonico sia semplice; allora è (sempre secondo Noether):

$$2p - 2 < p^{(1)} - 1$$

(anzi, secondo Castelnuovo (1) $p^{(1)} \geq 3p - 6$); perciò se la dimensione r di (C) soddisfa alla disuguaglianza

$$r \geq \frac{p^{(1)}-1}{2}$$

si ha $r > p - 1$ ossia (C) è non speciale, e col ragionamento precedente segue

$$\omega \geq 0.$$

Dunque:

Pur prescindendo dalla completezza della serie caratteristica del sistema canonico, per ogni sistema lineare appartenente ad una superficie di 2° genere $p^{(1)}$, *avente una dimensione*

$$r \geq \frac{p^{(1)}-1}{2}$$

la sovrabbondanza

$$\omega \geq 0,$$

(*e se il sistema non è il sistema canonico esso è non speciale, sicchè* $\pi - 1 - n + r \geq p$).

---

(1) " Istituto lombardo ,, 1891 (Nota II).

V.

Le curve fondamentali.

1. *Preliminari.* — Mi propongo ora di esaminare le proprietà dei sistemi lineari in relazione alle loro curve fondamentali; siccome capiterà qui sempre di considerare la differenza tra la sovrabbondanza e l' indice di specialità (cioè quella $r - \rho$ tra la dimensione effettiva e la virtuale) indicherò qui con θ questa quantità (che prima avevo designata con $\omega - i$), e così θ *sarà ora la sovrabbondanza* ($= \omega$) *quando si tratta d'un sistema non speciale;* indicherò ancora con π, r, n, gli altri caratteri d'un sistema (C) e supporrò che (C) sia un sistema *semplice* ($r \geq 3$) dedotto coll'aggiunta di punti base distinti da un sistema puro. Supporrò inoltre la superficie avente il genere geometrico uguale al numerico $p > 0$.

Come già abbiamo detto, una *curva fondamentale* di (C) è una curva K che presenta una sola condizione ad una C che debba contenerla; *escluderò che essa possa essere rappresentata da un gruppo di punti semplici sopra una superficie trasformata;* per la definizione il sistema residuo della K rispetto a (C) è ∞^{r-1}; noi supporremo che esso soddisfi alla restrizione di avere punti base distinti e di esser dedotto mediante l'aggiunta di essi da un sistema puro. Le curve C si facciano segare sulla superficie F dagli iperpiani di S_r: alla K corrisponde un punto multiplo O, quindi *una curva fondamentale non ha intersezioni variabili col dato sistema ma ha qualche intersezione variabile col residuo.* Gli iperpiani per O non hanno altri punti fissi sulla F, quindi includendo in K il gruppo di tutte le curve (e punti) che corrispondono ad O, lo staccarsi della K da (C) non trae di conseguenza lo staccarsi di altre curve; è quanto dire che *lo staccarsi da* (C) *d'una curva fondamentale può trarre solo di conseguenza lo staccarsi di altre curve fondamentali le quali tutte compongono insieme una curva fondamentale* K.

Quando si fan segare sulla F le curve C di (C) dagli iperpiani di S_r, nella trasformazione che così viene ad eseguirsi ad ogni punto della primitiva superficie che sia base iplo per (C) viene a corrispondere una curva eccezionale d'ordine i sulla F. Ora una curva eccezionale d'ordine i che abbia il punto O come ρ plo viene proiettata da O in una curva d'ordine $i - \rho$ eccezionale per la superficie proiezione della F, e si deve notare che la curva d'ordine i (che corrisponde ad un punto) non può essere spezzata e però è $i > \rho$ tranne per $i = \rho = 1$; così si deduce: *Il sistema residuo della curva fondamentale* K *rispetto al sistema* (C) *ha come punto base iplo ogni punto iplo di* (C) *fuori della* K; *la curva* K *può avere una molteplicità* $\rho < i$ *in un punto base iplo per* (C) *con* $i > 1$, *e solo un punto semplice* ($\rho = i = 1$) *in un punto base semplice di* (C), *ed allora il residuo della* K *ha un punto base* $(i - \rho)$ *plo (e non di molteplicità più elevata) nel detto punto base iplo di* (C).

Questa deduzione (importa notarlo) è fondata sull'ipotesi fatta che il sistema (C') residuo di K rispetto a (C) abbia solo punti base distinti, e quindi i tangenti variabili in un punto iplo.

2. *Una relazione fra i caratteri d'un sistema, il genere d'una sua curva fondamentale ed i caratteri del residuo.* — Se una curva K è comunque composta con parti irreduttibili distinte $C_1 \ldots C_s$ di generi $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_s$, e se C_r, C_ρ hanno $i_{r\rho}$ punti comuni, il genere della curva composta è (secondo Noether)

$$\Pi = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s + \Sigma i_{r\rho} - s + 1$$

dove la Σ va estesa a tutte le combinazioni di valori diversi r e ρ (come già abbiamo avuto occasione di ricordare).

La curva $K = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$ sia una curva fondamentale per il sistema (C) (nella quale per convenzione sono incluse tutte le componenti, anche punti, che si staccano da (C) quando si stacca una componente); i generi $\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_s$ sieno calcolati prescindendo dalle molteplicità delle curve $C_1, C_2 \ldots C_s$ fuori dei punti base di (C), inoltre il genere di un punto h plo (componente K) sia o come quello della curva razionale d'ordine i che gli corrisponde sulla superficie su cui gl'iperpiani segano le curve C' residue di K rispetto a (C). Diremo Π *il genere della curva fondamentale* K *di* (C), *che non ha (per ipotesi) componenti multiple, calcolato in base alle convenzioni precedenti.*

Sieno π, r, n, θ i caratteri di (C), π', r', n', θ' quelli del residuo (C') di K. Una curva composta $C' + K$ ha (per il teorema del § precedente) le stesse molteplicità d'una curva generica C nei punti base di (C); allora se indichiamo con i il numero delle intersezioni variabili della K con una C' cioè (come diremo) *il grado della* K, si avrà:

$$\pi = \pi' + \Pi + i - 1;$$

d'altra parte se si fan segare le curve C da iperpiani, il punto O che viene a corrispondere a K sulla superficie trasformata è iplo per quella superficie, quindi

$$n = n' + i$$

(infatti nel numero i sono comprese le intersezioni che una C' ha con ogni componente di K ed in particolare anche coi punti che risultano hpli per (C')).

Si deduce:

$$\pi - 1 - n + r = \pi' - 1 - n' + r' + \Pi;$$

ma

$$\pi - 1 - n + r = p + \theta$$

$$\pi' - 1 - n' + r' = p + \theta',$$

quindi

$$\theta = \theta' + \Pi.$$

Dunque si può enunciare il teorema:

Se il sistema (C) *possiede una curva fondamentale* K *di genere* π (*priva di componenti multiple*), *ed avente come residuo il sistema* (C'), *fra i caratteri* θ, θ', *dei sistemi* (C), (C') *sussiste la relazione*

$$\theta - \theta' = \pi$$

(ossia $\omega - i - (\omega' - i') = \pi$).

3. *Sistemi regolari.* — Suppongasi in questo § che se il sistema canonico è irreduttibile con $p > 2$, la *sua serie caratteristica sia completa;* i resultati più restrittivi a cui si perviene prescindendo da questa ipotesi si stabiliranno facilmente in modo analogo riferendosi al cap. IV, § 5.

La relazione stabilita nel precedente § stabilisce un interessante legame fra la sovrabbondanza d'un sistema ed i generi delle sue curve fondamentali quando p. es. il sistema residuo delle curve fondamentali sia non speciale, e perciò basta che la sua dimensione sia $> p - 1$, o il suo grado $> p^{(1)} - 1$. Noi vogliamo trarre da quella relazione alcuni utili corollari.

Se un sistema (C) di dimensione $> p$ ha una curva fondamentale K di genere π, il residuo (C') ha la dimensione $> p - 1$ e quindi è non speciale; allora i caratteri θ, θ', di (C), (C') sono le loro sovrabbondanze ω, ω' (sempre positive); in questo caso *la relazione precedente ci dà:*

$$\omega \geq \pi.$$

Di qui il corollario:

Un sistema regolare di dimensione $> \mathrm{p}$ *non ha curve fondamentali di genere* > 0.

Per trarre la deduzione enunciata bastava conoscere in qualsiasi modo la non specialità di (C'), e quindi sapere per es. che il suo grado è $> p^{(1)} - 1$; per ciò basta che il grado di (C) superi $p^{(1)} - 1$ aumentato del grado di K.

Di qui il teorema:

Se un sistema regolare (C) *ha una curva fondamentale* K, *tale che il grado di* (C) *supera il grado di* K *aumentato di* $\mathrm{p}^{(1)} - 1$, *la curva fondamentale* K *è di genere* 0.

Se un sistema regolare ha una curva fondamentale di genere π, il residuo (C') ha il carattere

$$\theta' = \theta - \pi,$$

ma

$$\theta = \omega - i, \ \omega = 0,$$

e quindi $\theta \leq 0$, sicchè $\theta' \leq -\pi$; ora

$$\theta' = \omega' - i' \ (\omega' \geq 0),$$

quindi

$$i' - \omega' \geq \pi, \ i' \geq \pi.$$

Dunque:

Se un sistema regolare ha una curva fondamentale di genere π, *il residuo è speciale con un indice di specialità maggiore del precedente almeno di* π.

Ora si consideri un sistema speciale ∞^{p-2}; sulla superficie canonica (ottenuta facendo segare dagli iperpiani di S_{p-1} le curve del sistema canonico supposto semplice) esso è segato dagli iperpiani per un punto, e però ha come residua una curva, ossia il suo indice di specialità è 1 come quello del sistema canonico (∞^{p-1}).

Si deduce:

Il sistema canonico, se è semplice, non ha curve fondamentali di genere > 0.

In modo analogo si dimostrano i corollari:

Un sistema regolare ∞^p *non può avere altre curve fondamentali di genere* > 0, *tranne tutt'al più una sola curva fondamentale di genere 1 (che ha per residuo il sistema canonico).*

Un sistema regolare ∞^{p-1} *non può avere altre curve fondamentali di genere* > 0 *tranne curve fondamentali di genere 1 (ed allora è non speciale).*

4. *Sistemi multipli d'un sistema.* — Se si hanno sopra una superficie F due sistemi (C), (C'), che possono supporsi segati da due sistemi lineari di superficie, il sistema *somma* dei due sistemi di superficie sega sulla F un sistema lineare di curve contenente tutte le curve composte $C + C'$; questo sistema appartiene ad un determinato sistema normale che si è detto *il sistema somma di* (C), (C') e si è indicato con $(C + C')$; si è detto poi mplo di (C) ed indicato con $(m\,C)$ il sistema somma di m sistemi (C), cioè il sistema normale contenente tutti i gruppi di m curve C.

Enuncio alcuni lemmi di facile dimostrazione:

Se una curva irreduttibile è fondamentale per il sistema (C) *essa è fondamentale per* $(m\,C)$.

Se una curva irreduttibile è fondamentale per $(m\,C)$ *essa è fondamentale per* (C).

Se una curva irreduttibile è fondamentale per (C) *ma non per* (C') *essa non è fondamentale per* $(C + C')$.

Le dimostrazioni di questi lemmi si fondano sulla considerazione che una curva irreduttibile non avente intersezioni variabili con quelle d'un sistema è fondamentale per esso e viceversa.

Come abbiamo avuto occasione di osservare nel cap. III se (C) è puro, il sistema $(m\,C)$ per m assai grande contiene un altro arbitrario sistema, in particolare il canonico, in modo che il residuo di questo rispetto ad $(m\,C)$ (disposto convenientemente di m) è un sistema puro (K) di dimensione elevata quanto occorre.

Se si suppone che (C) abbia solo curve fondamentali irreduttibili di genere 0 (distinte), lo stesso avverrà per uno dei precedenti lemmi pel sistema $(C + K)$. Si facciano segare ∞^3 curve generiche di $(C + K)$ dai piani di S_3 sulla superficie F e si supponga per semplicità che essa sia dotata soltanto di curva doppia e punti multipli ordinari; ad una curva fondamentale (di genere 0) del sistema corrisponde un punto multiplo secondo d a cono osculatore irreduttibile di genere 0; un tale cono ha $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ generatrici doppie (o generatrici multiple equivalenti), le quali rappresentano altrettanti rami della curva doppia della F passanti per esso, giacchè una generatrice doppia del cono non tangente alla curva doppia rappresenterebbe un punto doppio della curva fondamentale del sistema $(C + K)$ che non andrebbe computato nel genere della curva (§ 2). Allora si considerino le curve del sistema $((m + 1)\,C)$,

e si supponga che (C) e quindi $((m+1)\,C)$ sia puro. Esse segano su quelle di $(C+K)$ (sezioni piane della F) un gruppo canonico, e quindi sono segate da una superficie ψ_{D-3} aggiunta alla F (supposta d'ordine D) salvo forse nei punti multipli (cfr. capitolo II, III), e poichè i punti dpli della F sono $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$pli per la curva doppia la ψ_{D-3} ha la molteplicità $d-2$ (almeno) in un punto dplo e quindi è aggiunta alla F. Ne segue che il sistema $((m+1)\,C)$ è aggiunto a $(C+K)$ e però è regolare capitolo IV, § 4).

Dunque:

Per m *assai grande il multiplo* (m C) *del sistema puro irreduttibile* (C) *non dotato che di curve fondamentali irreduttibili di genere* 0, *è regolare.*

5. *Sulla postulazione d'una superficie di* S_r *rispetto alla varietà d'ordine* m. — Si abbia in S_r una superficie F non dotata di curve eccezionali, ed avente soltanto punti multipli a cono osculatore di genere 0. Quante varietà V_m (linearmente indipendenti) d'ordine m contengono la F in S_r?

Se le sezioni iperpianali della F segano sulla F ∞^r curve appartenenti ad un sistema (C), le V_m segano sulla F curve appartenenti al sistema $(m\,C)$.

Indichiamo con π_m, n_m, r_m i caratteri del sistema normale $(m\,C)$; $(\pi_1=\pi,\ n_1=n)$; abbiamo allora le relazioni:

$$\pi_m = \pi_{m-1} + \pi + (m-1)\,n - 1$$

$$n_m = n_{m-1} + 2(m-1)\,n + n$$

e quindi

$$\pi_m = m\pi + \frac{m(m-1)}{2}\,n - m + 1$$

$$n_m = m^2 n:$$

al crescere di m la dimensione di $(m\,C)$ cresce oltre ogni limite (e quindi oltre $\frac{p^{(1)}-1}{2}$), di guisa che come nel § precedente si deduce che in ogni caso la sua sovrabbondanza $(\omega_m \geq 0)$ è $=0$; perciò quando m è assai grande,

$$r_m = p + \frac{m(m+1)}{2}\,n - m(\pi - 1).$$

Se indichiamo con

$$N_m = \binom{m+r}{r} - 1$$

la infinità delle V_m, per ogni curva sezione della V_m colla F passano $\infty^{N_m - r_m}$, V_m e perciò la *postulazione* della superficie rispetto alle V_m è

$$\leq r_m + 1 = p + \frac{m(m+1)}{2}\,n - m(\pi - 1) + 1;$$

dove vale il segno = se (come avviene, si può dire, nel caso generale) il sistema

segato dalle V_m su F, per m assai grande, è completo (e per ciò, poichè esso è puro, basta che sia normale).

Dunque, *per la superficie* F *di* S_r *passano (per* m *assai grande)*

$$L \leq N_m - p - \frac{m(m+1)}{2} n + m(\pi - 1)$$

varietà V_m *linearmente indipendenti.*

Facciamo ora una breve digressione determinando il numero delle quadriche di S_r passanti per una superficie F a sezioni normali (sulla quale non si fa nessuna altra ipotesi).

Se per la F di S_r passa una quadrica la sezione iperpianale C_π di F e gli n punti sezione d'un S_{r-2} stanno pure sopra una quadrica (risp. in S_{r-1} e in S_{r-2}). Suppongasi ora che gli n punti sezione della F con un S_{r-2} sieno sopra una quadrica q; in un S_{r-1} per lo S_{r-2} le quadriche Q per q sono ∞^r e segano sulla C_π la serie (completa) segata dagli iperpiani (g_n^{r-1}), quindi vi è una ed una sola quadrica Q per la q contenente la curva C_π; in modo analogo può costruirsi un'altra quadrica Q' contenente la sezione C'_π della F con un altro S_{r-1} per lo S_{r-2}, e contenente pure la q; ora le due quadriche Q, Q' risp. appartenenti ai 2 S_{r-1} ed aventi comune la sezione q con un S_{r-2}, appartengono ad un fascio di quadriche Γ in S_r; la quadrica Γ del fascio contenente un punto fissato ad arbitrio sulla F, contiene quindi la F, poichè ne contiene già due sezioni iperpianali. Ora giacchè ogni quadrica per la F sega un S_{r-1} in una quadrica contenente la sua curva sezione, e vi è una quadrica determinata che contiene la F passante per una quadrica che contiene una sua sezione iperpianale, si conclude:

Il numero delle quadriche linearmente indipendenti, che contengono una superficie qualunque a sezioni normali di S_r, *è uguale a quello delle quadriche in* S_{r-1} *che contengono una sua sezione iperpianale, o di quelle in* S_{r-2}, *che contengono il gruppo di punti sezione della superficie.*

6. *Curve fondamentali di genere* O. — Abbiamo già avuto occasione di notare (§ 4) che alle curve fondamentali di genere O d'un sistema lineare (C) corrispondono, sulla superficie F di S_3 di cui le ∞^3 sezioni piane sono curve C, punti multipli che non impongono condizioni alle superficie aggiunte e però non esercitano influenza sul genere; a questo fatto si collega l'altro che tali curve non hanno effetto sulla sovrabbondanza del sistema (C). Una analisi più minuta di siffatte curve fondamentali porta alla conseguenza che esse (a differenza delle curve fondamentali di genere > 0) sono più intimamente legate alla natura della superficie, che a quella del sistema (C) che su di essa si considera.

Il caso più semplice è quello delle curve fondamentali di grado 2, le quali vengono ad essere rappresentate da punti doppi isolati (non eccezionali) (1) sulla superficie F di S_3 (di cui le sezioni piane appartengono al sistema (C)), o sulla superficie normale F' ottenuta facendo segare dagli iperpiani d'un iperspazio tutte le curve C.

(1) Poichè si è esclusa la considerazione delle curve fondamentali costituite da coppie di punti.

Se n è l'ordine della F, le superficie ψ_{n-4} d'ordine $n-4$ aggiunte alla F, segano su di essa il sistema canonico: non può darsi che tutte passino per un punto doppio della F non eccezionale, e però ad un tal punto doppio corrisponde un punto doppio della *superficie canonica* su cui le curve canoniche sono segate dagli iperpiani (supposto semplice il sistema canonico, $p > 3$).

Viceversa un punto doppio della superficie canonica dà una curva fondamentale di grado 2 per un sistema (C) che, su di essa, non ha il punto doppio come punto base.

Concludiamo :

Una superficie in S_3 *può acquistare per trasformazione tanti punti doppi isolati non eccezionali quanti sono i punti doppi isolati della corrispondente superficie canonica. Il numero di questi punti doppi è un nuovo carattere invariantivo per le superficie di genere* $p > 3$.

Il resultato precedente si esprime sotto forma invariantiva dicendo:

Sopra una superficie un sistema lineare (C) *non può avere altre curve fondamentali di grado 2 tranne quelle che sono tali pel sistema canonico.*

Consideriamo ora una curva fondamentale irreduttibile di genere 0 e di grado i pel sistema (C): si facciano segare ∞^3 curve C sulla superficie F dai piani di S_3, e supponiamo (per semplicità) che la F sia solo dotata di curva doppia. Alla curva fondamentale per (C) corrisponde sulla F un punto iplo a cono osculatore razionale, per il quale passano quindi (come già abbiamo notato al § 4) $\frac{(i-1)(i-2)}{2}$ rami della curva doppia. Se n è l'ordine della F, le ψ_{n-4} (d'ordine $n-4$) aggiunte ad essa hanno il detto punto come $(i-2)$ plo, come conseguenza del contenere la curva doppia della F; una curva canonica ha dunque un tal punto come $(i-2)$ plo (essendo $i-2 = i(i-2)-(i-1)(i-2)$) ed ivi ha le $i-2$ tangenti variabili giacchè il sistema canonico non ha punti base. Dunque ad un tal punto corrisponde una curva razionale d'ordine $i-2$ sulla superficie canonica.

Concludiamo:

Le curve fondamentali di genere 0 *e di grado* i *per il sistema lineare* (C), *corrispondono a curve d'ordine* i $-$ 2 *sulla superficie canonica.*

Così si vede che ad una superficie appartengono 3 categorie di curve razionali che corrispondono ai punti doppi della superficie canonica, alle sue curve razionali, e ad i suoi punti (le curve eccezionali); le prime due categorie forniscono caratteri invariantivi della superficie; invece le curve della 3ª categoria sono in numero arbitrario poichè se ne crea quante si vuole con trasformazioni della superficie.

VI.

Le involuzioni.

1. *Estensione d'un teorema di Castelnuovo. — Relazione fra i secondi generi di due superficie in corrispondenza* [1 *m*]. — Rivolgiamoci ora ad un breve studio dei sistemi lineari (C) in cui il passaggio per un punto trae di conseguenza il passaggio per altri punti della superficie.

Lasciamo da parte, come non offrente interesse, il caso in cui le curve C (di (C)) si spezzino in quelle di un fascio; allora (cap. I, § 1) le curve C che passano per un punto O_1 passeranno in conseguenza per un numero finito di punti $O_2, O_3 \ldots O_m$, ed i gruppi analoghi ad $O_1, O_2 \ldots O_m$ formano un'*involuzione* I_m, cioè una serie ∞^2 di gruppi di *m* punti tale che un punto generico della superficie determina un gruppo della serie. Lo studio del sistema (C) (che abbiamo denominato *appartenente all'involuzione* I_m) si annoda strettamente allo studio dell'involuzione. Ad ogni involuzione appartengono sistemi (C) come ora facilmente vedremo.

Si riferiscano biunivocamente i gruppi della I_m (elementi di una varietà ∞^2) ai punti d'una superficie F'; ad un sistema (C') di F' corrisponde su F un sistema (C) appartenente all'involuzione I_m. La F' ossia *l'involuzione* I_m *abbia il genere geometrico* $p > 0$ (1); allora possiamo fissare come sistema (C') quello delle sezioni piane di F' che supponiamo avente curve fondamentali distinte come il suo corrispondente su F, e possiamo considerare una curva canonica K' (completata colle curve eccezionali della F') la quale è definita dal segare un gruppo residuo della serie caratteristica sulla curva generica di (C') ed un gruppo contenuto nella serie analoga sulla curva generica di ogni sistema ∞^2 contenuto in (C') (cap. II, § 2). Sia K la curva corrispondente alla K' sulla F, H la *curva di coincidenza* della involuzione I_m (luogo dei punti in cui ne coincidono due di un gruppo di I_m) e sieno le C le curve corrispondenti su F alle C' di F'. Una curva composta $K + C + H$ sega sopra una curva generica C un gruppo che è il trasformato di un gruppo canonico di C' aumentato del gruppo delle coincidenze dell'involuzione i cui gruppi corrispondono ai punti di C', quindi per un teorema di Castelnuovo (2) il detto gruppo è un gruppo canonico della C, ossia la curva $K + H$ sega sulla curva C un gruppo residuo della serie caratteristica di (C); parimente si prova che la $K + H$ gode l'analoga proprietà rispetto ad ogni sistema ∞^2 contenuto in (C) (come rispetto ad ogni altro sistema appartenente alla I_m), dunque sussiste il teorema:

---

(1) Non imponiamo nè per la F nè per la F' alcuna restrizione di uguaglianza del genere geometrico al numerico.

(2) *Alcune osservazioni sulle serie irrazionali*, ecc. (" Accad. dei Lincei ", 1891).

Se le superficie F′, F *sono in corrispondenza* [1, m], *alle curve canoniche della prima (supposta di genere* > 0) *corrispondono curve speciali della seconda, componenti curve canoniche insieme alla curva di coincidenza dell'involuzione* I_m *i cui gruppi corrispondono sulla* F *ai punti della* F′.

È questa, come si vede, l'estensione del teorema già adoperato del signor Castelnuovo sulle involuzioni irrazionali appartenenti ad una curva, teorema che apparisce come fondamentale nella teoria appena avviata di quelle involuzioni.

Sia P il genere (geometrico) della F, e p il genere (geometrico) della F′, ad ogni curva canonica della F′ corrisponde una curva che insieme ad H costituisce una curva canonica di F, quindi $P \geq p$: in particolare non può essere $P = 0$ se non è anche $p = 0$.

Sia ora $p > 1$, e quindi anche $P > 1$, e indichiamo con $p^{(1)}$, $P^{(1)}$ *risp. i secondi generi delle* F′, F, *con* δ *il numero dei punti d'incontro d'una curva canonica di* F′ *colla curva di diramazione* (ossia quello delle intersezioni della curva di coincidenza H con una curva residua), *con* τ *il genere della curva di diramazione su* F′ (o di quello di coincidenza H su F), sia infine π il genere delle curve corrispondenti sulla F a quelle canoniche di F′.

Per il teorema di Castelnuovo, o per la formula di Zeuthen, si ha:

$$2m\,(p^{(1)} - 1) + \delta = 2(\pi - 1);$$

per il teorema prima dimostrato si ha invece, in generale (adoperando la formula che dà il genere d'una curva spezzata)

$$P^{(1)} = \pi - 1 + \tau + \delta,$$

quindi *sussiste in generale la relazione*

$$P^{(1)} = m\,(p^{(1)} - 1) + \tau + \frac{3}{2}\,\delta,$$

la quale può considerarsi come un'estensione della nota formula di Zeuthen per le corrispondenze $[1\,m]$ tra due curve.

In qualche caso può essere $P^{(1)}$ maggiore del numero indicato dalla formula scritta se le curve corrispondenti su F a quelle canoniche di F′ aumentate della H non sono curve generiche (spezzate) del sistema canonico della F ossia una delle componenti ha qualche punto multiplo in un punto semplice della superficie (o qualche ipermolteplicità in un punto multiplo).

2. *Involuzioni razionali.* — Diamo ora un breve cenno delle involuzioni I_m razionali; la superficie F sui punti della quale i gruppi della I_m sono rappresentati è un piano (superficie razionale) e ad ogni rete omaloidica di esso corrisponde sulla data superficie F una rete di curve di cui due s'intersecano in un gruppo della I_m; restringeremo a tali reti il nome di *reti appartenenti all'involuzione.*

Una rete (C) appartenente all'involuzione I_m sia di genere π (il grado è m) e possieda s curve fondamentali $C_1 \ldots C_h, \ldots C_s$ aventi come residui s fasci risp. di ge-

nere $\pi_1 \ldots \pi_h \ldots \pi_s$; introdurremo i caratteri $\delta_1 \ldots \delta_h \ldots \delta_s$ definiti dall'uguaglianza

$$\delta_h = \pi - \pi_h$$

e diremo δ_h la *volenza della curva fondamentale* C_h. Il carattere δ_h è legato semplicemente a quelli, altre volte introdotti, cioè il genere (virtuale) ρ_h della C_h ed il suo grado i_h (numero delle intersezioni con una curva residua); infatti è

$$\pi = \pi_h + \rho_h + i_h - 1$$

quindi

$$\delta_h = \rho_h + i_h - 1.$$

Si facciano ora segare le curve C della rete dai piani di una stella col centro O, sulla superficie F, e sieno $a_1 \ldots a_s$ le rette per O (multiple o contenenti punti multipli per la F) che corrispondono alle curve fondamentali $C_1 \ldots C_s$. Nell'involuzione I_m ci sieno α gruppi dotati di due coincidenze staccate (di due punti doppi), e τ gruppi dotati d'un punto triplo (dove ne coincidono 3): le α rette che proiettano da O i primi α gruppi sono corde per la curva di coincidenza di I_m, le τ che proiettano i τ gruppi secondi sono tangenti per essa.

Ora la curva di coincidenza sega un piano generico per O in $2(\pi + m - 1)$ punti fuori di O ed un piano per a_h (fuori di a_h) in $2(\pi_h + m - 1)$ punti, ossia la a_h ha colla curva δ_h intersezioni. Proiettando dunque la detta curva di coincidenza da O sopra un piano, si avrà il suo genere dato da

$$P = (2\pi + 2m - 3)(\pi + m - 2) - \sum_1^s \delta_h (2\delta_h - 1) - \alpha - \tau.$$

Si conclude che *la quantità*

$$(2\pi + 2m - 3)(\pi + m - 2) - \Sigma\, \delta_h (2\delta_h - 1) \; (= \alpha + \tau + P)$$

ha lo stesso valore per tutte le reti appartenenti all'involuzione I_m ed è quindi essenzialmente un carattere della I_m anzichè delle dette reti. Invero si osserverà che, prendendo nel piano multiplo rappresentativo della I_m una rete omaloidica le cui curve abbiano assai intersezioni con quella di diramazione, si avranno sulla F reti di genere grande quanto si vuole, appartenenti alla I_m, e quindi separatamente i caratteri π, δ_h non sono caratteri della I_m.

Esaminiamo brevemente il caso $(m = 2)$ di una involuzione razionale I_2 sopra una superficie F.

Le curve d'una rete (C) appartenente alla I_2 sieno segate dai piani per O sulla F. Se n è l'ordine della F, le aggiunte d'ordine $n - 4$ alla F sono coni col vertice in O (che è $(n-2)$ plo per la F), quindi:

Se sopra una superficie vi è un'involuzione I_2, *le curve canoniche che passano per un punto passano per il coniugato* (1).

(1) Questa proprietà è nota; infatti il sig. Castelnuovo (" Istituto lombardo ", l. c.) ha dimostrato che se vi è un fascio di curve iperellittiche sopra una superficie d'ordine n, le aggiunte d'ordine $n - 4$ per un punto passano per il coniugato sulla curva iperellittica che lo contiene. Il tipo di superficie di cui stiamo trattando è stato considerato per la prima volta dal sig. Noether (" Math. Ann. ", VIII, l. c.).

Secondo la relazione precedentemente scritta il genere della curva di coincidenza della I_2 è

$$P = (2\pi - 1)\pi - \sum_1^s \delta_h (2\delta_h - 1)$$

dove π è il genere d'una rete appartenente alla I_2 (composta di curve iperellittiche) e δ_h è la valenza d'una sua curva fondamentale C_h $(h = 1 \ldots s)$.

La rete (C) sia segata sulla F dai piani per O; una curva canonica sega una C in $2(\pi - 1) - 2$ $(m = 2)$ punti, e quindi se n è l'ordine della F i coni aggiunti d'ordine $n - 4$ si spezzano nel cono (fisso) proiettante la curva doppia della superficie, e in coni variabili d'ordine $\pi - 2$.

Se la a_h è una retta per O multipla secondo θ_h (o semplice) per la F contenente arbitrari punti multipli, un piano per la a_h è segato da una superficie d'ordine $n - 4$ aggiunta alla F secondo una curva d'ordine $n - \theta_h - 3$ aggiunta alla sezione d'ordine $n - \theta_h$ della F (tolta la a_h) (cfr. cap. II, § 1); questa sezione è dunque segata in $2(\pi_h - 1)$ punti da una curva canonica (essendo π_h il genere di essa), e però il cono d'ordine $\pi - 2$, facente parte d'una aggiunta d'ordine $n - 4$ alla F, ha la retta a_h come multipla secondo $\pi - 2 - (\pi_h - 1) = \delta_h - 1$.

Ora ogni curva C_h fondamentale per la rete (C) viene rappresentata da una tal retta a_h, o da una retta per O contenente un punto doppio isolato per la F; in questo 2° caso il detto cono d'ordine $\pi - 2$ non contiene in generale la retta congiungente il punto doppio, e quindi si può dire ancora che la contiene colla molteplicità $\delta_h - 1 = \pi - \pi_h - 1$ poichè $\pi_h = \pi - 1$. Dunque i coni d' ordine $\pi - 2$ col vertice O seganti sulla F le curve canoniche sono assoggettati ad avere come $(\delta_h - 1)$ pla ogni retta per O che corrisponde ad una curva C_h fondamentale per la rete (C), di valenza δ_h.

Indicando con p il genere (geometrico uguale al numerico) della F *sussiste dunque la relazione*

$$p = \frac{\pi(\pi - 1)}{2} - \Sigma \frac{\delta_h(\delta_h - 1)}{2};$$

di qua si ricava

$$4p = 2\pi(\pi - 1) - \Sigma\, 2\delta_h(\delta_h - 1)$$

e confrontando coll'altra relazione trovata

$$P = (2\pi - 1)\pi - \Sigma\,(2\delta_h - 1)\delta_h,$$

si ha

$$P - 4p = \pi - \Sigma\,\delta_h$$

dove il secondo membro è uguale per tutte le reti che appartengono alla involuzione I_2.

RIVISTA CRITICA

DELLE

SPECIE DI "TRIFOLIUM„ ITALIANE

COMPARATE CON QUELLE STRANIERE

DELLA SEZIONE

LUPINASTER (Buxbaum)

MEMORIA

del Dottore

S. BELLI

Approvata nell'Adunanza del 25 Giugno 1893.

PREFAZIONE

Nello studio della presente sezione i dubbii sollevati da tempi anteriori a Linnè sull'affinità del **T. Lupinaster** col genere *Trifolium,* e l'incertezza colla quale anche oggidì alcuni autori ve lo ascrivono, parvero offrirmi una buona occasione per dir qualche parola sopra alcune questioni generali di tassonomia vegetale. Il **T. Lupinaster** venne dunque con assidua vece iscritto e radiato dal novero dei Trifogli, e le ragioni che trassero gli autori a questi mutamenti verranno in appresso ampiamente riferite e discusse. Intanto, se si considera un momento il modo con cui Tournefort caratterizza il genere *Trifolium,* evidentemente il **T. Lupinaster** deve esservi incluso; e la questione sotto questo punto di vista mi par definitivamente esaurita. Ma ben altrimenti importante è la questione, non nuova del resto, di sapere se alcuni generi, tali quali vengono oggidì accettati, siano entità naturali o non costituiscano piuttosto un gruppo di esseri, che hanno qualche carattere similare, ma che non possiedono rapporti di morfologica affinità dimostrabile *nell'attualità* con un complesso di caratteri costanti. Tali sarebbero i generi *Cytisus* e *Genista; Trigonella* e *Trifolium; Astragalus* e *Onobrychis,* ecc.; i quali sono certamente meno distanti fra loro di quello che nol siano le specie di *Trifolium* della sezione *Galearia* da quelle della sezione *Lagopus,* o quelle dei *Calycomorphum* da quelle dei *Chronosemium,* che tutte vengono comprese nel solo *G. Trifolium.*

Più mi addentro nello studio di tali generi, e più mi convinco che l'unità tassonomica vera, riconoscibile sempre per caratteri proprii, fissi entro certi limiti, indipendente da circoscrizioni più late, è la *Stirps,* intesa nel senso già esposto e ben precisato nel saggio elaborato in comunione al Prof. Gibelli intorno alla se-

zione *Lagopus* (Vedi *Saggio monografico* " Mem. Acc. Sc. Torino „ 1888). Compresa in questo significato la *stirps* può co' suoi estremi toccare una porzione del campo artificialmente concesso a due o più sezioni, senza che ne venga perciò a soffrire la sua omogeneità. Nei Trifogli non sono rari questi esempi.

Parallelo allo studio dei gradi inferiori di dignità delle forme attuali, considerate come il risultato dell'evoluzione di diversi tipi originarii, è oggidì tenuto in onore uno studio che tenta di risalire soprattutto coll'aiuto dell'istologia comparata alla parentela antica, che collegherebbe i gruppi fra di loro, e cerca di riunire le membra sparse di quell'organismo, che, ipoteticamente ricostrutto, ne rappresenterebbe lo schema genealogico. A questo scopo sono evidentemente rivolti gli ultimi studii di egregi botanici (Vesque, Delpino, ecc.).

Giova a me citare qui il Vuillemin, autore di un libro testè uscito col titolo: " La subordination des caractères de la feuille dans le Phylum des Anthyllis „, Nancy, 1892. Se io mi permetto di arrestarmi alquanto a discorrere di quest'ultimo lavoro, non gli è certo a scopo di pretenziosa ed importuna critica, la quale sarebbe sovrattutto e solamente possibile e giustificabile, ove io avessi rifatto l'immane lavoro dell'Autore. Io voglio limitarmi essenzialmente ad alcune considerazioni di ordine generale, che nascono spontanee dalle premesse e dalle conclusioni, che l'Autore trae dal suo libro, accurato, fine, ricco di indagini minuziose ed esatte le quali dimostrano in lui una grande conoscenza dell'Anatomia vegetale.

Nel leggere questo libro io mi sono spesso domandato: È possibile, per le classificazioni degli ultimi gradi di dignità, o per togliere le incertezze che spesso regnano sulla posizione sistematica di un vegetale che tocca due generi vicini, trar partito dei criterii che vennero adoperati dall'Autore? In altre parole e per venire ad un esempio pratico, è possibile con questi criterii stabilire se p. e. il *Trifolium ornitopodioides* è veramente un *Trifoglio* od una *Trigonella?* ovvero se il **T. Lupinaster** porti seco le stimmate di un Trifoglio, o sia da riferirsi ad altro genere già conosciuto, ovvero finalmente sia un' entità autonoma degna di speciale denominazione?

La domanda pare a tutta prima oziosa, o meglio pare fuori di posto, e la risposta par facile. Mi si potrebbe dire: che cosa hanno a che fare simili questioni con un libro, che ha tutt'altro obbiettivo fuor di quello di stabilire delle categorie di dignità basate sulle affinità specifiche? Il Vuillemin parte da un genere che porta un nome: il genere *Anthyllis;* e come tale questo nome ha un significato più o meno concreto; L'Autore si è fissato per iscopo di stabilire i legami del G. *Anthyllis* colle altre Leguminose e nulla più! La questione quindi è di tutt'altra natura, ed è fuori luogo. Per verità essa sarebbe tale, ove realmente il libro del Vuillemin apparisse senz'altro inteso a stabilire i rapporti strutturali del G. *Anthyllis* cogli altri generi vicini; fosse cioè esclusivamente uno studio comparativo dei caratteri istologici della foglia del G. *Anthyllis* con quella delle altre Leguminose. Ma questo lavoro è altresì isto-tattico, ed anzi è al lato tassonomico di esso che l'Autore ha consacrato il tempo non breve e la fatica grave, che deve essergli costata una disamina così sapientemente condotta. Nel libro del Vuillemin inoltre ho visto ripetute, troppo più volte che nol consenta la supposta intenzione dell'Autore, delle osservazioni riguardanti il concetto di *specie* e della sua *pratica significazione,* perchè non mi sia lecito di sviscerarne il significato.

Finalmente sta il fatto che partendo dai principî emergenti dal suo studio anatomico, l'Autore ha stabilito tre nuovi generi.

L'Autore a proposito della significazione della parola *phylum* così si esprime (p. 16): " Le terme *phylum* n'équivaut ni à *tribu* ni à *section* ni à aucun des termes, " par lesquels on désigne habituellement les cadres de la classification. Établir un " *phylum,* c'est même, dans un sens, chercher à renverser les barrières *posées arbi-* " *trairement à travers la série des êtres* pour aider la mémoire, et à faire apparaître " l'évolution lente, progressive et souvent indépendante des divers caractères origi- " nellement uniformes, dont la combination permet les distinctions spécifiques. Établir " un *phylum;* c'est chercher des liens plutôt que des séparations.

" Le *phylum* d'une plante, c'est-à-dire sa lignée, n'est pas l'ensemble des espèces " qui ont avec elle une affinité révélée par un, deux , trois caractères *convenus* et " désignés d'avance comme de premier ordre, d'après l'opinion qu'on aura pu se former " de leur importance dans un groupe différent. C'est l'ensemble des plantes reliées " entre elles par des intermédiaires insensibles, concernant tous les caractères im- " portants, de façon qu'on puisse les considérer comme unies par un lien généalo- " gique. Si le groupement répondant à cette définition comprend un grand nombre " de Genres, il peut se faire que certains caractères, par l'accumulation de variations " faibles, se soient totalement transformés à travers la série. Par conséquent *l'affi-* " *nité n'est pas une conséquence forcée de la filiation. Deux plantes d'un même* phylum " *peuvent n'avoir aucun caractère commun* „.

In altre parole l'Autore dice che la storia della filogenesi è la vera storia naturale delle forme, mentre le nostre classificazioni e la subordinazione dei caratteri possono essere *naturali,* ma spesso possono anche *non esserlo*; ed il perchè egli lo dice chiaramente: " Établir un *phylum* c'est même dans un sens renverser les bar- " rières *posées arbitrairement* à travers la série des êtres *pour aider la mémoire* „. Le classificazioni secondo l'Autore sarebbero dei gruppi *arbitrarii.* E di più: " l'af- " finité n'est pas une conséquence forcée de la filiation. Deux plantes d'un même " *phylum* peuvent n'avoir aucun caractère commun „. — Ma se due piante d'uno stesso *phylum* possono *non avere alcun carattere comune,* ed ammettendo colle stesse parole dell'Autore che il *phylum* è un legame, che dimostra la connessione degli esseri attraverso ai secoli, per qual altro motivo dunque, esse vi apparterranno dal momento che caratteri che li leghino non esistono? E qual è la guida, quale il criterio che rivelerà all'Autore la comune o non comune origine di questi *esseri,* che non hanno alcun carattere che li congiunga? E come si potranno distinguere due esseri di *phylum diverso,* i quali siano nelle medesime condizioni, di *non aver cioè alcun carattere comune?*

Ammettere, che due piante di uno stesso *phylum* possano *non avere* dei caratteri comuni, vale quanto lasciar supporre che il tassonomo possa servirsi di *altri mezzi che non sia l'osservazione macro o microscopica dei caratteri strutturali per lo studio delle forme.* Ora, là dove il filo conduttore dell'osservazione si spezza, è forza ricorrere all'induzione, la quale spesso serve, ma più soventi è scorta fallace e lascia dietro di sè il dubbio e l'incertezza. E l'ammettere coll'Autore, che tutti gli esseri viventi non formino che un *phylum* unico, vale secondo me quanto distruggere ogni classificazione. Perciocchè fra le membra di questa catena interrotta esistono delle

lacune (gli *hiatus* dell'Autore), che il corso dei secoli hanno scavate, ed in questo caso se a colmarle può e deve servire l'osservazione strutturale delle membra stesse, e l'analogia tuttora esistente fra esse, io mi domando come sarà *possibile distinguere i caratteri di affinità dai caratteri di filiazione,* dal momento che l'Autore scrive: " l'affinité n'est pas une conséquence forcée de la filiation „!

Il periodo più sopra citato mi pare illogico.

Prosegue l'Autore: " Quant à l'étendue même du *phylum* elle est théoriquement " illimitée. On a même de bonnes raisons de croire *que tous les êtres vivants ne for-* " *ment qu'un* phylum. Les *hiatus*, qui séparent les groupes conventionnels de nos " classifications, tiennent en partie à l'extinction, qui a supprimé les termes de pas- " sage; ils tiennent aussi à ce que bien souvent ces groupes sont mal formés. Par " exemple le *phylum* des *Anthyllis* comprend des genres classés constamment dans " des tribus différentes (Hedisarées-Galegées); tandis qu'on ne saurait y rattacher " aussi directement des plantes considérées comme en étant très affines et même " certaines espèces rangées par plusieurs auteurs dans le genre *Anthyllis.*

" L'établissement d'un *phylum* ne constitue donc pas précisément un groupement " commode, donnant une clef pour la détermination facile des espèces. Toute préoc- " cupation utilitaire doit même en être écartée au début. Le résultat pratique vient " ensuite de lui-même, car les séries des plantes dont on connaît exactement la fi- " liation peuvent être classées d'après des principes plus rationnels, et bien des dif- " ficultés nées d'un groupement prématuré disparaissent naturellement „.

Evidentemente qui l'Autore ammette l'idea, che gli studii filogenetici debbano influire sul raggruppamento pratico delle specie, per quanto questo non ne sia il risultato immediato. E di fatti; secondo l'Autore, il *phylum* delle *Anthyllis* comprende delle forme finora comprese dagli Autori nelle *Hedysareae-Galegeae* cioè in altre parole i caratteri su che l'Autore basa il suo *phylum* non sono gli stessi adoperati fin qui per riunire o separare questi generi, e secondo lui sono i veri, dal momento che stabiliscono la sistemazione di quei generi fra le *Anthyllis* piuttosto che fra gli *Hedysarum* o le *Galega.* Qui soprattutto sta la giustificazione di questa critica.

Ammettendo nella seriazione del Vuillemin le corrispondenti lacune (*hiatus*), è difficile il provare che esse costituiscano i corrispondenti gruppi *convenzionali delle nostre classificazioni.* È da supporre, che là dove questi *hyatus* saranno piccoli fra gruppo e gruppo, ivi le differenze fra essi dovrebbero essere minori; dove invece l'*hyatus* sarà un vero abisso, non dovrebbe rimanere fra anello e anello che un lievissimo vestigio o nessuno dei caratteri, che li legavano, perchè molto più numerosi sono i *termini soppressi.* Or bene si può dire che questi vacui e questi gruppi corrispondano alle nostre classificazioni? Mi pare di no! E difatti noi abbiamo detto più sopra come molti generi siano fra loro più vicini strutturalmente, che nol siano talvolta le specie in essi comprese paragonate fra loro. Per es. è certo più differente la *Stirps* del *T. alpinum* da quella del *T. scabrum,* di quello che nol sia la grande circoscrizione dei Trifogli dalla grande circoscrizione delle *Trigonelle* o dei *Melilotus.*

Dove l'Autore dice giusto, secondo me, è allorquando scrive che spesso i gruppi sono mal formati. Ma il difficile sta nel provare che un dato gruppo è più *naturale* se ordinato coi caratteri che l'Autore vuol dedurre dallo studio anatomico della foglia,

piuttosto che con quelli comunemente dedotti dal fiore. Può darsi che essi vadano di pari passo; ed allora ne guadagnerà la naturalezza della categoria. Ma quando essi si troveranno in opposizione, con qual dritto si dovrà dar la preferenza agli uni piuttosto che agli altri? Dirò più avanti quale sia il requisito, che i caratteri (di qualunque specie essi siano) debbono avere perchè siano preferiti; ma per ritornare alle idee dell'Autore sull'affinità delle specie io citerò ancora un brano del suo libro (pag. 3). " Une classification est naturelle quand elle groupe les espèces de façon à " les rapprocher *en raison directe de leur parenté.* Le terme *parenté,* employé de tout " temps dans un sens abstrait, a pris une acception définie avec la *doctrine transfor-* " *miste.* Dans ce sens la classification naturelle doit *être généalogique.* S'il en est ainsi " l'*affinité n'est plus la base directe de la classification naturelle,* pas plus que la res- " semblance de deux hommes ne suffit à démontrer leur consanguinéité; *elle n'a de* " *valeur qu'autant qu'elle est l'indice de la filiation.* L'affinité *positive* ou *négative* permet " de séparer ou de réunir les espèces dans des cadres de diverses catégorics; *mais* " *elle ne nous renseigne pas sur les rapports réels de ces cadres* (!). Tandis que l'affinité " est *basée* sur la constatation des *caractères concordants,* la *filiation* doit reposer sur " la *réductibilité des caractères différents* ".

Da questo periodo si rilevano anzitutto due cose: 1° che il trasformismo avrebbe, secondo l'Autore, definito finalmente il senso del vocabolo *parentela,* che, per mio conto almeno, ha sempre avuto un significato abbastanza concreto. Ma in qual modo sarebbe definito? ammettendo che la *classificazione naturale deve essere genealogica,* e per questo motivo, secondo l'Autore, l'affinità non sarebbe più la base della classificazione. In altre parole, e per prendere un esempio pratico: se questo dovesse verificarsi per la sistemazione delle specie, noi non avremmo più il diritto di riunire nello stesso quadro (*Stirps*) il *T. alpinum* p. es. col *T. polyphyllum,* finchè non ci sia possibile dimostrare, *altrimenti che coi caratteri attuali di rassomiglianza,* che questi due esseri sono proprio discesi dallo stesso ceppo. E siccome il rimontare per l'oscura notte dei secoli ci è per ipotesi non concesso, e d'altra parte non ci si concede di trar partito delle affinità morfologiche, se *non come di una guida mal sicura ed empirica,* così ognun vede, come di questo passo sia semplicemente annullata ogni sistemazione, perchè non è possibile di giudicare della parentela di due forme *altrimenti* che colla concordanza dei loro caratteri strutturali. 2° Il Vuillemin ha detto, che se la classificazione naturale deve essere genealogica, l'affinità non è più la base della classificazione, allo stesso modo che la rassomiglianza di due uomini non basta a dimostrare la loro consanguineità. Ma o io sbaglio o qui siamo di fronte ad un sofisma. Anzitutto il paragone fra due uomini e due specie o due generi non regge. Tanto varrebbe pretendere che due piante per es. di *Trifolium diffusum* uscite dalla fecondazione di due ovoli di uno stesso legume dovessero per questo motivo svilupparsi in modo da essere sovrapponibili; ed esse non appartengono perciò meno al genere *Trifolium.* E d'altra parte, se la rassomiglianza di due uomini non prova la loro consanguineità, è certo che talvolta la discrepanza delle loro linee è lungi dal provare che essi non siano consanguinei. Ma a parte ciò, se l'affinità non ha valore che in *quanto essa è l'indizio della filiazione,* e poichè la filiazione presuppone ed implica l'ereditarietà, e poichè tra caratteri ereditarii e di adattamento è spesso difficile pronunciarsi, e finalmente poichè i caratteri acquisiti si trasmettono per eredità,

io non giungo a capire perchè la rassomiglianza di due forme *non si debba in ogni caso ritenere come l'espressione di un nesso genetico qualsiasi, senza essere costretti a supporre l'origine* **non filetica** *di queste affinità.*

Se dunque l'affinità non è sempre conseguenza della discendenza diretta od indiretta di che cosa sarà la conseguenza? Ed ammesso che essa possa essere la conseguenza di un accidentale ravvicinamento di due esseri originariamente differenti, *chi è colui che potrà con sicurezza dire, quando si ha a che fare con una* **consanguineità vera** *o con una* **apparente** *dal momento che i caratteri che ci servono di guida sono gli stessi in ambidue i casi?*

È egli possibile stabilire delle categorie di caratteri corrispondenti, che servano a rivelare quando due forme sono o non sono parenti? Evidentemente no! Io non potrò mai comprendere l'opposizione assoluta fra caratteri filetici ed epharmonici stabilita dal Vesque.

Secondo Vuillemin l'affinità positiva o negativa permette di separare o di tener riunite le specie nei quadri di diverse categorie, ma essa non ci dà notizia alcuna *sui rapporti reali* di questi quadri.

Esisterebbero, secondo l'Autore dunque, due specie di affinità, la negativa e la positiva. Quest'ultima si capisce: la prima non può essere che la negazione di ogni rassomiglianza; la seconda è rappresentata dai caratteri concordanti, la prima dai caratteri differenti *i quali sono passibili di una riducibilità.* Ma è evidente, che se la concordanza dei caratteri può far riconoscere il nesso fra specie e specie, la riducibilità dei caratteri discordi potrà far riconoscere una lontana affinità fra genere e genere, tra famiglia e famiglia; ma non potrà applicarsi alla sistemazione delle unità tassonomiche di ordine inferiore. E se le caratteristiche basate sulle rassomiglianze, usate da Linnè ai giorni nostri per raggruppare le specie sono *rapporti fittizii,* quali saranno e in qual parte del vegetale converrà ricercare i *rapporti reali che l'affinità non è capace a rivelarci secondo l'Autore?*

La prova di quanto dicemmo più sopra sull'influenza nulla che per la sistemazione delle specie deve esercitare lo studio di un *phylum* è questa: che ogni esempio pratico, presentato dal Vuillemin a sostegno delle sue asserzioni, è tolto dalla considerazione di apparati o di sistemi di organi isolati, i quali debbono essere naturalmente enormemente variabili, essendo in certo modo gli strumenti dei quali il vegetale si serve per raggiungere la sua definitiva *forma* e costituzione. A tale categoria appartengono tutti i caratteri desunti dall'organizzazione della foglia, e dei suoi accidenti di superficie, come l'apparato stomatico, il cribro-vascolare, il parenchima e l'apparecchio accumulatore. Ognun vede a prima giunta quale applicazione enormemente vasta debbono aver simili caratteri, e quanto le influenze del mezzo, debbano influire su di essi; nè per quanto si sforzi l'immaginazione si giungerà a capire, come la *sclerosi di un periciclo* possa venire in aiuto a rischiarare i rapporti genetici di due specie controverse od anche di due generi.

Chi voglia p. e. basarsi solo sulla configurazione esterna delle foglie per classificare i grandi gruppi delle Leguminose, farebbe certo opera vana. Ma è illusorio il supporre che l'anatomia di essa possa servir meglio a quello scopo. Che lo studio istologico della foglia, al pari di quello del fiore, possa rischiarare il *phylum* di un gruppo cioè la sua discendenza o consanguineità coi gruppi vicini nessuno mette in dubbio;

ma che poi il risultato pratico discenda fino all'ordinamento dei generi e delle specie, e possa portar luce su qualche specie controversa, è quanto mi permetto di porre in dubbio.

Lo esame anatomico meravigliosamente accurato dei caratteri della foglia ha condotto il Vuillemin a stabilire tre generi nuovi *Podostemma*, *Lotopsora* e *Pseudosophora,* tolti dai G. *Astragalus, Psoralea* e *Sophora,* ed in forza di caratteri quali la *presenza* o l'*assenza* delle emergenze nodali o stipolari, l'esistenza dei cristalli aciculari nel libro, lo sviluppo dei tanniferi attorno al legno dei fasci, i peli flagelliferi, ecc.

Ammesso che questi caratteri siano in sè e per sè migliori od equipollenti a quelli che formano il *substratum* delle classificazioni comuni, resta a sapere se loro equivalgano nella *costanza,* e se un'esperienza di coltivazione in ambienti diversi per suolo, nutrizione, esposizione, ecc., non possa modificare questi dati, che sembrano troppo legati colla funzione vegetativa dell'organismo vegetale.

L'Autore discutendo l'opposizione dei caratteri *filetici* cogli *epharmonici* stabiliti dal Vesque così prosegue (p. 4):

" Dans cette théorie si une plante possède des caractères phylétiques c'est uni-
" quement parce que ses ancêtres les possédaient et les lui ont transmis. Mais pour-
" quoi les ancêtres en étaient-ils dotés? Il n'y a que deux réponses possibles à cette
" question. Puisque aucun caractère de forme extérieure ou de structure n'est iden-
" tique à lui-même dans toute la série végétale, chaque particularité a fait son ap-
" parition à un stade plus ou moins ancien de la phylogénie. Il faut donc ou que
" les caractères phylétiques aient apparu sans motif à un moment donné, ou qu'ils
" se soient produits par adaptation et maintenus par sélection, conformément aux
" lois de l'évolution.

" On ne peut sortir de ce dilemme. La première alternative est simplement la
" négation du transformisme; car elle suppose des catégories *indépendantes, définies*
" *par les caractères phylétiques* et offrant des modifications de détail plus ou moins
" étendues. Chacune de ces *catégories immuables* serait alors la *véritable espèce,* dont
" les limites seraient par le fait démesurément élargies; les propriétés épharmoniques
" caractériseraient de simples variétés. Dans la seconde alternative les caractères
" *devenus héréditaires* **ont d'abord été variables,** et ces variations ont été **provoquées**
" *elles aussi par le* **milieu** „. E già nella *Prefazione* a questa sua pregevolissima opera (pag. VI) l'Autore scriveva: " Les caractères faciles à voir à l'œil nu sont surannés,
" les caractères anatomiques sont infidèles; la subordination des uns et des autres
" est un vain mot. La principale cause de ce malaise est peut-être l'inconséquence
" de la pluspart des Botanistes qui, tout en proclamant à l'envi les principes trans-
" formistes, considèrent chaque caractère comme une entité immuable et de valeur
" constante „.

Se da una parte ripugna il pensare, che i gruppi che noi vogliamo stabilire col nome di *Stirpes* sono delle categorie *immutabili,* altrettanto poco ci riesce di capire come i caratteri " *d'abord variables* „ e " *devenus héréditaires* „ non godano, con questo cambiamento, di una fissità relativa (che in un certo senso e fino ad un certo punto potrebbe *paragonarsi* alla fissità assoluta delle categorie immobili più sopra citate dal Vuillemin), la quale permetta di riconoscere ad un dato momento per mezzo loro una parentela di grado diverso fra i vegetali che compongono un gruppo.

Il rimprovero però che i sostenitori del trasformismo scagliano a coloro che ancora credono al motto *tot species sunt quot creatae fuerunt* mi pare un coltello a due tagli. Poichè, se non è ammissibile la fissità delle categorie, ci pare anche inammissibile *la loro continua mobilità,* che distruggerebbe ogni tentativo di classificazione. Ed il periodo più sopra citato del Vuillemin potrebbe ben trasformarsi in quest'altro: " La principale causa di questo guaio è forse l'inconseguenza dei botanici, che proclamando il trasformismo si mettono nella condizione di dover segnare *i limiti della durata di ogni successiva forma,* e naturalmente *non ci riescono* „. D' altra parte il Vuillemin stesso ammette dei caratteri *d'abord variables devenus héréditaires.* Ora, si può domandare, per quanto tempo *dura* questo carattere così ereditato? Forse finchè durano le circostanze " provoquées par le **milieu** „?

Neppur questo mi persuade.

È noto dai lavori dell'Hackel sulle Festuche d'Europa, per citare un solo esempio, che certi caratteri *non sentono l'influenza del mezzo in cui vivono,* ed è appunto su questi caratteri, i quali mostrano una costanza grande nelle loro manifestazioni esteriori, che Hackel ha gettate le basi del suo lavoro modello, dimostrando precisamente che la loro specificità è in ragion diretta della resistenza, che essi oppongono alle cause esteriori, che tendono a farli variare. Egli è perciò che, secondo me, sarà lavoro eminentemente proficuo del tassonomo quello, che parte da un simile indirizzo, e questo deve essere il requisito di cui più sopra ho parlato, e che fa sì che i caratteri di una categoria debbano avere il sopravvento su quelli di un'altra, allorchè nel raggruppamento delle forme essi si trovano in opposizione.

L'obbiezione capitale, che si suol comunemente fare a queste considerazioni, è: che la *fissità* dei caratteri *constatabile nell'attualità,* quali dominanti di una categoria, è una fissità *molto, troppo relativa,* quando si pensi all'enorme spazio di tempo che costituisce già solo un'epoca geologica. E contro quest'obbiezione nulla si può opporre.

Però le cause che fanno variare questi caratteri agiscono troppo lentamente, perchè non possa esere concesso di pensare ad una certa costanza (relativa certo di fronte alla successione dei secoli od anche solo di un'epoca geologica) ma abbastanza assoluta nell'epoca attuale, perchè essa possa permettere un'applicazione pratica. Del resto della fissità o della mobilità delle specie si potrà a tutto rigore dir quello, che il Vuillemin con tutta ragione scrive della teoria che vede nel cauloma un semplice aggregato di decorrenze fogliari, o della teoria inversa secondo la quale la foglia non è che un'espansione del fusto; si può dire cioè che questa questione ricomparirà e scomparirà periodicamente, perchè nessuno potrà mai materialmente dimostrare l'una o l'altra cosa.

Ma per poco che essa duri è sempre una *fissità,* ed è indipendente *attualmente* dai mezzi in cui il vegetale cresce. E si può d'altro canto semplicemente dire, che una difficoltà del pari enorme si presenta a coloro che pretendono sostenere la continua mobilità dei caratteri; cioè quella più sotto accennata che è loro impossibile lo stabilirne le modalità ed i limiti, coll'aggravante di essere costretti a distruggere ogni tassonomia.

Ciò non di meno il Vuillemin mette innanzi come una prova dell'indiscutibilità della teoria transformista il fatto, che nelle Papilionacee alcuni caratteri, che sono considerati come i più insensibili agli agenti fisici, vengono a variare e quindi " les

" limites de la réductibilité des espèces sont reculées bien au delà du terme défini " par les caractères épharmoniques „ (pag. 4). E continua (pag. 5) con queste parole: " A vrai dire on pourrait définir les caractères phylétiques; des propriétés " morphologiques dont la raison d'être n'a pas encore été déterminée. C'est une " catégorie par trop subiective pour devenir le fondement de la taxinomie de l'avenir „.

Mi pare che esista in questo periodo un altro malinteso. Il limite dei gruppi (generi, specie) dato dai caratteri efarmonici può essere mal definito da una imperfetta conoscenza o da uno studio incompleto dei gruppi stessi: potrà allargarsi o restringersi, ma un limite deve pure esistere anche a detta dell'Autore. Ora, se i caratteri filetici, cioè i caratteri ereditarii, sono delle proprietà morfologiche *la cui ragione di essere* non è per anco stata determinata, e costituisce una categoria troppo *soggettiva* perchè possano divenire il fondamento della tassinomia dell'avvenire, io mi domando quale scopo si sia prefisso l'Autore nel suo lavoro sul *Philum* delle *Anthyllis* all'infuori di una semplice enumerazione delle consonanze e delle differenze istologiche della foglia delle *Anthyllis* colle altre *Leguminose,* e a quale altro criterio debba improntarsi la tassinomia futura?

L'Autore chiude la sua opera con un periodo che qui cito parzialmente (p. 330):

" Chaque caractère tiré de l'organisation de la feuille *a une dignité variable* " suivant le niveau considéré de ce groupe soumis à une active évolution qui cons- " titue le *phylum* des *Anthyllis.* Faut-il pour cela considérer la structure foliaire " comme moins digne d'attention que la morphologie florale? Assurement non; car " les propriétés de la fleur ne sont pas plus invariables. Pour n'en citer qu'un exemple: " *la monadelphie, l'articulation du légume, bases essentielles de la classification des Papi-* " *lionacées ont acquis* à ce stade critique de la phylogénie *une incostance qui les place* " *au dessous du mode d'épaississement du flagellum ou de l'existence des poils glanduleux* " bien qu'elles se soient intégrées d'une façon si parfaite chez les vraies Hédysarées " ou chez le Génistées „.

Data e concessa la maggior costanza dell'ispessimento del flagello e l'esistenza dei peli glandolosi nelle Leguminose in confronto dei caratteri fiorali, ne nascerebbe che non più questi ma bensì quelli dovrebbero costituire il criterio di raggruppamento della famiglia. E se questi caratteri si riconoscessero domani identicamente costanti in confronto di tutti gli altri che determinano oggidì la famiglia delle Rosacee, sarebbe d'uopo allargare la circoscrizione delle Leguminose includendovi le Rosacee e via via. Ognun vede dove di questo passo si va a finire per quanto legalmente. Ma ammesso pure questo allargamento, si può dire che la circoscrizione così stabilita sia più naturale di quella che raggrupperà i nuclei esistenti in ciascun genere cioè le nostre *Stirpes?* E saranno proprio il flagello ed i peli glandulosi che staranno a prova di un antico legame *naturale, genetico, certo,* fra le Rosacee e le Leguminose? o non saranno piuttosto quei rapporti ben più fittizii di quelli che, tolti dal complesso delle *species,* verranno a costituire le vere unità tassonomiche cioè le *Stirpes?*

Il minimo dettaglio di struttura, scrive infine il Vuillemin, " può divenire caratteristico di *una categoria estesa* purchè abbia raggiunto un grado sufficiente di palingenia nel gruppo considerato „. Ed in ciò siamo perfettamente d'accordo. Ma appunto perchè estesa, la categoria non può sempre essere l'espressione di un raggruppamento naturale. Per es. la pubescenza dei petali è caratteristica validissima di una *Stirps* ap-

partenente alla sezione *Lagopus* (Tricoptera); questo è un rapporto evidentissimamente di affinità di parentela fra le specie che compongono questa *Stirps*. Invece il legume villoso è carattere proprio di una quantità di specie, le quali appartengono certamente a diverse *Stirpes*. Il primo è un rapporto reale, il secondo è fittizio e tutti e due sono basati su di un carattere identico, la presenza dei tricomi sugli organi. Il primo carattere deve evidentemente essere filogenetico per quelle specie: il secondo no.

Non sarà fuor di luogo il dire qui anche due parole in proposito delle idee esposte dal D[r] Terracciano (1) sui rapporti sistematici delle forme di un genere qualsiasi.

Scrive il D[r] Terracciano: " Per me *tipi* e *gruppi* e *stirpi* e *specie,* ecc., ecc., per quanto unità relativamente concrete, prese così di per sè sole, hanno sempre valore filogenetico considerate l'una rispetto all'altra. I loro rapporti sistematici abbracciano quindi un insieme di caratteri morfologici e geografici, onde spesso alcuni possono non interessare la tassinomia rivolta allo scopo di far conoscere le piante nel complesso loro più o meno generale; altri, e sono i più, porrebbero nella mente quella gran confusione, che dal frazionamento e dallo sminuzzamento delle forme ricercate a stabilire le affinità suole sempre seguire. Il Prof. Gibelli, della cui affettuosa amicizia mi onoro, conosce la stima ch'io abbia delle sue idee per sapermi voler male se in un campo così vario e subiettivo un poco mi discosti dal suo modo di vedere, allargando cioè o restringendo la significazione alla nomenclatura da lui proposta „.

Le mie brevi osservazioni allo scritto del D[r] Terracciano avrebbero dovuto veder la luce molto prima d'ora, se me ne fosse venuta l'occasione che ora mi si presenta, lontanissimo dal voler iniziare una polemica qualsiasi su questo soggetto, ma unicamente perchè mi pare che, o il D[r] Terracciano non ha ben afferrato le idee del prof. Gibelli, che sono anche un poco le mie, come si vede dal titolo dell'opera, ovvero che noi non ci siamo abbastanza chiaramente spiegati.

Noi non abbiamo messo mai in dubbio che le *stirpes* (e le *species* che le compongono), per quanto unità relativamente concrete non siano filogeneticamente legate le une alle altre, ma questo non abbiam detto mai dei *gruppi in generale* e soprattutto delle *sezioni*, cioè di categorie artificialissime, che possono essere, anzi di solito sono fatte ad arbitrio per facilità di sistemazione, e non rappresentano dei nuclei affini. Se si vuol far entrare il nesso filogenetico nelle sezioni, converrà intenderlo nel senso in cui il Vuillemin intende il *phylum* universale, che raggruppa tutti gli esseri viventi.

In altre parole nel genere *Trifolium* non crediamo che un nesso filogenetico leghi per es. le **Amorie** ai **Lupinaster**, pel solo fatto che il vessillo è libero o quasi in tutte e due le sezioni; mentre siamo più che persuasi, che un vero nesso di consanguineità (mi si passi la parola), corre p. e. fra il *Trifolium nervulosum* Boiss. e tutte le specie della *Stirps* **Glandulifera,** quantunque al primo manchi uno dei caratteri posseduti dalle altre specie, cioè il collaretto involucrante del capolino, mentre *tutte le altre note concordano.*

E per lasciare un poco le vedute soggettive, come le chiama il D[r] Terracciano,

---

(1) " Malpighia „, Anno III, vol. III, p. 297 (in nota) e seg.: *Dell'*Allium Rollii *e delle specie affini* (1889).

nelle quali è spesso difficile accordarsi, sarà bene di scendere un momento nel campo pratico della sistemazione delle forme, dove le vedute soggettive devono trovare una corrispondente applicazione sotto pena di non intendersi più.

La filogenesi entra a costituire l'ordine diremo così ontologico dei diversi gruppi; la loro ordinazione pratica fa parte dell'ordine del sensibile e del reale: si può cioè essere incerti sulla via probabile, che le attuali forme hanno seguìto per essere quello che sono, ma non vi può essere gran diversità di vedute nello stabilire il valore dei vocaboli che si usano per definire i gruppi oggidì esistenti, dal momento che questi vocaboli hanno avuto prima di noi ed hanno tutto dì un significato.

Questo ragionamento prende a tutta prima l'aspetto di un paradosso; avvegnachè questa benedetta filogenesi dei gruppi non si possa in ultima analisi in altra maniera dedurre, che studiando i rapporti di forma dei vegetali fra loro; ma non è meno vero che tutte le classificazioni hanno un lato in certo modo artificiale, ed almeno in questa bisogna, oggettiva fin che si vuole, è d'uopo accordarsi (1).

Ed è in questo campo che io vorrei vedere mantenuto *fino al limite del possibile*, il parallelismo dei valori; questa è, volere o no, la sola via per giungere a stabilire i gradi di dignità corrispondenti al nesso genealogico presupposto.

Così si andrà contro alla confusione, dalla quale il D[r] Terracciano giustissimamente rifugge, ed a questo scopo molti fitografi moderni (Hackel, Burnat, Naegeli, Christ-Haussknecht, ecc.), hanno rivolto le loro più amorose cure.

Conviene insomma addivenire ad una specie di *casellamento* delle forme, subordinate alla *Stirps*, nel quale sia evidente, che p. e. la forma *a* dipenda dal gruppo di ordine superiore *A*, per la stessa ragione per cui la forma *b* appartiene al gruppo di ordine superiore *B*, e nei quali si possa sempre controllare (mi si perdoni il barbarismo) la *costanza*, il *numero* ed il *valore* dei caratteri *similari* usati a stabilire questi rapporti.

Spesso invece nel lavoro del D[r] Terracciano si trovano usate espressioni come la seguente: " la forma *A passa* per la forma *B*, ecc. ". Ora con questa semplice espressione non si può capire se la forma *A* passi vicino o lontano pei suoi caratteri dalla forma *B* e paragonata con un'altra forma corrispondente collaterale.

Così pure l'espressione grafica dei nessi strutturali delle diverse specie, sottospecie e varietà, come vien trattata nel lavoro sull'*Allium Rollii*, non ci pare possa renderli chiari, poichè essi non esprimono la differenza di valore dei legami, ma costituiscono un aggruppamento, mutuo o no, ma uniforme.

---

(1) Per spiegare meglio con un altro esempio questa specie di indipendenza della tassinomia delle forme attuali dalla filogenesi, mi servirò di un gruppo di Trifogli già altra volta utilizzato nella Prefazione ai *Lagopus*. — Il *T. dalmaticum*, che, secondo noi, sta oggidì ad uno dei capi della *Stirps Scabroidea*, avrà forse appartenuto ad un tipo un tempo più differente dal *T. scabrum;* e le differenze che lo separano oggidì da questa specie, avranno potuto essere di gran lunga meno valide delle analogie, che lo legavano ad un tipo scomparso, cosicchè se noi potessimo oggi vedere quelle forme, forse il *T. dalmaticum* farebbe parte di un'altra *Stirps*. Ma così come oggi stanno, noi non possiamo far a meno di riunire il *T. dalmaticum* al *T. scabrum* nella stessa *Stirps*, per quanto essi stiano ai due poli della circoscrizione, ed abbiano il *T. lucanicum* che li collega da un lato solo, mentre l'altro lato è quello dove il *T. dalmaticum* non ha rapporti con nessun'altra forma.

Anzitutto poi è ncessario partire, nella nomenclatura, dalle definizioni delle seriazioni; e questo è stato per noi un lavoro altrettanto necessario quanto faticoso. E si capisce che per *allargare* o *restringere* (sono parole del D^r^ Terracciano) le idee, che altri può aver espresse in un processo tassinomico, conviene anzitutto farsene un concetto esatto e dare la definizione esatta delle modificazioni che vi si introducono. E poichè ci siamo, comincierò dalla definizione che il D^r^ Terracciano ha dato della *Stirps* (p. 298). Eccola:

" Il gruppo ed i sottogruppi, per quanto idealmente, concretizzano un complesso di caratteri generali riconoscibili nel tempo e nello spazio fra tutto il differenziamento morfo-geografico, a cui andarono soggette le molteplici loro forme; nelle quali, se essi genericamente una per una si adattano, specificamente non vi sono compresi, sì da poterne essere rappresentati. Invece quando, stabilito un carattere, ad esso altri si aggiungono, per modificare ed affermare un assieme di forme entro certi confini morfologici ed in rapporto all'ambiente considerato o quale mezzo presente di evoluzione, o termine di evoluzioni da epoche più remote ed in rapporto alle condizioni inerenti al loro quale che siasi ciclo biologico, sorgono le *Stirpes* „. ??

Io confesso ingenuamente che non ho potuto capire questa definizione. Non do la colpa ad altri di questa mia insufficienza; ma osserverò soltanto che da Spring a Nœgeli esiste la definizione della *Stirps* molto più semplice, con un significato chiarissimo, che noi abbiamo cercato di precisare ancora meglio nella *Prefazione* ai " *Lagopus* „, e che ognuno che l'usa ha il dovere di discutere, dato che ne alteri il significato, o lo allarghi, o lo restringa. La definizione della *Stirps* è questa: *Un complesso di entità che hanno uno stampo comune; che probabilissimamente hanno avuto un'origine comune dimostrabile nell'attualità, e che si rassomigliano fra loro così da costituire un vero nucleo quasi sempre ben separato dalle altre* Stirpes *della sezione a cui esso appartiene, ed i cui caratteri sono inegualmente distribuiti nei membri che lo compongono, originando così i diversi gradi di dignità che esso comprende,* species, subspecies, varietates, ecc. Questa definizione non differisce sostanzialmente da quella una volta attribuita alla Specie Linneana se non per ciò, che essa è basata sull'esistenza di un complesso di caratteri, e permette una certa oscillazione degli elementi che la costituiscono; mentre la definizione Linneana della specie implicava una fissità disperante delle forme.

Definito così il significato di *Stirps* era còmpito del D^r^ Terracciano il dire dove questo significato era allargato e dove ristretto. Farò io invece un breve esame della sua seriazione in confronto colla nostra.

Al di sopra della *Stirps* sta per noi la *Sezione* che abbiamo detto essere una circoscrizione artificiale. Pel D^r^ Terracciano sta invece il *Typus* (p. 304) che è un sottogruppo (p. 298), corrispondente alla nostra *Sezione,* perchè basato su di un solo carattere (*Typus monoumbellatus* e *Typus biumbellatus*).

L'Autore conviene qui di aver usato impropriamente questo vocabolo, che ha un significato troppo preciso (cioè *modello, stampo*), per significare invece una grande casella, che comprende essa stessa dei tipi diversi. Non insisteremo più oltre su questa improprietà di nomenclatura già sconfessata dall'Autore.

Al di sopra del *Typus* sta pel D^r^ Terracciano il *prototypus* e nella nostra seriazione al di sopra della sezione sta il *Genere.*

Che cosa sia il suo *prototypus,* il Dr Terracciano non spiega: aggiunge però fra parentesi (*Prototypus = typus sensu vero*).

Ma il guaio è che nel grande quadro degli *Allium,* in fondo al lavoro, la parola *prototypus* non esiste più nella seriazione, mentre vi è nuovamente riprodotta la parola *Typus;* e, quello che ci sorprende è di vedere assieme riportato i vocaboli *Sectio* e *Subsectio.*

In questo caso le parole *Sectio, Subsectio, Typus* avrebbero lo stesso significato ed almeno una sarebbe di troppo.

La divisione che corrisponde al *Typus monoumbellatus* è ben equivalente nel concetto sistematico alla sezione " *Crommium* „ e *Subsectio Porrum,* Boiss. „.

Come si vede è difficile capire, il dove, il come, ed il perchè l'Autore abbia allargato o ristretto il concetto da noi esposto nel lavoro sui Trifogli. Soprattutto risulta chiaro, che il nesso filogenetico, che correrebbe per es. fra i membri della *Stirps* " *Descendens* „ è un vero nesso di affinità, mentre è chiaro che i due *typus: mono-* e *biumbellatus* comprendono delle *Stirpes* diverse, ed il nesso filogenetico, fra quelle sezioni non è certo dello stesso valore di quello che stringe fra loro i membri delle diverse *Stirpes.*

Creando poi la parola *Prototypus* l'Autore pare abbia voluto designare il capo-stipite di una discendenza. Ma il capo-stipite di una discendenza si può supporre esistente in una *Stirps* secondo le nostre idee, non in una *Sezione,* basata su di un carattere solo: chè tale sarebbe il *Typus* del Dr Terracciano. Noi però abbiamo rinunciato a stabilire, quale delle *species* di una *Stirps* debba venir designato come *tipo* o capo-stipite: perchè è semplicemente impossibile il saperlo. Nell'ambito della *Stirps tutti* i caratteri sono rappresentati da una o più forme (*species*); *o solo in parte* (*subspecies*), ma non è possibile dire quale di esse è *direttamente* il rappresentante primo dell'evoluzione di una forma tipica.

Questi sono i punti controversi che io avrei voluto vedere discussi dal Dr Terracciano, facendo un parallelo accurato dei suoi valori sistematici con quelli già usati in tassinomia, per es. coi valori stabiliti dall'immortale Decandolle nel Congresso Botanico di Ginevra, quando non avesse voluto fermarsi alle nostre classificazioni. Ma finchè non si faranno questi paralleli, non potremo a meno di deplorare che si introducano nella nomenclatura dei vocaboli, che hanno un'influenza dannosissima, tanto più quando sono stati adoperati da altri in altro senso, ovvero quando esprimono un significato opposto alla loro natura.

Mi permetto ancora un'ultima osservazione alla nota posta a pag. 297 della Malpighia. L'Autore parlando delle *stirpi, gruppi, specie,* ecc., scrive, che i loro rapporti genetici " abbracciano un insieme di caratteri morfologici e geografici, onde spesso alcuni possono non interessare la tassinomìa, rivolta allo scopo di far conoscere le piante nel complesso loro più o meno generale; altri, e sono i più, porrebbero nella mente quella gran confusione, che dal frazionamento e dallo sminuzzamento delle forme suole sempre seguire „.

Secondo l'Autore esisterebbero dunque due specie di caratteri, morfologici e geografici. Io confesso che non giungo a farmi un'idea di un carattere geografico in astratto. Il carattere geografico per me si confonde senz'altro col carattere morfologico o, a dir meglio, il secondo può essere una dipendenza ed un'espressione del

primo. Vale a dire che a seconda della sua ubicazione una forma qualsiasi potrà modificare la sua struttura. In tal caso, come è possibile che vi siano dei caratteri morfo-geografici, che possono *non interessare il tassonomo?*

In quanto essi sono *caratteri* avranno un valore più o meno grande a seconda dell'importanza dell'organo e soprattutto della costanza loro, ed allora serviranno a scopo tassinomico; potranno essere variabili estremamente, anche in uno stesso individuo ed allora si trascurano. Quali siano poi i caratteri, che possono esser causa di gran confusione nella mente di chi si accinge ad un lavoro di sistemazione neppure giungo a capire, come non mi riesce di afferrare il concetto filogenetico tal quale è espresso nel lavoro dell'Autore. Ho cercato nel lavoro da lui citato in nota a pag. 304 della Malpighia cioè: *Le Viole italiane della Sezione Melanium* " N. G. Bot. Ital. „, Vol. XXI (1889) qualche schiarimento su queste idee; ma con mio rincrescimento non ho trovato che un solo periodo, quello con cui l'Autore chiude la memoria, e che non mi è parso più chiaro degli altri. Discorrendo delle viole egli così finisce (p. 328): " Quale di tutte il *prototipo,* come nel tempo e nello spazio si siano differenziate, quanto spetti alla plasticità, sia in rapporto con *tipi anteriori e con altri futuri,* dirò in lavoro di maggior momento, di cui queste idee non sono che il riepilogo più breve il quale abbia saputo farmi „.

Qui il *prototipo* è nuovamente messo in serie. Ma per me trovo che se è cosa molto problematica il sapere come nel *tempo e nello spazio* una *Stirps* si sia differenziata, mentre è possibile studiarla tale quale oggidì si presenta, riesce poi assolutamente al di sopra di ogni immaginazione il figurarsi *quanto la plasticità di un genere possa essere in rapporto con tipi futuri.*

Non mi vorrà male, spero, l'egregio D^r^ Terracciano se, a molti che mi parvero voli di ardita fantasia, io ho opposto la fredda logica dei fatti, anche a costo di averne taccia di pedante. Nè creda, che il divergere completamente dalle idee sue soggettive, voglia significare un dubbio sull'esattezza delle sue osservazioni sul genere *Allium* o sul genere *Viola,* dei quali non ho che limitatissima conoscenza. Mio solo scopo in questa breve critica è stato quello, come già dissi di far sì, che le nostre idee esposte nella *Prefazione* ai " *Lagopus* „ non venissero fraintese da chi, per avventura non conoscendola, avesse voluto o dovuto farsene un concetto dall'esposizione sistematica del D^r^ Terracciano sul G. *Allium.*

LUPINASTER (Buxbaum)

Buxbaum Nova pl. Gen. (in Comment. Acad. Sc. Imper. Petrop. Tom. II, p. 345 (1729) — *Mœnch* Suppl. ad Meth. pl. etc. Vol. II, p. 50 (1802) — *Link* Enum. pl. R. H. Berol. Vol. II, p. 260 (1822) — *Seringe* in DC. Prodr. Vol. II, p. 203 (1825) p. p. — *Duby* Bot. Gall. Vol. I, p. 135 (1828) p. p. — *Presl* Symb. Bot. Vol. I, p. 46 (1832) p. p. — *Rchbch.* Fl. Exc. Vol. II, p. 495 (1832) p. p. — *Endl.* Gen. pl., p. 1268 (1836-40) — *Puccinelli* Syn. Pl. Agr. Luc. Vol. I, p. 371 (1841) — *Endl.* Enchyr. Bot., p. 668 (1841) — *Ledeb.* Fl. Ross. Vol. I, p. 551 (1842) — *Koch* Syn. Fl. Germ. et Helv. Vol. I, p. 90 (1843) — *De Vis.* Fl. Dalm. Vol. III, p. 300 (1850) — *Koch* Syn., ediz. III^a^, p. 149 (1857) — *Benth.* et *Hook.* Gen. Pl., p. 488 (1862-67) — *Fuss* Fl. Transsilv., p. 162 (1866) — *Boiss.* Fl. Or. Vol. II, p. 112 (1872) — *Rchbch.* fil. Ic. Fl. Germ. et Helv. Vol. XXII, p. 74 (1874) — *Celak.* Aufb. der Gatt. Trif. (in Oesterr. Bot. Zeitschrf. N. 2, p. 42) (1874) — *Koch* Tbch. der Deutsch. u. Schw. Fl. ediz. alt., p. 521 (1878) — *Nyman* Consp. Fl. Europ., p. 179 (1878-82) — *Willk.* et *Lange* Prod. Fl. Hisp. Vol. III, p. 358 (1880).

PENTAPHYLLON *Pers.* Syn. Vol. II, p. 352 (1807).

PENTAPHYLLUM *Spreng.* Syst. Veg. III, p. 286 (1826) p. p.

DACTYPHYLLUM *Rafin.* In Journ. Phys. LXXXIX-261 (ex Endl. Gen. Pl. l. c. et Enchyr. l. c.).

LOTOIDEA *L.* Sp. pl., p. 1079 (1764) p. p. et Syst. Nat. II, p. 501 (1767) p. p., et Syst. Veg. (ed. 14^a^ Murray), p. 687 p. p. — *Willd.* Sp. pl. Vol. III, p. 1357 p. p. (1800) — *Suter* Fl. Helv. Vol. II, p. 107 (1802) — *Pers.* Syn. Vol. II, p. 348 p. p. (1807) — *Ait* Hort. Kew. Vol. IV, p. 381 (1812) p. p. — *Sibth.* et *Sm.* Fl. Gr. Prod. Vol. II, p. 96 p. p. (1813) — *Lapeyr.* Hist. Pl. Pyr. Vol. II, p. 432 p. p. (1813) — *St. Amans* Fl. Agen., p. 304 p. p. (1821) — ? *Maratti* Fl. Rom. Vol. II, p. 153, p. p. (1822) — *Gaud.* Fl. Helv. Vol. IV, p. 578 (1829) — *Richter* Cod. Bot. Linn., p. 742 p. p. (1835) — *Gaud.* Syn. Fl. Helv., p. 628 (1836) — *Gren. Godr.* Fl. de Fr. Vol. I, p. 417 p. p. (1848).

GLYCIRRHIZUM *Bertol.* Fl. Ital. Vol. VIII, p. 101 (1850).

Generalità sulla Sezione

I.

Il vocabolo " **Lupinaster** „ venne introdotto nel 1729 dal Buxbaum, il quale credette riconoscere un genere nuovo nella pianta omonima, che allora costituiva da sola il genere stesso.

Sul valore delle ragioni, che indussero il Buxbaum in quest'opinione, sarà detto più avanti. Linnè ricondusse fra i Trifogli questa specie, e, come già si disse nella Prefazione, stando alla definizione del *G. Trifolium,* quale vien data da Tournefort, il **T. Lupinaster** non dovrebbe venirne tolto, salvo a giustificare a più forte ragione i generi fondati dal Presl a spese delle specie Linneane. Linnè ascrisse il **T. Lupinaster** alla sua Sezione " *Lotoidea* „ caratterizzata dalla frase: " Leguminibus " tectis polyspermis „. È ovvio il capire come una caratteristica tanto ampia potesse e dovesse comprendere una quantità di specie disparatissime per naturale affinità.

Moltissimi Autori accettarono la classificazione Linneana come si rileva dalla sinonimia più sopra esposta.

Moench (l. c.) tornò a sua volta a ritogliere il **T. Lupinaster** dai Trifogli e ricostituì il genere omonimo colle seguenti diagnosi:

" Calyx campanulatus, quinquedentatus dentibus setaceis, quatuor sub vexillo; " imo sub carina. Corolla papilionacea, vexillo ovato longiori: alae erectae oblongae, " carina obtusa. Stamina decem ad medium usque connata, supremum liberum. Stylus " unus. Stigma uncinatum. Legumen enode, teres, polyspermum „. Buxbaum Acta (1) 2. p. 345, Tab. 20.

Persoon (l. c.) ritenne la classificazione di Moench mutando il nome del genere in quello di " Pentaphyllon „, cambiato dipoi in " Pentaphyllum „ da Sprengel, il quale riunisce in questo gruppo due specie: **T. Lupinaster** e *T. megacephalum* Nutt. pianta americana che, a giudicare dalla descrizione, non deve appartenere alla stirpe del **T. Lupinaster.**

Da Link e Seringe in poi, il nome " **Lupinaster** „ fu adottato per stabilire una Sezione alla quale si riunirono, a seconda dei diversi Autori, molte altre specie più o meno eterogenee, ma nella quale si comprende sempre il *T. alpinum.* Gli

---

(1) Giova qui notare come Mœnch nella caratteristica del Genere citi il Buxbaum, ma non si riporti per nulla alla descrizione del Buxbaum stesso, aggiungendo anzi altre note molto discutibili e certo meno valide di quelle date da Buxbaum. — Nella citazione poi, Mœnch scrive: " Buxbaum *Acta* etc. „. Ora non esistono del Buxbaum *Acta* di sorta, ma è quasi certo che Mœnch ha copiato senz'altro la citazione Linneana del *T. Lupinaster* (vedi Richter, " Cod. Bot. Linn. „, p. 742), cioè: " Ac., 2, p. 345 „, interpretando l'abbreviazione *Ac.* per *Acta,* mentre significa " Academia „ (Vedi più avanti la citazione testuale della frase di Buxbaum a pag. 250.

Autori che si servirono del vocabolo " **Lupinaster** „ per stabilire le loro Sezioni, variarono tutti qual più qual meno la caratteristica del Buxbaum, adattandola naturalmente alle specie che vollero includervi, citando spesso il Moench ciò che è poco corretto e poco chiaro.

Seringe p. e. riunì nella Sezione **Lupinaster** (Moench) il *T. Gussoni* (Chronosemium), il *T. uniflorum* il *T. involucratum*, etc. La stessa osservazione vale per Presl. etc. etc.

Bertoloni trovò un nuovo vocabolo per caratterizzare la Sezione alla quale ascrisse il solo *T. alpinum,* e secondo me questa sarebbe la denominazione più adatta a raggruppare in un'ampia Sezione non solo i **Lupinaster** degli Autori in generale, ma anche molte specie ascritte al genere *Loxospermum* di Hochstetter.

La frase semplicissima di Bertoloni per la sua Sezione *Glycirrhizum* suona così: " Capitulis fructiferis umbellaribus, involucro brevissimo, connato, flore magno „.

Verrà detto più avanti e già fu ripetuto altra volta (Vedi *Saggio Monografico " Lagopus „* Mem. Accad. Sc. in Prefazione) come la *Sezione* rappresenti per noi non una circoscrizione naturale, ma un raggruppamento artificiale, fatto per comodo di tassonomia, e basato su pochi od anche su di un solo carattere, preso convenzionalmente ed artifiziosamente. E tali sono la maggior parte delle Sezioni oggidì stabilite nel genere *Trifolium.* Gli è perciò che io avrei adottato senz'altro il nome *Glycirrhizum* per questa Sezione se veramente, il carattere " capitulis fructiferis " umbellaribus „ non convenisse male al **T. Lupinaster**, il quale ha un'infiorescenza tutt'altro che ombrelliforme. Ho invece adottato in senso ampiissimo la denominazione di Buxbaum, perchè anche il gruppo del *T. alpinum,* per quanto naturalmente distante dal **T. Lupinaster**, può esservi artificialmente compreso, ritenendo che le sue foglie, di solito trifogliolate, sono rarissimamente quinate, ma certamente digitate. Quello che importa a me di stabilire si è, che nell'ambito di questa Sezione così accettata ed affatto artificiale, sono riconoscibili facilissimamente dei nuclei naturalissimi, delle vere " *Stirpes* „ nel nostro significato.

Le osservazioni che qui seguono permetteranno, spero, di giustificare la separazione della Sezione **Lupinaster** in due *Stirpes:* l'una rappresentata (per quanto io mi sappia) dalla specie omonima e dal *T. eximium* Steph., cioè la Stirps **Eulupinaster**; la seconda che ha per capo il *T. alpinum* L. e comprende *T. polyphyllum* C. A. Meyer e *T. nanum* Torr., e porta il nome di **Glycirrhizum** già adottato dal Bertoloni pel *T. alpinum.* Sono da escludere assolutamente da questa Stirps le specie africane *T. calocephalum* Fresen., *T. Schimperi* Hochst. e *T. multinerve* Hochst. appartenenti alla Sezione *Loxospermum* Hochst., le quali artificialmente potrebbero venir comprese nella circoscrizione Bertoloniana, stando a quella caratteristica, ma che hanno d'uopo di ulteriori studii.

II.

Buxbaum (1) stabilì come segue il suo genere **Lupinaster** " Nova Plantarum " genera „ — " Secundum genus plantarum novum a nobis appellatur **Lupinaster** " cujus notae sunt: Folia instar Lupini digitata: Flores papilionacei in capitulum " longo petiolo ex foliorum alis egresso sustentatum congesti; siliquae longae de- " pressae, seminibus reniformibus foetae, quae notae ipsum a congeneribus satis " evidenter separant „.

E più avanti: (**T. Lupinaster**):

" Caules profert hic **Lupinaster** semipede altiores non raro pedales rotundos " et striatos virides, parvis ramis ex alis foliorum egredientibus praeditos. Folia " longa, acute serrata glauca non tamen hirsuta, eleganter striata et rigida. Quinque, " sex, septem imo plura digitatim instar foliorum Lupini communi insident pediculo, " brevi, ex vagina sublutea, caulem amplectente prodeunte. In summo caule et " ramulis nascuntur flores purpureo-coerulei, in capitulum collecti, exacte flores " *Trifolii* (Psoralea) *bituminosi* referentes, pediculis uncialibus aut longioribus su- " stentati et calyce in multa segmenta acuta scisso excepti. Siliquae longae, depressae " seminibus reniformibus, nigris, repletae. Crescit haec elegans planta ad ripas Volgae " intra Astrakanum et Czarizinam: ob similitudinem cum Lupino hoc nomen imponere " placuit „.

Savi nella " Biblioteca italiana „ (l. c.) (2) ha una nota critica accuratissima su questa separazione del **T. Lupinaster** dal *G. Trifolium* fatta dal Buxbaum, che io riporto per intero, anche perchè il libro non è troppo facile a trovarsi nelle biblioteche, ma soprattutto perchè se le argomentazioni del Savi non lasciano dubbio, che questa pianta debba, pei caratteri dati da Moench (ed anche da Buxbaum) rientrare nel *G. Trifolium,* ci permettono d'altra parte di dimostrare coll'esame accurato di essa, che il **T. Lupinaster** costituisce una *Stirps* evidentissima, la quale non ha, per quanto io mi sappia, altro stretto affine che il *T. eximium* Steph. dell'Asia centrale ed orientale.

Così scrive Savi: (**T. Lupinaster**).

" Mancava questa bella specie nella mia memoria su i trifogli, ove deve collo- " carsi nella quarta Sezione (Trifoliis bracteatis calyce immutato nervoso, corolla " immutata, vexillo non sulcato) (3). L'ho avuta in fiore per la prima volta nel " corrente anno 1817 ed eccone la descrizione:

---

(1) " Commentarii Academiae Scient. Imperialis Petropolitanae „, tom. II, p. 345 (1729); Petropoli, Typis Academ.), cum tab. XX (optima).

(2) " Biblioteca italiana ossia Giornale di Letteratura, Scienze ed Arti compilato da varii letterati „, tomo VIII, anno II (ottobre-novembre-dicembre), 1817 (Milano). Memoria contenente alcune correzioni ed aggiunte alle *Observationes in varias Trifoliorum species* del sig. Savi, Professore di Botanica e Direttore del Giardino dell'Università di Pisa (p. 132).

(3) Comprende le " Amorie „, il *T. parviflorum, T. montanum, T. alpinum, T. formosum.*

" (**T. Lupinaster**, caule erecto, solido, foliis 3-5natis, involucris monophyllis Nob.) „.

" (T. Capitulis dimidiatis foliis quinatis, sessilibus, leguminibus polyspermis
" Lin. Spec.) „.

" (T. Leguminibus polyspermis, foliis pluribus Gmel. Fl. Sibir. Tom. V. Tab. 19,
" pag. 19, tab. 6, fig. 1 (mala).)

" Caulis 8-10 pollicaris, cylindricus, glaber superne tantum laeviter pubescens
" et ramosus — *Folia* sessilia, prima ternata, reliqua quinata — *Foliola* lanceolata,
" acuta serrulata, glabra. *Stipulae* connatae, glabrae nervosae, caudis triangulo =
" acutis — *Capitula* terminalia *dimidiata, subbifida* ex 2-3florum seriebus, quavis
" serie basi involucro monophyllo brevissimo crenulato instructa — *Flores* 4-5 lineas
" longi pedicellati — *Calyx* subconicus, nervosus, pilosus, dentibus subulatis, elongatis,
" 2 superioribus brevioribus, inferiore longiore. — *Corolla* calyce 3-plo longior alba, vel
" rosea, exsiccatione immutata, persistens *Vexillum* lanceolatum, obtusum, laeve, apice
" vix emarginatum, subreflexum — *Alae* lanceolato-obtusae — *Stylus* apice reflexo-
" uncinatus — *Legumen* corolla persistente tectum, 3-4 lineas longum, compressum,
" torulosum, lanceolatum, superna parte marginatum, ad summum tetraspermum.
" Perenn. „.

Moench credè di dover stabilire un nuovo genere con questo trifoglio, e, riducendo generico il nome triviale di Linnè, lo chiamò **Lupinaster pentaphyllus** — Persoon poi, cui pure parve che convenisse un'innovazione rapporto al genere, ma cui non piacque il nome adoperato, si servì del nome triviale di Moench come di nome generico, e viceversa chiamandolo **Pentaphyllon Lupinaster**. I caratteri assegnati a questo genere *Pentaphyllon* o *Lupinaster* sono: " Calyx campanulatus 5-den-
" tatus, dentibus setaceis, uno sub carina. Stigma uncinatum. Legumen enode teres,
" polyspermum „.

Ma questi caratteri a me non sembrano abbastanza validi per costituire un genere nuovo perchè: 1° il calice non è in nulla diverso da quello degli altri trifogli — 2° lo stimma è vero che è fortemente uncinato, ma si arriva a questo grado insensibilmente passando per molte specie, cosicchè trovasi alquanto curvo nel *T. elegans* e manifestamente uncinato nel *T. vessiculosum*. Finalmente il legume non è terete ma compresso, e non contiene maggior numero di semi di quel che ne contengano i *T. repens, hybridum* e *angulatum* etc., e in quanto all'essere *enode* non vi è fra i trifogli specie alcuna che l'abbia veramente *nodoso,* e solamente in diversi sonvi delle protuberanze nei posti occupati dai semi, e queste si osservano anche nel legume del **T. Lupinaster.** Avendo la smania di far dei generi nuovi se ne potrebbero far quattro dividendo il *G. Trifolium:* ma l'andamento delle specie ci si oppone: i caratteri si intrecciano; bisognerebbe separare delle piante che per molti rapporti devono stare unite, e ho ben conosciuto, che ne risulterebbero generi meno naturali di quello stabilito da Linneo „.

Fin qui il Savi.

Dalle sue parole risulta altresì, come Egli non conoscesse la nota del Buxbaum e riferisse a Moench la creazione del nuovo genere **Lupinaster.**

Come dicemmo sono ben altri i caratteri che dànno al **T. Lupinaster** una

particolare fisonomia la quale rivela un tipo di pianta tutto suo proprio. Esaminiamoli in breve.

Il **T. Lupinaster** presenta anzitutto un fatto curiosissimo. Esso possiede un caule in parte ipogeo rizomatoso, strisciante e ramificato assai nella porzione sotterranea (pochissimo invece fuori terra). I brevissimi stoloni gemmiformi, che si possono osservare sui vecchi rizomi di un cespo in riposo nella stagione invernale, allorchè hanno raggiunta la lunghezza di un centimetro o poco più (Tav. I, fig. 7 *a*) contengono nel loro interno già formati i rudimenti delle infiorescenze che si svilupperanno di poi. — Queste infiorescenze stanno all'apice del breve cono vegetativo rinchiuso nella gemma ed all'ascella delle due o tre ultime foglie, fra le quali sta l'apice dell'asse vegetativo stesso. Ne consegue che una sezione mediana di un germoglio consistente in un corpicciuolo cilindraceo-conico (Tav. I, fig. 1) lascia vedere come esso sia costituito da un asse brevissimo sul quale si inseriscono in ordine distico le stipole inferiori afille (esterne). Solo le due, o (più di rado), le tre supreme (interne) provviste di foglioline, portano ciascuna alla loro ascella un capolino rudimentale; tutte le altre sono sterili o non dànno che rami fogliferi, in certe circostanze sterili anch'essi. Chiameremo queste produzioni, nel corso di questo lavoro, *gemme ipogee,* per brevità di linguaggio. All'ascella della fogliolina *b* (superiore) sta il capolino *b'* ed all'ascella della fogliolina *a* (inferiore) sta il capolino *a'*. Fra questi due capolini sta l'apice dell'asse caulinare *arrestato di buon ora* nel suo sviluppo e ridotto ad un piccolo tubercolo mammelliforme (1) — I due capolini stanno sulla sezione *laterale* del diagramma e disposti in modo che la porzione superiore del capolino inferiore (più giovane) viene ad adattarsi contro la base del superiore.

Il fatto importante per questa specie è, che per ogni ramo fiorifero proveniente, dal rizoma sotterraneo non si svilupperanno, a vegetazione finita, che uno due o tre capolini, cioè tanti quanti stanno già formati nel piccolo tubercolo gemmiforme iniziale sotterraneo, *tutto all'opposto di quanto succede nella generalità dei Trifogli,* nei quali l'asse di vegetazione va gradatamente svolgendosi per accrescimento *apicale formativo* del caule o dei rami e per ulteriori apici laterali all' ascella delle foglie, che diventeranno rami o peduncoli fiorali. — Questo fatto interessantissimo spiega la singolare struttura definitiva del peduncolo e del capolino del **T. Lupinaster**, come vedremo or ora nella sua *Infiorescenza.*

Esaminato macroscopicamente il capolino del **T. Lupinaster** appare portato da un peduncolo di varia lunghezza, il quale non è cilindrico o quasi, come si osserva nella massima parte dei Trifogli, bensì quasi *semicilindrico,* poichè la sua faccia interna, invece di essere piana, come il richiederebbe un vero corpo semicilindrico, è scanalata, depressa; cosicchè una sezione trasversale di esso (Tav. I, fig. 16) offre una figura irregolarmente semilunare o reniforme. Questa scanalatura (Tav. I, fig. 4 *a*) percorre il peduncolo da cima a fondo, e si fa gradatamente più profonda di mano in mano che si avvicina all'apice del peduncolo stesso. Nella sua porzione suprema il peduncolo

---

(1) Nella figura 1, Tav. I, non precisamente mediana l' apice dell'asse non è visibile. La mancanza di spazio non ci ha permesso di dare il disegno di altri preparati dove esso è evidente, ma dove la posizione reciproca dei capolini non è così ben designata come nella fig. 1. Del resto si capisce come si debba per forza ammettere teoricamente un apice caulinare fra essi.

è dilatato e termina in una specie di ricettacolo foggiato a spatola od a palmetta spatolato-ovata, appiattita (Tav. I, fig. 4 *b*), in modo da presentare rispetto all'asse della pianta due faccie, una esterna e l'altra interna: la prima convessa, la seconda concavo-pianeggiante.

Sulla faccia interna della palmetta sono disposti ordinariamente in più ordini concentrici e più o meno regolarmente verticillati i fiori, involucrati da due serie di brattee saldate a collaretto continuo più o meno denticolato-frangiato (Tav. I, fig. 4 *b*, e 2 *b*). A tutta prima questa infiorescenza si direbbe una cima scorpioide (Tav. I, fig. 2 *b*) avvegnachè i fiori inferiori appajano sempre meno sviluppati graduatamente dei superiori che sono i primi a sbocciare (1). Ma questa falsa apparenza di infiorescenza cimosa è un'illusione, a spiegar la quale occorre, come si disse, ricorrere allo studio della gemma fiorale.

La interessente struttura dell'infiorescenza del **T. Lupinaster** fu descritta in modo molto esatto dal Trecul (2). L'Autore riconobbe già fin d'allora che l'infiorescenza del **T. Lupinaster** è un vero racemo, per quanto la posizione della sua base geometrica corrispondente all'apice organico dell'asse o ricettacolo, la mascheri al punto da farla rassomigliare ad un'infiorescenza cimosa scorpioide.

Il signor Trecul ha studiato nell'infiorescenza del **T. Lupinaster** anche la disposizione ed il decorso dei fasci fibro-vascolari; e basandosi su questi risultati egli trova una nuova conferma della natura di questa infiorescenza. Egli così si esprime: (p. 126): " Si l'on fait une coupe transversale du pédoncule canaliculé on trouve " que les faisceaux fibro-vasculaires y sont isolés les uns des autres, et distribués " autour d'un centre médullaire. Ceux qui sont situés près de la face interne du " pédoncule sont notablement plus faibles que ceux de la face externe: ce sont " aussi ces derniers principalement qui fournissent aux fleurs les vaisseaux qu'ils " renferment. En effet, si l'on examine des coupes longitudinales, on voit les fais- " ceaux de la face externe se prolonger dans les fleurs de la première série, mais, " auparavant ils émettent des ramifications qui se rendent dans les fleurs des séries " subséquentes: et cette division s'opère de manière à produire, d'arrière en avant, " des fascicules de différents degrés. Ces fascicules ou ramifications vasculaires du " premier degré iraient dans les fleurs de la deuxième série: leurs subdivisions se " rendraient dans les fleurs de la troisième etc. Ainsi ces fleurs reçoivent des rami- " fications des faisceaux primitifs d'un degré d'autant plus élevé que ces fleurs sont " insérées plus bas sur l'axe. Les faisceaux de la face interne du pédoncule ne " donnent de vaisseaux qu'aux fleurs les dernières développées. Il est donc bien " évident que le sommet organique de l'inflorescence du **Trifolium Lupinaster** cor- " respond à sa base géométrique ".

L'Autore continua esponendo come dallo sviluppo dell'infiorescenza del **T. Lupinaster** Egli fosse condotto ad applicare erroneamente le stesse norme allo sviluppo

---

(1) A questa disposizione dell'infiorescenza alluse già il Mœnch coll'espressione " *Capitulo dimidiato* ", che trovasi spesso ripetuta dagli autori posteriori. Savi aggiunse le parole " *capitula subbifida* " che noi non comprendiamo bene.

(2) *Note sus l'inflorescence unilatérale du Trifolium Lupinaster* (" Bulletin de la Soc. Bot. de France ", vol. I, p. 125, 1854).

delle foglioline delle foglie pennate e digitate, stabilendo le diverse categorie di sviluppo, ed enunciandole quindi nelle basipete — Oggidì è messo in sodo che il decorso dei fasci può solo in via secondaria servire a stabilire la genesi cronologica delle parti di un organo o di un vegetale, ma che generalmente l'organo stesso prima di ricevere la sua impalcatura, il suo sistema vasale, possiede già la sua forma; ed il sistema meccanico ed il conduttore si adattano, diremo così, ai bisogni dell'organo stesso, seguendo le vicende del suo sviluppo — Comunque sia il Trecul ha perfettamente interpretata secondo, me, la natura dell'infiorescenza del **T. Lupinaster**. Gli è però all'organogenesi dell'infiorescenza stessa che era d'uopo rivolgersi per essere certi della sua natura, e questo studio interessante è stato fatto nel 1876 dal Dutailly (1).

L'Autore divide queste infiorescenze unilaterali in tre gruppi: 1° che comprende le infiorescenze, nelle quali l'unilateralità non si manifesta che per mezzo dello sviluppo tardivo di alcuni fiori, tutti posti dallo stesso lato; 2° nel quale classifica le infiorescenze unilaterali *alla loro base* per aborto d'un certo numero di fiori e normali alla loro parte superiore; 3° nel quale stanno le infiorescenze *realmente unilaterali dalla loro base al loro apice.* Nel primo gruppo starebbero *T. arvense, campestre, pratense, elegans* fra i trifogli e l'*Hyppocrepis comosa.* Nel secondo la *Medicago lupulina* e l'*Anthyllis vulneraria* sono presi quali tipi di queste serie. Il terzo gruppo racchiuderebbe un tipo che avrebbe attinenza coi due precedenti e sarebbe precisamente il **T. Lupinaster**, ed altri tipi secondo l'Autore schiettamente e completamente unilaterali e rappresentati dalle *Vicia* e dai *Lathyrus.*

Mi limiterò a poche osservazioni su questo lavoro, che meriterebbe una disamina molto più diffusa, sia perchè questo non ne sarebbe esattamente il luogo, sia anche perchè, pur essendo esso in massima la conferma della natura racemosa del capolino del **T. Lupinaster**, i punti che mi pajono controversi richiedono uno studio ulteriore su materiali vivi, che al momento non mi sono concessi — Più tardi ed in lavoro a parte riferirò le mie conclusioni in confronto a quelle del Dutailly — Pel momento accennerò solo a poche cose.

Un punto lasciato in oblio tanto nel lavoro del Dutailly come in quello del Trecul più sopra menzionato è quello per me capitale, che cioè le infiorescenze rudimentali del capolino nel **T. Lupinaster** si trovano già racchiuse nelle brevissime gemme ipogee, e che gli internodî supremi che portano le infiorescenze non subiscono che un leggerissimo accrescimento intercalare, venendo così portati all'apice dei cauli evoluti nello stesso stadio di sviluppo o poco più, in cui si trovavano nella gemma ipogea; mentre gli internodî sottostanti accrescono invece rapidissimamente.

Un altro fatto che non ha fermato l'attenzione dell'Autore, e che non è pur meno di grande momento, è che non sempre il ricettacolo fiorale presenta la consueta foggia di palmetta ovata con due faccie, una esterna e l'altra interna, dove stanno inseriti i fiori, ma nelle infiorescenze solitarie è spesso notevole la tendenza del ricettacolo ad assumere una disposizione molto vicina alla orizzontale, ed in questo

(1) *Observations organogéniques sur les infloréscences unilatérales des Légumineuses*, in " Assoc. Franç. pour l'avanc. des Sciences ". Congrès de Clermont Ferrand. Séance du 25 août (1876).

caso la scanalatura del peduncolo è meno accentuata in relazione colla diminuzione della pressione esercitata su di esso dalla stipola del capolino inferiore mancante.

Già abbiamo detto come la disposizione dei capolini e quindi dei relativi peduncoli (nella gemma ipogea) accorciatissimi sia tale, che essi si trovano sempre *laterali* nel diagramma — Questi capolini vengono infine portati in alto dall'accrescimento intercalare rapido degli internodi, come vedremo in appresso, e costituiscono la gemma fiorale. Se esaminiamo una gemma fiorale (1) (Tav. 1, fig. 3) in sezione trasversa si osservano i peduncoli ed i capolini sempre nella posizione laterale del diagramma come erano nella gemma ipogea. Ne consegue che la faccia interna del peduncolo superiore è naturalmente rivolta verso il dorso della stipola che avvolge il capolino inferiore, formando un corpo allungato con margine sottile carenato. Questo capolino a sua volta è rivolto colla sua faccia interna contro il dorso della stipola che avvolge il terzo fiore (quando esiste) o, quando manca, verso la stipola che ravvolge l'apice dell'asse caulinare, che gli è addossato un po' più in basso.

Evidentemente queste produzioni sono soggette ad una compressione mutua. Ora due fatti concorrono qui ad esagerarne gli effetti. Il primo è questo, che le infiorescenze sono racchiuse in uno spazio relativamente strettissimo, e sono compresse dalle pareti resistenti delle stipole afille esteriori, fornite di guaina altissima. Il secondo è, che le stesse infiorescenze debbono star a lungo soggette a questa compressione, perchè, formate di buon ora sul rizoma sotterraneo antico della pianta, non vengono a subire grandi modificazioni, fintantochè l'accrescimento intercalare fortissimo degli internodii sottostanti, che si allungano di molto, e rapidamente, non abbia condotto ciascun caule alla sua definitiva dimensione e statura. Solo allora l'accrescimento avviene negli internodii supremi delle gemme fiorali, le quali sviluppano finalmente dal seno delle enormi stipole allungate e mettono a giorno le loro infiorescenze. In quest'ultima fase soprattutto il peduncolo fiorale soffre una compressione lenta e graduata dal dorso carenato della stipola che avvolge il peduncolo del fiore più giovane (Tav. I, fig. 6) coll' asse abortito, e quivi il peduncolo del fiore sollecitato da due forze di cui l' una lo comprime lateralmente e l' altra tende a spingerlo in alto, subisce una specie di stiramento nel senso della risultante e in proporzione dell'intensità di esse, il quale ha per risultato uno schiacciamento della corrispondente faccia interna. Finalmente il peduncolo fiorale, liberato dalla lunga pressione subìta nell'interno del manicotto stipulare, accresce rapidamente e prende la sua definitiva struttura e dimensione. La compressione esercitata dal capolino inferiore sul superiore e rispettivamente dall'apice dell'asse sull'inferiore, agisce soprattutto sul ricettacolo, appiattendolo ed anche scavandolo. Si capisce quindi che se una superficie orizzontale, dapprima piana, circolare, e portante più ordini concentrici di fiori pedicellati involucrati da due corrispondenti collaretti di brattee membranacee, venga schiacciata gradatamente da uno dei lati e lungo una linea, e sia costretta a svilupparsi lentamente in queste condizioni, si capisce, dico, come questa superficie debba poco a poco dilatarsi nel punto opposto a quello dove la schiacciatura è stata più forte e dove non è impedita di svilupparsi ed assumere una forma più o meno rotonda. I tessuti spinti verso il centro dell'organo debbono arrestarsi nel loro sviluppo,

---

(1) La fig. 3 della tav. I dovrebbe essere girata di 90′ sul piano per avere la sua giusta posizione.

e quindi anche i fiori e le brattee inferiori corrispondenti a questo punto compresso devono abortire. E difatti lo studio anatomico del peduncolo fiorale (che qui non è il luogo di riferire per disteso ma che sarà dato altrove) (Tav. 1, fig. 16 e 16^{bis}) rivela una modificazione profonda degli elementi istologici della parte compressa. Il capolino del **T. Lupinaster** appare quindi realmente come *dimezzato,* e la sua forma di cima scorpioide non è che una falsa apparenza, mentre siamo qui di faccia ad una vera infiorescenza racemosa, anormale e larvata. Un'attenta osservazione del capolino concede di vedere alla base del ricettacolo e lungo i margini della scanalatura del peduncolo numerosi fiori tabescenti, piccolissimi, biancastri, lunghi talvolta appena un millimetro, ai quali fanno seguito dal basso all'alto altri fiori gradatamente più sviluppati, finchè si giunge ai supremi sviluppatissimi. L'apice organico del capolino è dunque spostato in basso per la compressione laterale subìta, il capolino ha sofferto una specie di torsione nel senso verticale che gli ha dato la forma di cima scorpioide e questa è, secondo me, la ragione per cui i fiori si sviluppano nell'ordine preciso che venne descritto dal Dutailly.

I cingoli membranacei dei capolini nel punto in cui subirono il prolungato schiacciamento o sono affatto abortiti ovvero sono ridotti a piccolissime squamule quasi fibrilloidi; perciò non è sempre facile in quel punto del ricettacolo l'osservare i rapporti ordinarii di posizione fra bratteola e pedicello fiorale. Spesso si vedono pedicelli apparentemente extra-bratteali nudi e talora anche inseriti al disotto di qualche squamula senza ordine visibile.

Tutto questo spostamento di una disposizione che sarebbe regolarissima in un ricettacolo normalmente sviluppato (per es. nel *T. alpinum*) è dovuto al fatto della compressione suaccennata. Nella porzione superiore della superficie d'inserzione dei fiori essi stanno più o meno regolarmente inseriti in due o più ordini concentrici ravvolte dal collaretto di bratteole. Una prova indiretta degli effetti della compressione in discorso l'abbiamo nel fatto, che alloraquando in luogo di due o tre capolini per ogni ramo fiorifero (caule) se ne sviluppa uno solo (già solitario fin dalla gemma sotterranea) allora questo capolino mostra un peduncolo molto meno scanalato inferiormente, e la porzione sua suprema che serve di ricettacolo ai fiori è meno schiacciata nel senso laterale tendendo a rialzarsi nel piano orizzontale; in questo raro caso i due ordini di brattee sono disposte quasi normalmente cioè verticali, e la porzione corrispondente allo schiacciamento è frastagliata ma non affatto soppressa (Tav. I, Fig. 5). Anche i fiori sono allora più normalmente sviluppati ed il capolino assume la forma tendente all'emisferica, lassa, avvicinandosi a quella delle Amorie. La diminuita compressione è occasionata in questo caso dalla mancanza del corpo costituito dal capolino inferiore ravvolto nella stipola, ed il solo capolino che esiste trovasi leggermente compresso alla sua base solo dall'apice dell'asse caulinare tenue in confronto al capolino non esistente.

Abbiamo già detto come i capolini del **T. Lupinaster** stiano già iniziati nella breve gemma ipogèa, ed all'ascella delle foglie supreme, le quali sole nella gemma stessa portano foglioline, mentre le esterne involucranti sono afille o portano gemme rameali. Dicemmo pure come al momento dello sviluppo epigeo di queste produzioni succede un enorme e rapido sviluppo intercalare, che allunga rapidamente l'asse caulinare, originando degli internodii lunghissimi ricoperti in basso dalle stipole afille.

Ora i due o tre internodii supremi determinati dalle foglie fiorifere non partecipano a tutta prima a questo accrescimento subitaneo del caule, ma vengono portati, brevissimi ancora, all'apice del caule, dove costituiscono la gemma fiorale. Più tardi poi l'accrescimento longitudinale colpisce anche questi internodii, ed allora la gemma fiorale si apre e gli internodii si allungano.

Di più è da notare che nel **T. Lupinaster** le sole foglie supreme sono fiorifere, mentre all'ascella delle stipole infime afille o delle susseguenti fogliute non si originano mai, in grazia di un'evoluzione posteriore di gemme, salvo casi eccezionali, peduncoli fiorali e ben di rado rami secondarii (Vedi pag. 260).

Invece, per es., nella *Stirps* del *T. alpinum* gli scapi fioriferi solitarii sono portati all'ascella delle foglie inferiori dei rami brevissimi, mentre l'apice del ramo seguita a crescere indefinitamente, arrestandosi solo nell'inverno, e sviluppando nuove foglie apicali, delle quali le supreme non portano infiorescenze ascellari. Questa struttura fiorale del **T. Lupinaster**, finora non studiata per quanto io mi sappia, potrebbe ben essere dipendente dalle condizioni di vegetazione alle quali la specie è sottoposta, data la sua ubicazione nelle alte latitudini (Siberia, Circolo polare (*Sommier*)). Avviene forse del **T. Lupinaster** quello che succede alle piante crescenti in livelli altimetrici elevatissimi, nelle quali, come è noto si possono trovare già formati nelle gemme degli organi che, in altri vegetali posti in condizioni più favorevoli, si sviluppano molto più tardi per graduale evoluzione di speciali meristemi. Così è del **T. Lupinaster**. Tutto il lavorìo di formazione dei capolini avviene sotterra allorchè il rizoma ipogeo organizza le piccole produzioni gemmiformi, che si svilupperanno di poi in altrettanti cauli fioriferi. Nel *T. alpinum* che è precisamente pianta delle regioni elevate delle alpi e nei suoi affini, ha luogo un fatto analogo, sotto il rapporto biologico quantunque differisca sostanzialmente dal lato morfologico da questo del **T. Lupinaster**. A suo luogo ne terremo parola (Vedi *T. alpinum. Generalità*). È qui il caso di ricordare come anche nel **T. Lupinaster** le infiorescenze per quanto apicali ed apparentemente terminali, siano affatto ascellari. Alcuni Autori (Moench, Savi, ecc.) ascrissero al **T. Lupinaster** infiorescenze o peduncoli terminali, le quali teoricamente non possono esistere neppure nel senso dato loro dal Celakowsky (Vedi Celak. Oesterr. *Bot. Zeitscrf.*, l. c., p. 77).

Un altro carattere, non proprio esclusivamente del **T. Lupinaster**, perchè si osserva in altre poche specie europee ed africane, è la mancanza assoluta del picciuolo, esistente invece, ed anzi sviluppatissimo, nelle specie che gli Autori vogliono riunire al **T. Lupinaster** in sezione (*T. alpinum, polyphyllum,* ecc.).

Le foglioline del **T. Lupinaster** hanno delle denticulature marginali a denti ricurvi che finiscono in un'appendice uncinata cornea, simili assai a quelle del *T. rubens* e del *T. montanum* (1), ma assai più robuste. Nel gruppo del *T. alpinum* le foglioline hanno invece denticulature subnulle. La mancanza delle foglioline nelle stipole inferiori del **T. Lupinaster** non è un carattere speciale ad esso, ma, come

---

(1) Reichenbach, *Fl. exc.*, l. c., riunisce nella sez. *Lupinaster*, col *T. alpinum* il *T. montanum* che egli ritiene quale anello di congiunzione fra la sez. *Lupinaster* e la sez. *Micrantheum*. È indubbio che il *T. montanum* ha una lontana analogia col *T. Lupinaster* soprattutto per l'ovario villoso e per la forma delle foglioline. È però altrettanto certo che appartiene per noi a tutt'altra *Stirps*.

è noto, è comune a tutte quelle piante, nelle quali, esistendo un rizoma sotterraneo la funzione assimilatrice del lembo è abolita. Però nel caso nostro questo carattere diventa un valido diagnostico nella ricognizione della *Stirps*, quando si voglia paragonare al gruppo del **T. Lupinaster** quello che comprende il *T. alpinum*, *polyphyllum*, ecc.

Il calice del **T. Lupinaster** non offre in massima particolarità che possa giustificare la sua separazione dal *G. Trifolium*, come pretendeva il Mœnch; se si volesse pesare sopra questo solo carattere le *Galearia* ed i *Trigantheum* potrebbero vantare ben maggiori diritti. Ma se il calice del **T. Lupinaster** è in massima quello di tutti gli altri Trifogli, esso è però tipicamente differenziabile da quello del *T. alpinum* ed affini; soprattutto nelle dimensioni costantemente minori, nella forma della fauce tagliata obliquamente a spese del labbro superiore; nei rapporti di lunghezza fra tubo e denti, nella disposizione delle nervature dentali, nella forma dei denti e dei seni interdentali; e finalmente anche nell'indumento che nel gruppo del *T. alpinum* manca completamente (all'infuori delle produzioni glanduloso-clavate comuni a tutti i Trifogli). L'ovario del **T. Lupinaster** contiene costantemente 4 o più ovoli ed è villoso superiormente, quello del *T. alpinum* costantemente due, ed è perfettamente glabro.

Molto simile invece è la struttura e la forma del vessillo nel **T. Lupinaster** e nel gruppo del *T. alpinum* e, per dirla in breve, anche in tutti i *Loxospermum;* cosicchè sotto questo rapporto si potrebbe benissimo riunirli in un gruppo molto grande, caratterizzato dal diametro longitudinale grandissimo del vessillo, fornito di nervature percorrenti in parte la lamina per intero, ripetutamente biforcate e riunite in basso in pochi fasci non molto robusti. Tutte queste specie a grandi fiori presentano ancora altri caratteri nel vessillo abbastanza notevoli; tali per es. quello di mancare della strozzatura fra lembo ed unghia, così caratteristico nelle *Amorie* (ed anche nei *Lagopus*); di essere foggiati un po' a barchetta nella porzione infima corrispondente all'unghia, e finalmente di essere quasi affatto liberi dagli altri petali salvo per un brevissimo cercine basilare. Questo carattere però è comune anche alle *Amorie*. Si può ancora far cenno qui del modo costante di comportarsi di questi grandi vessilli, i quali prima e dopo l'antesi sono affatto deflessi sul resto dei petali che avvolgono completamente, mentre all'epoca della fecondazione si rialzano alquanto anteriormente, ma non così esageratamente come nelle *Amorie,* dove questo fatto pare anche in relazione colla strozzatura del vessillo stesso. Il vessillo persiste a lungo accartocciato sul legume assieme agli altri petali e prende una consistenza quasi scariosa.

Fra i caratteri che indussero il Mœnch a stralciare dal *G. Trifolium* il **T. Lupinaster** troviamo anche quello dello stilo uncinato. Su questo punto siamo perfettamente d'accordo colle osservazioni di Savi più sopra citate. Ma d'altra parte è anche vero che il **T. Lupinaster** ha uno stilo diversamente foggiato da quello del *T. alpinum* ed affini. Anzitutto lo stilo della prima specie è evidentemente molto più curvo alla sua estremità stigmatifera, ma per di più presenta due schiacciature in due sensi opposti, che nel *T. alpinum* mancano. Nella sua porzione basilare, che continua colla sutura ventrale, lo stilo del **T. Lupinaster** è abbastanza compresso nel senso antero-posteriore, mentre la porzione superiore uncinata è schiacciata nel senso

trasversale. Le papille stigmatiche sono portate specialmente sulla faccia inferiore dello stimma la quale in grazia della curva diventa superiore, ma sono impiantate anche sulla vera faccia superiore ed all' apice dello stigma, che si può senza tema di errare chiamare *a bottoncino schiacciato* (1). Lo stilo del *T. alpinum* è affatto cilindrico, va gradatamente assottigliandosi a guisa di lesina ed ha una superficie stigmatica molto meno sviluppata. Sotto questo riguardo si avvicina anche alle *Amorie,* nelle quali però lo stilo grosso e cilindrico alla base non è così assottigliato superiormente dove va a terminare con una grossa capocchia stigmatifera.

Un'altra particolarità da non passare sotto silenzio nel **T. Lupinaster** e che pare in relazione col suo modo di vegetare è questa: sezionando longitudinalmente una delle gemme ipogee del suo rizoma sotterraneo si scorgono all'apice dell'asse caulinare breve e tutto intorno alle infiorescenze rudimentali ivi contenute dei numerosissimi peli clavato-pedicellati di cui altrove già parlammo, trattando cioè delle *Galearie* e dei *Trigantheum*. Queste produzioni comuni a tutti i Trifogli (2) stanno abborracciate nella cavità formata dalle foglioline giovanissime, che contornano la gemmula fiorale, sui calici appena abbozzati, sui margini delle stipole, ecc. e sono così numerose da formare una specie di turacciolo, che riempie questa cavità costituita dalle stipole ricurve a volta sulla piccola infiorescenza. I margini delle giovanissime foglioline appartenenti ai due o tre internodii superiori della gemma ipogea, sono guernite altresì di numerosi peli flagelliformi, lunghi, denticulati per ingrossamenti dovuti ad ossalato calcico.

A giudicare dal loro numero stragrande, dal posto dove si originano e dal fatto che esse vanno diminuendo di mano in mano che l'infiorescenza si sviluppa, non essendo esse più reperibili che sul calice (spesso dentro e fuori), non ci pare soverchio ardimento il supporre in esse un ufficio di protezione delle gemme e degli organi fiorali giovani. Queste produzioni si trovano nella pianta adulta sparse anche sulle stipole, più di rado sulle foglie e sul caule, e la loro diminuzione in confronto alla frequenza loro nella gemma, è dovuta anzitutto a ciò, che non formandosene altre col crescere della pianta e del tessuto del calice e delle stipole, esse debbono naturalmente parer diminuite di numero in ragion diretta dell'aumento delle superficie; di più esse sono facilmente caduche. Spesso non sono visibili anche al microscopio se la preparazione non è trattata previamente con una soluzione alcoolica od acquoso di jodio. In nessun trifoglio però, di quelli da me esaminati finora, io ho potuto trovare una quantità così grande di queste glandule come nel **T. Lupinaster**, anche nell'esame delle gemme fiorali. E se è lecito supporre un nesso immediato di causabilità fra la lunga durata di tempo che corre dalla formazione della gemma ipogea

---

(1) Willkomm e Lange, l. c., p. 353, hanno stabilito una sotto-sezione *Platystilium* nella quale comprendono il solo *T. montanum e varietà*. La caratteristica dice: " Ovarium et legumen..... *in stylum* " *basi latum compressum productum* ". — Questo carattere aggiunto alla villosità dell'ovario di cui gli autori tacciono, ravvicinerebbe fino ad un certo punto la *Stirps* del *T. Lupinaster* sottosezione degli autori sopracitati. — Il *T. montanum* è una specie che necessita uno studio ulteriore perchè la sua posizione nei Trifogli sia nettamente stabilita.

(2) Confronta anche Vuillemin, *La subordination de la feuille dans le Phylum des Anthyllis*, pag. 324, lin. 5 (dall'alto) e fig. 47. Nancy, Impr. Berger-Levrault e C., 1892.

all'espandersi delle infiorescenze, e la necessità di possedere un apparato di protezione contro gli attriti che questa gemma può subire prima che giunga a svolgersi, non parrà soverchiamente fuori luogo la mia supposizione.

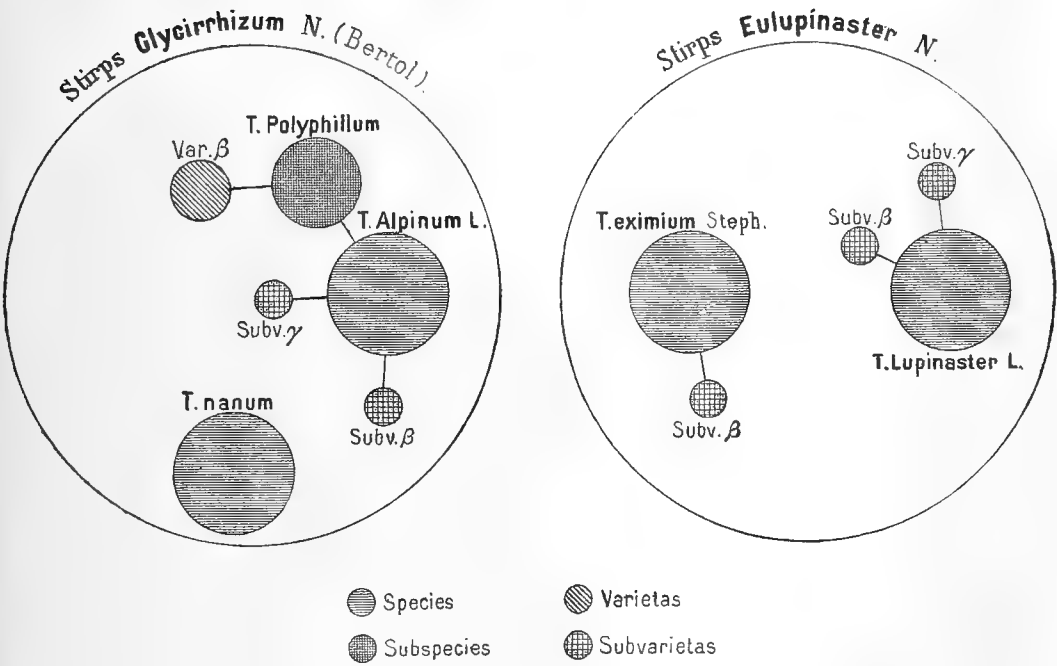
Citerò ancora un altro carattere che mi venne fatto di osservare nella radice del **T. Lupinaster** e che lo allontana sempre più dal gruppo del *T. alpinum.*

I saggi spontanei numerosissimi da me osservati nell'erbario di Berlino, in quello particolare del Prof. Ascherson, dei Sigg. Sommier e Levier e degli Orti Botanici che gentilmente mi fornirono di materiali di studio, mostrano una vera radice tuberizzata, che potrebbe paragonarsi per forma e salve le dimensioni a quella degli *Asphodelus* o delle *Dahlie, Phyteuma,* ecc., però poco ramosa e poco fibrillosa. Invece nel **T. Lupinaster**, che da molti anni si coltiva nel R. Orto Botanico di Torino, si trova sempre una radice fatta di membra obconiche, ramificata assai, ma poco o nulla tuberizzata.

Per ultimo accennerò ancora ad una particolarità che tocca la ramificazione del caule del **T. Lupinaster.** Dissi più sotto che questa specie raramente mostra ramificazioni di 2° ordine nei cauli fioriferi epigei. (Nel rizoma sotterraneo le ramificazioni sono invece numerose). Su questo proposito debbo però accennare ad un fatto che mi occorse ogni qualvolta dovetti servirmi di piante coltivate per studiare le gemme ipogee. Staccando dal rizoma vecchio queste gemme, dopo alcun tempo esso rimetteva altri germogli più sottili, meno ingrossati all'apice (dove di solito stanno le infiorescenze rudimentali) e costantemente sterili, privi di infiorescenze e soltanto fogliferi. Questi rami dopo essersi alquanto allungati emettevano all'ascella delle loro stipole altri rametti di 3° ordine con foglie molto ottuse. Su questi rami nascevano alla loro volta altri rametti di 4° ordine i quali erano tutti provvisti di fiori. Non ho potuto osservare più a lungo questa alternanza consecutiva di rami fogliferi e fioriferi, che però si osserva spesso in molti altri vegetali (*Pomacee, Ampelidee,* ecc.). Ma il curioso è che questi rametti invece di crescere fra il caule e la stipola un po' obliquamente all'asse generatore, perforavano la stipola e crescevano quasi perpendicolari all'asse generatore, lasciando la stipola fra loro e l'asse stesso.

Riassumendo tutte queste osservazioni e tenuto anche conto della *facies* generale del **T. Lupinaster** ci riesce impossibile di riunire il **T. Lupinaster** alla *Stirps* del *T. alpinum.* E secondo noi se è da lodare nel Savi la sua esitazione a crear nuovi generi, esitazione che noi dividiamo del tutto in ragion diretta delle difficoltà che le nuove vedute sulla tassonomia hanno create nel limitare il concetto generico, non si può per altro soverchiamente biasimare il Buxbaum, allorchè credette di riconoscere nel **T. Lupinaster** un tipo differente per struttura dai Trifogli Tournefortiani e Linneani.

DIMOSTRAZIONE GRAFICA

DELLE *Stirpes,* CONTENUTE NELLA SEZIONE **Lupinaster.**

STIRPS Ia.

EULUPINASTER Nob.

Caract. — « *Caules initio hypogaei, rhyzomatosi, e gemmis apogeotropicis (sensu Darwiniano) (1) prodeuntes, et inflorescentias rudimentales apice gemmarum inclusas gerentes. — Stipulæ rhyzomatis et inferiores caulorum epigeorum aphyllae: superiores caulis tri- quinque- septem- novem foliolatae* » Nob.

Hujus stirpis: **T. Lupinaster** L. — **T. eximium** Steph.

Species 1a.

T. Lupinaster, L.

L. Sp. pl., ed. IIIa, p. 1079 (1764), et Sist. Veg. (14 ediz. Murray), p. 687 (1784) — *Thunbg.* Fl. Japon., p. 290 (1784) — *Willd.* Sp. pl. Vol. III, p. 1357 (1800) — *Schkuhr* Bot. Handb. Vol. II, p. 402 (1805) — *Ait.* Hort. Kew. Vol. IV, p. 381 (1812) — *Sibth.* et *Sm.* Fl. Græc. Prod. Vol. II, p. 95 (1813) — *Savi* Bibliot. Ital. Vol. VIII, p. 132 (1817) — *Link* Enum. R. H. B. Berol. Vol. II, p. 260 (1822) — *Maratti* Fl. Rom. Vol. II, pag. 153 (1822)? (2) — *Savi* Bot. Etr. Vol. IV, p. 47, N. 496 (1825) — *Ser.* in DC. Prod. Vol. II, p. 204 (1825) — *Ledeb.*, C. A. *Meyer* et *Bunge* Fl. Alt. Vol. III, p. 258 (1831) — *Lessing* Fl. Sud Ural u. stepp. in Linnaea, Vol. IX, p. 154, 157 (1834) — *Richter* Cod. Bot. Linn., p. 742 (1835) — *Ledeb.* Fl. Ross. Vol. I, p. 551 (1842) — *Griseb.* Spicil. Fl. Rumel. Vol. I, p. 8 (1843) — *Dietrich* Syn. pl. Sez. IV, p. 1003 (1847) — *Nyman* Syll. Fl. Europ., p. 296 (1854-55) — *Aschers.* Beitr. Fl. nordöst. Deutschl. in Linnaea, Vol. XXX, p. 504 (1859-60) — *Reichbch.* fil. Icon. Fl. Germ. et Helv. Vol. XXII, p. 74 (1874) — *Celak.* Ueb. Aufb. der Gatt. Trifolium in Oesterr. Bot. Zeitschf., N. 2, p. 42 et seq. (1874) — *Nyman* Consp. Fl. Europ., p. 179 (1878-82) — *Koch* Taschbch. der Deutsch. u. Schw. Fl., ediz. 2a, p. 521 (1878) — *Garcke* Fl. von Deutschl., p. 96 (1878) — *Janka* Trifol. Lot. Europ., p. 154 (1884) — *Schlchtdl.* etc Hallier Fl. von Deutschl. Vol. XXIII, p. 275 (1885) — *Garcke* Fl. von Deutschl., 16a ediz., p. 104 (1890).

---

(1) Darwin, *La faculté motrice dans les plantes* (trad. Heckel), Paris, Reinwald, 1882, p. 6.

(2) Vedi la " Distribuzione Geografica del *T. Lupinaster* " a pag. 270.

Lupinaster sp. *Buxbaum,* l. c.

Lupinaster pentaphyllus *Mœnch,* l. c. — Presl. Symb. Bot. Vol. I, p. 47.

Pentaphyllon Lupinaster *Pers.*, l. c.

Pentaphyllum Ammani. Ledeb. Ind. Sem. H. Dorpat, p. 5 (1823).

Pentaphyllum Lupinaster *Spreng.*, l. c.

Lupinaster purpurascens *Fisch.* (in litt.) sec. Ser. in DC. Prod., l. c.
(Vide quoque in " observationibus „ Auctores ante Linnaeum).

Subvar. β. *albiflorum* Ser. in DC. Prod., l. c. — Ledeb. Fl. Ross., l. c.

Lupinaster albens H. gorenk. (ex Besser in herb. Zeyheri) sec. Ledeb. Fl. Ross., l. c.

Lupinaster albens Fisch. in Herb. R. H. Bot. Berol.

Subvar. γ *obtusifolium* Nob. = T. Lupinaster var. γ oblongifolium Ser. in DC. Prod., l. c.

Icones. — *Buxbaum,* l. c. — Bot. Mag. 22, 879 (Pritzel) — *Gmelin* Fl. Sibir. Tab. 6, fig. 1 — *Martyn* Fl. Rust. t. 16 — *Reichbch.* fil. Icon, l. c., tab. 81 — *Schlchtdl.* etc. *Hallier,* l. c., fig. 2390.

Icon nostra. — Tab. I, fig. 1—16[bis].

" *Pedunculis axillaribus, interno latere profunde canaliculato-sulcatis, in receptaculum dilatatum subovatum, intus excavatum extus plano-convexulum desinentibus. Floribus magnis (12-15 mill. long. usque ad 20), interna facie receptaculi, irregulariter bi-seriato-subverticillatis; pedicello longiusculo villosulo affixis; inferioribus semper minus evolutis, saepe tabescentibus, cymam scorpioidem simulantibus, revera racemosis; quoque verticillo involucro tenui, squamiformi, continuo, interno latere tantum interrupto, denticulato-erosulo, villosulo-ciliato suffultis — Legumine superne villosulo 4-plejospermo, sutura superiori dehiscente vel lateraliter ruptile — Foliolis sessilibus 3, 5, 7, 9-natis, elegantissime nervosis nervis elevatissimis apice cartilagineo sursum verso terminatis* „ Nob. ♃.

Subvar. β " *Floribus albis, foliolis saepius lineari-lanceolatis acutiusculis* „ Nob.

Subvar. γ — " *Foliolis apice obtusis, lato-lanceolatis vel oblongo-obovatis nervis dentibusque obsoletioribus* „ Nob.

Descrizione.

Perenne:

Radice di solito fascicolata subtuberizzata, napiforme (rammenta quella della *Campanula rapunculus,* dei *Phyteuma, Asphodelus,* ecc.) ramificata inferiormente ovvero (nel *T. Lupinaster* coltivato) suddivisa in rami di 2° e 3° ordine gradatamente decrescenti in grossezza fino alle radicelle capillari numerosissime formanti una fitta matassa provvista di numerosissimi grumi a corpuscoli bacteroidi.

Caule cespitoso. Rami molteplici dal colletto, più di rado uno solo dapprima brevissimi, gemmiformi ravvolti dalle stipole afille accavalcantisi, poi gradatamente

arcuato-ascendenti (apogeotropici) e finalmente epigei, allungati, con internodii distanti, cilindrici, glabri o leggermente pubescenti in alto, verdi, o colorati in sanguigno alti fino a 60 cent. semplici, rarissimamente ramificati.

Foglie senza picciuolo. Quelle della porzione ipogea rizomatosa ridotte alla sola stipola, brevi, appressate, tubulose (lineari distese in piano, più o meno guainanti inferiormente, con due brevi orecchiette (code) ottuse od arrotondate, mucronate o no, e cigliate superiormente per peli brevi, rigidi, denticolati le susseguenti dapprima trifoliolate con stipole più allungate, conformi alle precedenti, colorate in verde od in rossigno, membranacee, presto scariose, biancastre, con code triangolari-allungate più o meno ottuse od anche acute, guainanti alla base: le superiori con 5-7 e rarissimamente con 9 foglioline, e con stipole larghe ovato-oblunghe, con guaina alta e con code oltrepassanti la parte adesa, acuminate, glabre, cigliate. — *Foglioline* più verdi sopra, più pallide sotto, inserite direttamente sulla stipola, glabre o villose soltanto di sotto lungo la nervatura mediana, lanceolato-oblunghe, oblungo-lineari o lineari-lanceolate, più di rado (var. γ) obovate, spesso acute, ottusette (var. γ) e raramente acuminate, mucronulate, finissimamente e doppiamente seghettate al margine, con denticulature alternativamente grosse e piccole, terminate in punta cartilaginea ricurva verso l'apice della fogliolina o più di rado con denticoli poco salienti (var. γ); elegantissimamente nervose, con nervi elevati e sporgenti sulla pagina inferiore, specialmente il mediano, fitti, appressati, arcuato-paralleli, pennati, ripetutamente forcati e coi nervi più esili frapposti ai rami della biforcazione.

Infiorescenza. — Peduncoli ascellari del caule e più raramente dei rami (Vedi parte generale) di lunghezza varia e scanalati sulla faccia interna. Capolini dimezzati irregolari, non numerosi (ordinariamente due o tutt'al più tre per ogni caule), più o meno lassi, con 4-5 fiori od un po' compatti (fino a 40 fiori), grandi, vistosi (12 (media 16), 20 millim. lunghezza) (Vedi parte generale); i superiori più sviluppati, gli inferiori man mano più piccoli e gli infimi spesso intristiti. Pedicelli pubescenti o glabriusculi, subeguali al tubo calicino o più brevi, talvolta più lunghi, inseriti talora senza ordine apparente, ma più spesso disposti in due o tre ordini concentrici, salvo in corrispondenza alla scanalatura interna del peduncolo ed all'ascella di squame saldate a collaretto membranaceo-scarioso, crenulato-ondulato, cigliato (costituito da una semplice duplicatura epidermica), spesso colorato in rossigno come i pedicelli ed interrotto pur esso a livello della gronda del peduncolo, od anche ridotte in tal punto a minute squamule o fibrille indistinte, disordinate, ravvolgenti i pedicelli.

Calice campanulato-obconico, tagliato un po' in sbieco dall'alto al basso (a spese del labbro superiore), membranaceo, spesso colorato in rossigno, pubescente per peli un po' crespi esternamente in corrispondenza della fauce ed anche un po' sulla faccia interna alla base dei denti e sugli spazii interdentali parabolici, con dieci nervi, dei quali cinque (dentali) più validi e continuantisi nei denti triangolari-allungati, sottili (subulati) trinervi alla base e poi uninervi con fitte e brevi ciglia al margine e quivi più o meno scariosi, più lunghi del tubo talora il doppio, segnatamente l'inferiore.

Corolla porporino-rosea, massime nella porzione superiore dei petali, pallida inferiormente, ovvero tutta bianca (var. β), seccando subscariosa, persistente a lungo

accartocciata sul legume e finalmente caduca. *Vessillo* quasi libero dagli altri petali connati nell'unghia, obovato o lanceolato-ellittico (disteso in piano), dapprima compiegato sugli altri petali, poi leggermente rialzato anteriormente ed ai lati al momento dell'antesi e finalmente accartocciato di nuovo; lungo il doppio del calice e più; con unghia subnulla, arrotondato all'apice, integro o lievemente smarginato-troncato, mucronulato, ricco di nervature esili, furcate, riunite in pochi fasci più grossi alla base. *Ali* alquanto più brevi del vessillo, irregolarmente lanceolato-obovate, con auricula rostriforme ottusa. *Carene* cultriformi, apiculate e con auricula breve ottusa, subeguali alle ali.

Stami colla porzione concresciuta più lunga assai dei filamenti liberi che sono alternativamente dilatati e no sotto l'inserzione delle antere e il mediano più dilatato di tutti, talora il mediano solo dilatato. Stame vessillare libero, subulato. Antere introrse, dorsifisse, oblungo-ellittiche. Polline grande, globuloso, con tre pori di deiscenza.

Ovario irregolarmente fusiforme, stipitato, poliovulato, glabro dovunque salvo anteriormente sulla sutura ventrale, dove è fornito di due serie di finissimi villi prolungantisi spesso fino ai $^3/_4$ della lunghezza dello stilo, rarissimamente con qualche villo sparso; stilo un po' schiacciato nel senso antero-posteriore alla sua origine, poi cilindrico, e finalmente schiacciato lateralmente in alto nella porzione ricurva stigmatifera. Stimma a bottoncino, dorso-ventrale.

Legume brevemente stipitato, lineare, oblungo, membranaceo, glabro salvo che superiormente sulla sutura ventrale lungo i margini, dove conserva i villi già accennati sull'ovario; leggerissimamente venuloso-reticolato sulle pareti, deiscente sulla sutura ventrale e contemporaneamente per rottura delle faccie. Semi (4 (media 5), 8, 10) globuloso-cordiformi, compressi, verdognoli, lisci, disposti colla loro faccia perpendicolarmente all'asse longitudinale del legume. Cotiledoni accumbenti: radichetta discretamente prominente.

Letteratura e Critica.

Fra i pochi Autori anteriori a Linné che si occuparono del **T. Lupinaster**, citerò Gmelin (1), che lo descrisse e figurò assai bene. A sua volta questo Botanico si riferisce ad un " Trifolium montanum purpureum folio obtuse crenato " di Bauhino (Pin.), il qual carattere non ci pare molto spiccato nel **T. Lupinaster**. Ma, al solito, è difficile dire se Bauhino alludesse veramente al **T. Lupinaster** con quella frase. Trascrivo qui sotto la descrizione dello Gmelin, la quale tien conto di molte particolarità del **T. Lupinaster**, tralasciate dagli Autori moderni:

" Radix crassiuscula, intus alba, foris fusca, *asphodeli ramosi* non multum absi-
" milis; caules ex ea plures, septem vel octo geniculis distincti a quibus stipulae
" vaginantes prodeunt foliola emittentes lanceolata serrulata, primordialia terna, se-
" quentia quina, rarissime *sena,* magnitudine inequalia, vigente planta utrinque vi-
" ridia breui pediculo insidentia.

(1) D. Ioh. Georg. Gmelin, *Flora sibirica*, t. IV (Petropoli), 1769, pag. 19, n. 27.

" Flores capitati *terminales*, nec infrequenter ad caules copiosi. Calycis tubus " breuis quinquedentatus, dentibus tribus, inferioribus longitudine fere carinae, supe- " rioribus brevioribus. Alae et carinae infra cum filamentis novemfidis coalitae; " corolla persistens vel *purpurea* vel *alba;* legumen calyce longius, polyspermum. " Capitula longe pedunculata sunt, situs (1) nonnumquam ut caulis in fastigio prae- " longetur atque capitulum protrudat maiori florum numero compositum.

" In omnibus Sibiriae montosis locis, praesertim in rupibus inter *Ieniseam* et *Kras-* " *nojaricum* urbes, circa Irkutiam usque ad mare orientale occurrit. Ammannus habet " et Baskirorum regionibus ab Heinzelmanno adlatum quoque fuisse.

" Sub initium mensis Iuni floret, atque sub medium Augusti semina sua perficit „.

Pare che questo Autore abbia osservato qualche cosa di anormale nel capolino del **T. Lupinaster**; devo però confessare che io non posso comprendere il significato della frase: " ...ut caulis in fastigio praelongetur atque capitulum protrudat " majori florum numero compositum. „ La curiosa disposizione dei fiori nel capolino del **T. Lupinaster**, oltrechè da Linné e da' suoi predecessori, è stata notata da altri. Schkuhr, l. c., scriveva: " **T. Lupinaster**... *mit getheilten Blumenköpfchen* „; Koch e Garcke, l. c.: " *Dolden einseitig* „; Reichenbach (fil) accennò solo ed unico alla curiosa conformazione del collaretto adattantesi al ricettacolo foggiato a palmetta colla frase " *involucro semicupulari* „.

Non mi fu concesso di vedere le descrizioni o le frasi degli Autori di Flore Russe (eccettuate le citate) o di coloro che scrissero sul **T. Lupinaster** raccolto nei viaggi, quali Iundzill, Eichwald, Pallas, Besser, Fisch, Georgi, Lepechin, Falk, Claus, Goebel, Turczaninow, ecc.

Non posso passar sotto silenzio come Presl nella caratteristica della sezione **Lupinaster** scriva: " herbae humiles „ e " vexillo non nervoso-plicato „, due caratteri che non si confanno col **T. Lupinaster** da lui riunito in questa sezione con altre specie non legate per naturale affinità, come già si è detto. Aggiunge il Presl che il nome **Lupinaster** dato da Moench a questa sezione deve essere conservato, quantunque vi si includano altre specie: " Nomen Moenchi servandum „. Ma Presl non dice il perchè. Secondo me invece si dovrebbe dire anzitutto: " Nomen Buxbau- " mii servandum „, e, del resto, a giudicare dai caratteri di Moench, il genere **Lupinaster** dovrebbe scomparire.

Dalla descrizione dello Gmelin appare come la varietà a fiori bianchi fosse già fin da tempi remotissimi conosciuta. La descrizione di Buxbaum accenna nel suo tipo a corolle porporine, ma è probabile che anche la var. *albiflora* sia altrettanto espansa nel suo luogo natale. Nell'Erbario del Museo Imperiale di Berlino ho veduto un saggio di *T. Lupinaster* che mi parve fino ad un certo punto distinto per la forma delle foglioline piuttosto obovate che lanceolate, e soprattutto ottusissime all'apice. In esso anche le nervature erano meno accentuate e la consistenza del lembo minore. Foglioline però ottusissime in esemplari coltivati ho osservate soventissimo, massime allorchè si tagliano i cauli fioriferi ed il rizoma mette nuovi germogli.

---

(1) Prima di " situs „ dovrebbe esservi " Pedunculus? „ (questa parola supponibile manca nel testo).

In un solo saggio dell'Erbario di Berlino ho osservato delle foglioline acuminatissime con lungo mucrone apicale.

Il **T. Lupinaster** varia poco nelle sue membra vegetative e meno ancora negli organi fiorali. La varia sua statura ed il suo sviluppo sono certamente in dipendenza di circostanze locali di vegetazione. Si legge nella *Flora Altaica* di Ledebour, l. c., che la var. β *purpurascens* " caulem habet erectum elatiorem, qui in var. a (*albiflorum*) humilior ipsa basi adscendente, caeterum erectus. „

Mi è parso però di vedere nei diversi erbarii ed anche abbiamo coltivata la var. *albiflorum* con caule molto sviluppato e viceversa la var. *purpurascens* con cauli bassi e cespitosi.

Soventi volte il **T. Lupinaster** mostra foglioline affatto lineari, strettissime, soprattutto in certe forme coltivate degli erbarii, nelle quali anche la ramificazione è più sviluppata. Il numero delle foglioline sembra essere prevalentemente dispari. Prescindendo dalle primordiali delle stipole inferiori che cominciano a mostrarne (una, due o tre), esso è quasi sempre cinque, sette e più di rado nove.

Varia eziandio entro certi limiti la lunghezza dei peduncoli fiorali, la larghezza della palmetta, o ricettacolo ovato che porta i fiori e variano pure nello sviluppo e nella grandezza e profondità delle dentature i collaretti che li avvolgono; in molti casi si ha un collaretto molto ben sviluppato con denti regolari così da rammentare le vere *Involucrarie* americane.

Già abbiamo parlato d'una circostanza che fa variare la profondità della scanalatura nel peduncolo fiorale (Vedi parte generale) in rapporto col maggiore o minor numero dei capolini nella gemma ipogea; all'infuori di ciò il peduncolo fiorale varia anche nella grossezza e nell'indumento esteriore tricomatoso.

I fiori hanno una lunghezza media di 16 millimetri con un massimo di 20 ed un minimo di 12, ben inteso, prendendo a misurare *sempre* uno dei fiori superiori di ciascun capolino al momento dell'antesi.

Un po' variabile è la lunghezza relativa del tubo del calice in confronto ai denti, ed un rapporto assai costante si ha misurando sempre il dente inferiore, che è di solito più lungo del doppio del tubo e raggiunge metà della lunghezza del vessillo; questi rapporti sono molto più costanti nel tipo che nella var. β. La lunghezza degli altri denti varia in ragione della maggiore o minore obliquità della fauce. Si hanno variazioni di poco conto nell'abbondanza dell'indumento esteriore tricomatoso del calice, nella larghezza basilare dei denti e nelle loro nervature, le quali sono talvolta riunite fra loro da qualche trabecola trasversale. Quanto alla villosità, si può dire che la var. β è più villosa sul tubo del calice che non il tipo.

Nei petali v'ha uniformità somma quanto a contorni, grandezza e colore, all'infuori delle poche variazioni già dette.

La difficoltà estrema di procurarmi dei semi spontanei di **T. Lupinaster** mi impedisce di stabilire degli sperimenti di coltura onde assicurarmi del valore in costanza delle varietà da me stabilite.

Habitat.

Erbario Mus. Imperiale R. di Berlino.

Dahurien — (Fischer misit) 1839 (Erb. Link.).
Altai — Meyer misit (1832).
Altai — leg. Dr C. Dumbery (Barnaoulensi).
Wernoje in regionibus cis = et transiliensibus. Cf. Regel, " Bull. de la Soc. Impér. de Moscou ", 1866 (imp. separ., p. 35) — leg. Kuschakenvicz.
In pratensibus prope Buchtarminsk (Sibiria Altaica) sat frequens leg. Karelin et Kiriloff. (1840).
In Dürren Wäldern des Grodnickern districts im Sudlichen Lithauen häufig (Rchb. Fl. Exc. nov.) leg. S. B. Gorski.
Slato-ust (i. e. Ostium aureum) Ural — Lessing misit (1833).
Bogoslawsk-Jekaterinburg — Ehrenberg (1829).
Amur — leg. Maximowicz.

Subvar. β.

Herb. Hort. Petrop. ex reg. cis = et transiliensibus — leg. Kuschakenwicz.
Herb. Kunth. Circa Barnaoul (Sibiria) leg. Patrin.
Herb. Hort. Petrop. = Japonia, Nippon, Fudzi-Yama (mons ignivomus prope Tokio) leg. Jeddo.

Subvar. γ.

Herb. Royal Gard-Kew. — Coast of Manchuria (Lat. 44-45 N.), leg. C. Wilford (1859).

Erbario Ascherson (Berlino).

Herb. Klinggräff. Thorn im Grabier Walde (Borussia occid.), leg. Nowicki (Juli 1853).
Herb. Rostafinski — Ciechocinek bei Wtoctaweck (Polonia rossica, haud procul ab urbe borussica Thorn), leg. E. Alexandrowicz.
Argenau (olim Gniewkow) Kr. Inowrazlaw. Provinz Posen. Kiefernwalde östl. d. Eisenbahn am Wege nach Ruhheide, leg P. Ascherson — 18-1888.
Argenau — Chaussee nach Thorn im Kiefernwalde, leg. P. Ascherson.

Subvar. β.

Herb. Sanio — Lyck im Baranner Forst. (Borussia orient.), leg. Otto Fischer (Jul. 1856).
Argenau — Chaussee nach Thorn im Kiefernwalde, leg. Dabrowski (Cf. Bericht der Deutsch. Bot. Gesell. 1892, p. 74).

NB. — Kock, ed. 4a (curante Wohlfahrt, p. 574), ritiene che il *T. Lupinaster* sia pianta originaria di Siberia ed importata in Lituania e Prussia. Il Prof. Ascherson

di Berlino che gentilmente mi comunicò il materiale del Regio Museo ed il suo proprio, aggiunge in una sua lettera, che l'opinione del Koch sopra esposta sul *T. Lupinaster* è falsa: " Opinio erronea **T. Lupinaster** plantam Sibiricam esse in Europam " tantum efferatam redit nuperrime in Koch Syn. ed. 4ª, curante Wohlfahrt, p. 574 „. " Aus Sibirien eingewandert „.

Erbario Boissier.

In Ircutia leg. Hschunin.
Prope Krasnoyarsk leg. Adams.
Amur leg. Maximovicz (var. γ obtusifolium).
Langarei-Karkaroly-Berge leg. Schrenk.
In pratensibus prope Buchtarminsk leg. Karelin et Kiriloff (Soc. Imp. Nat. curios. Mosq.).
In pratis trans-baikalensibus — misit Turczaninow.

Var. β. — Alatan misit Bunge.

Erbario Sommier.

Ad flumen Ob-Or Nial (Balscioinos). Ultimum promontorium ripae dexterae parum ultra circulum polarem — leg. Sommier.
Ad flumen Ob in sylvaticis ripae dexterae — Monastyr-Kandjusk.
Ad flumen Ob ripa laeva (terra firma) Voikarskii Zimnii-jurti.
Ad flumen Ob-Obdorsk sub circulo polari.

Var. β.

In collibus saxosis arenosisve regionis mediis jugi Uralensis (G. o Clerc Plantae Uralenses).
Haud procul a Nijni-Taghilsk in pratis et sylvis montium Uralensium.
Ad flumen Ob ripa laeva sub circulo polari — Labuitnang (Sommier).

Erbario Roma.

Saggio del " Scientific department of Tokio University „, senza località.

Distribuzione geografica.

NB. — Il **T. Lupinaster** ha il suo centro di diffusione nell'Asia boreale e media. — Ledebour, l. c., assegna a questa specie le seguenti regioni: " *Rossia media* (Lithuania) Iundz. Eichw. ad flumen *Kama;* Falk: in guberno *Orenburg* prope *Slatoust* (Nesterofski), et omni *Sibiria* (J. G. Gmelin); (uralensi!) (Heinzelmann ex Amman, Pallas, Lepechin, Falk, Claus, Lessing, Uspenski): (*altaica!*) (Pallas, Falk.

Fl. Alt.) prope *Krasnojarsk* (Turczaninow in litteris): (*Baikalensi!*) (Georgi, Turczaninow Schtschukin): et *orientali*, inter Jakutzk et Wilnisk (Kruhse), inque *Davuria* (Turczaninow. Fisch pl. exsicc.) „. — Il suo limite occidentale è segnato in Europa dalla *Prussia* (est ed ovest) dove fu trovato secondo Garcke, l. c.: " In Ostpreussen bei *Lyck* im Baranner Forste; im *Iohannisburger* Forst zwischen *Schiast* und *Piskorzöwen*, *Osterode*, und früher bei *Allenstein;* in Westpreussen unweit *Thorn* in einer Birkenschonung bei *Lerchenort* und *Kuchnic* „.

Il suo limite orientale è segnato dalle coste di Manchuria (Wilford), e Thunberg, l. c., riporta *Osacca* come la sola località nel Giappone dove questa specie sia stata trovata spontanea ma nell'Erbario di Berlino esiste pure raccolta a *Nippon* e sul Fudzi-Yama.

In Prussia esistono tutte e due le forme a fiori porporini e bianchi. Così scrive Ascherson, l. c.: " *T. Lupinaster:* Grabier Wald bei *Thorn* von Novicki, von Herrn von Klinggräff mitgetheilt. Dort scheint die Pflanze nur purpurne Blüthen zu haben, während sie bei Lyck in Oestpreussen nach Sanio nur mit gelblich-weisser Blumenkrone vorkommt „.

Nella flora romana di Maratti, l. c., vien riportato il **T. Lupinaster** come pianta stata trovata spontanea " ad caput Rami et ad Nympham, etc. „. È possibile che altra volta siasi trovata accidentalmente questa specie nelle località citate dal Maratti. Certo è che oggidì non se ne trova più traccia nè negli erbarii, nè fra le specie avventizie trovate nella Flora Romana. Così ebbe a dirmi il Prof. Pirotta di Roma. Altrettanto deve dirsi del *T. Lupinaster* ascritto da Ucria al dominio della Flora Sicula, e riportato da Gussone nel " Prodromo „ (pag. 53) " in siccis et montosis „, e poi nella " Synopsis „ dove però aggiunge: " an T. hybridum? „. Il Dott. Lanza, assistente alla Cattedra di Botanica di Palermo, scrissemi non aver trovato negli Erbarii di Gussone e di Tineo alcun saggio riferentesi al *T. Lupinaster* od al *T. hybridum*, aggiungendo: " Sul fatto che Ucria riporti il *T. Lupinaster*, non si può stabilire che a suo tempo questa pianta crescesse veramente in Sicilia. Le piante di Ucria che Gussone riporta precedute da una croce (✠) in calce ai generi cui si riferiscono, più che piante oggi scomparse o non più ritrovate, sono piante dall'Ucria malamente determinate „.

Nyman, l. c., assegna le seguenti regioni al **T. Lupinaster**: Lithuan — Polonia — Boruss. — Ross. med.

Species II^a^.

T. eximium Steph.

Ex *Fischer* et *Stev.* in litteris (*Ser.* in DC. Prod. Vol. II, p. 203 (1825) — *Bunge* Enumer. pl. Altaic., p. 63 — *Turcz.* Cat. Baikal, N. 303 — *Ledeb.* Fl. Ross. I, p. 551 (1842) — *Walpers* Repert. Vol. I, p. 647 (1842).

T. elegans *Steph.* herb. (fide specim.) non Savi.

T. grandiflorum *Ledeb.* in Spreng. Syst. Veget. Vol. III, p. 218, N. 108 (1826) et Fl. Ross. Icon. Vol. I, p. 23 (1829) — *Ledeb.* C. A., *Meyer* et *Bunge* Fl. Alt. Vol. III, p. 257 (1831) — *Dietrich* Syn. pl. Sect. IV, p. 1003, Num. 131 (1847).

T. **speciosum** *Fisch.* (in herb. R. H. Bot. Berol.).

T. **alpinum** *Pallas.* It. II, p. 123 — *Georgi* Beschr. d. Russ. R. III, 4, p. 1191 (ex parte) non L. (ex Ledebour Fl. Ross., l. c.).

Var. **albiflora** (*Fisch.* in litt.) Ser. in DC. Prod. II, p. 204.

" *Pedunculis subbifloris, calycis glabri dentibus lanceolatis corolla multo brevioribus, vexillo amplo alas latas superante, stipulis late ovatis, caule humili pubescente, foliolis obovatis serrulatis glabriusculis* „ Ledeb. in Spr., l. c.

" *Caule hypogaeo repente, ramis adscendentibus, pedunculis axillaribus, floribus 2-5, pedicellatis laxe umbellatis, defloratis deflexis, calyce corolla 2-triplove breviore: dentibus lanceolatis subæqualibus tubum paullo superantibus, stipulis ovatis vel ovato-oblongis acutis mucronatisve, pedunculis pilosiusculis, foliolis ternis, obovatis serrulatis subtus ad costam adpresse pilosis caeterum glabris* „ Ledeb. Fl. Ross., l. c.

" *Pedunculis axillaribus cilindricis, vel laevissime canaliculatis. Involucro cupulari regulari sinuato-crenulato. Calycis dentibus basi cordatis laciniis reticulato-venosis. Legumine tenuissimo, membranaceo subtiliter venuloso — Foliolis breviter vel longiuscule petiolatis — Vexillo amplo — Ovario glaberrimo — Corolla roseo-luteola* „ Nob.

Icones — Ledeb. Fl. Ross. Icon., l. c., tab. 96.

Icon nostra — Tab. II, fig. A.

Descrizione.

Perenne.

Radice fusiforme più o meno grossa e fittonosa, ramificata, grumosa.

Caule cespitoso, dapprima ipogeo con gemme apogeotropiche, strisciante, rizomatoso con rami infine epigei, pochissimo ramificati, superiormente cilindrici, glabri o pubescenti. Stipole del rizoma ipogeo *afille,* sottili, membranacee, oblunghe, ottuse, con nervature spiccate e con due cordoni peziolari più robusti: stipole delle foglie infime dei rami epigei, sviluppanti dapprima una, due o tre foglioline piccolissime, quasi senza picciuolo, rudimentali; le susseguenti con foglioline gradatamente più sviluppate e con tre cordoni peziolari percorrenti per intero la guaina, ramificato-biforcati al margine, tutte glabre, con code ottuse all'apice e brevemente guainanti alla base. Stipole superiori obovato-lanceolate o semi-ovate, bianco-verdognole alla periferia, brevemente guainanti, acute od acuminate, oscuramente dentate, quasi ondulate ai margini e quivi con rare ciglia, con nervature ripetutamente biforcate ed anastomosate in reticolo con nervi più esili fra le biforcazioni. — *Foglioline* obovate od obovato-ellittiche, od oblungo-obovate, glabre salvo che di sotto sulla nervatura mediana dove si trova qualche villo setoloso, con nervature poco elevate e non numerose, bi-triforcate a metà percorso o solo al margine con altre più piccole interposte formanti un reticolo oscuro, subcrenulate al margine massime inferiormente.

Infiorescenza. — Peduncoli solitarii ascellari cilindrici, talora con leggiero solco sulla parte interna, villosi od irsuti, portati tutti all'ascella dalle foglie supreme, uno per ramo o più di rado due, terminati da un capolino assai lasso, con due o tre fiori

involucrati da un collaretto cupuliforme, membranaceo-scarioso, senza nervature, crenulato o dentato con rari villi e qualche glandola pedicellato-clavata (sparsa anche sui peduncoli). *Fiori* pedicellati: pedicelli subeguali al calice (denti compresi).

Calice tagliato in sbieco a spese del labbro superiore: tubo glabro esteriormente; internamente guernito di glandule clavato-pedicellate. Nervature del tubo dieci, cinque dentali più valide; cinque commissurali più esili che giunte allo spazio interdentale si biforcano e si recano ognuna alla base ed al lato interno di ciascun dente formando una serie di maglie larghe irregolari che vanno sino all'apice del dente stesso (Vedi Tav. II, Fig. 2). Denti larghi, triangolari, cordati alla base, acuti, un po' fogliacei, guerniti di peli brevi e radi ai margini, più lunghi negli spazii interdentali e in corrispondenza della fauce.

Corolla roseo-giallognola, seccando un po' scariosa, persistente a lungo nel frutto. *Vessillo* quasi libero dagli altri petali, grande, obovato-ellittico, senza unghia, un po' cochleariforme, compiegato prima e dopo l'antesi, un po' rialzato al momento della fecondazione, molto più lungo del calice (2-3 volte) ed oltrepassante le ali, con nervature percorrenti tutto il lembo, biforcate e riunentisi in pochi fasci inferiormente. — *Ali* irregolarmente obovate, con becco ottuso; acute od ottusette all'apice. — *Carene* cultriformi apiculate.

Stami coi filamenti liberi più brevi della porzione adesa, decrescenti in lunghezza dal mediano ai laterali e quello più dilatato di tutti sotto l'inserzione delle antere introrse, oblungo-ellittiche.

Ovario fusiforme-lineare, glaberrimo. *Stilo* cilindrico, ingrossato-ricurvo verso l'alto e quivi con stigma a bottoncino apicale. *Ovoli* 3-(6)-7. *Legume* clavato-oblungo, tenuissimo membranaceo, colle suture robuste, reticolato-venuloso sulle pareti, glabro, stipitato. *Semi* 3-5-6 cordato-globulosi, glabri, lisci, verde-giallastri.

Letteratura e critica. — Osservazioni.

Il *T. eximium* rappresenta la seconda specie da me conosciuta che faccia parte della *Stirps Eulupinaster*. Al pari del *T. Lupinaster* esso possiede un rizoma sotterraneo con stipole afille, il quale dà origine a gemme dapprima brevi, poi allungantisi dopo un certo tratto apogeotropicamente e dando origine a rami epigei fogliferi e fioriferi. Nelle brevissime gemme ipogee sta pure qui rinchiusa l'infiorescenza in miniatura, la quale non presenta il fatto osservato nel *T. Lupinaster* della scanalatura del peduncolo fiorale per ciò che il capolino quasi sempre unico per ogni ramo è ridotto a due o tre fiori e non subisce perciò nella gemma la forte compressione derivante dal numero dei fiori e dalla vicinanza dei capolini ristretti all'apice del caule nelle guaine stipolari rispettive. Per la stessa ragione nel *T. eximium* il ricettacolo è normalmente sviluppato, simmetrico e regolare. Nel peduncolo può riconoscersi una leggerissima depressione al lato interno; del resto esso è affatto cilindrico. Il *T. eximium* è apparentemente simile nell' aspetto generale al *T. alpinum*, ma in realtà egli è un vero parente del *T. Lupinaster* soprattutto per la struttura dell'ovario e del legume, pel numero e per la forma dei semi e per la natura dei tricomi

che rivestono la fauce ed i denti del calice. — Il *T. eximium* si riconosce facilissimamente, oltre agli altri caratteri, soprattutto per le lacinie del suo calice *cordate* alla base ed elegantemente reticolate. — Dalla figura data da Ledebour nelle Icones il vessillo appare roseo più o meno pallido e le ali e le carene bianco-giallastre, o giallo-brunastre: la fogliolina mediana è sessile e le foglie sono veramente digitate; i pedicelli in detta figura sono più lunghi del calice, lo che sui saggi essiccati spesso non si trova. In questi anche il colore della corolla pare uniforme. Seringe in DC. Prod. l. c. ascrive al *T. eximium* corolle porporine, aggiungendo una var. β. *albiflora,* la quale probabilmente deve corrispondere alla forma figurata da Ledebour. Nella descrizione sua non si fa cenno del colore delle corolle (1). " T. ra-
" dice repente, caule adscendente pubescente, stipulis ovatis, acutis, submembranaceis,
" foliolis ovatis denticulatis, subtus ad costam adpresse pilosis, cæterum glabris,
" umbellis 2-4 floris laciniis calycis campanulati subæqualibus tubo parum longioribus,
" corolla multoties brevioribus, leguminibus 4-5 spermis ".

" Habitat in alpe circa fontes fluminis Tschegan et in insulis fluminis Tschuja
" (nec non in Davuria Dec.) ♃ ".

" Floret. Junio-Aug. ".

Habitat.

Dahuria-Altai (Fischer-Meyer).

(1) *Icones plantarum novarum vel imperfecte cognitarum floram Rossicam imprimis Altaicam illustrantes*, ed. Carolus Friedericus a Ledebour, centuria 1ª (Riga, apud L. Deubner; Londini, Parisiis et Argentorati, apud Treuttel et Würtz; Bruxellae, in Libraria Parisiensi (1829).

STIRPS IIa.

GLYCIRRHIZUM Nob. (Bertol.).

Caract. — « *Stipulae imae sphacelato-fimbriatae, reticulum brunneo-fuscum vel helvulum efformantes caulesque decurtatos inferne obtegentes - Inflorescentiae annotinae in axilla foliorum inferiorum evolutae; aequali tempore in axilla foliorum juniorum inflorescentiae rudimentales (sequenti anno evoluturae) adsunt - Inflorescentia composita, racemoso-cimosa* » Nob.

Hujus stirpis: *T. alpinum* L., *T. polyphyllum* C. A. Meyer., *T. nanum* Torr. (non Europæum).

Species 1a.

T. alpinum L.

Sp. pl. (Ediz. 3a), p. 1080 (1764) et Mant. altera, p. 451 (1771), et Syst. Veg. (ediz. 14 Murray), p. 688 (1784) — *All.* Fl. Pedem. Vol. I, p. 302 (1785) — *Vill.* Hist. pl. du Dauph. Vol. III, p. 476 (1789) — *Willd.* Sp. pl. Vol. III, p. 1360 (1787) — *Suter* Fl. Helv. Vol. II, p. 108 (1802) — *Schreb.* in Sturm Deutschl. Fl. Heft. 15 (1804) — *Savi* Due cent. etc., p. 146 (1804) — *Re* Fl. Segus., p. 62 (1805) — *Sternberg* Reise d. Tirol, etc., p. 62 — *Schkuhr* Bot. Handb. Vol. II, p. 402 (1805) — *Lamk* et *DC.* Syn. Pl. Fl Gall., p. 346 (1806) — *Pers.* Syn. Vol. II, p. 349 (1807) — *Loisel. de Longchp.* Fl. Gall., ediz. 1a, p. 480 (1806) — *Poir.* Encyclop. Vol. VIII, p. 1 (1808) — *Biroli* Fl. Acon. Vol. II, p. 40 (1808) — *Savi* Obs. in var. Trif. sp., p. 99 (1810) — *Ait.* Hort. Kew. (Ed. 2a), Vol. IV, p. 382 (1812) — *Lapeyr.* Pl. Pyren. Vol. II, p. 433 (1813) — *DC.* Fl. Fr. Vol. IV, p. 519 (1813) — *Pollini* Viaggio al M.te Baldo, etc., pp. 101-102 (1816) — *Pollini* Fl. Veron. Vol. II, p. 516 (1822) — (?) *Maratti* Fl. Rom. Vol. II, p. 155 (1822) (1). — *Link* Enum. pl. R. H. Berol., part. IIa, p. 261 (1822) — *Comolli* Enum. pl. prov. Lar., p. 142 (1822) — *Ser.* in DC. Prod. Vol. II, p. 204 (1825) — *Savi* Bot. Etr. Vol. IV, p. 46, N. 1056 (1825) — *Spreng.* Syst. Veg. Vol. III, p. 208 (1826) — *Jan* Elenc. pl. Parm., p. 12 (1826) — *Benth.* Cat. pl. Pyr. et Langued., p. 125 (1826) — *Loisel. de Longchp.* Fl. Gall. Vol. II, p. 119 (1828) — *Duby* Bot. Gall. Vol. I, p. 135 (1828) — *Gaud.* Fl. Helv. Vol. IV, p. 579 (1829) — *Host.* Fl. Austr. Vol. II, p. 367 (1831) — *Rchbch.* Fl. Exc. Vol. II, p. 495 (1832) — *Presl* Symb. bot. Vol. I, p. 47 (1832) — *Reut.* Cat. pl. vasc. env. Genève, p. 32 (1832) — *Colla* Herb. Ped. Vol. II, p. 113 (1834) —

(1) Vedi la Distribuzione Geografica del *T. alpinum* a pag. 285.

— *Massara* Fl. Valtell. Prod., p. 188 (1834) — *Mutel* Fl. Fr. Vol. I, p. 264 (1834) — *Richter* Cod. Bot. Linn., p. 743, N. 5651 (1835) — *Gaud.* Syn. Fl. Helv., p. 630 (1836) — *Puccin.* Syn. pl. agr. Luc. p.s altera, p. 371 (1841) — *Bertol.* It. Apen., p. 15 (1841) — *Koch* Syn. Fl. Germ. et Helv., ed. 2a, p. 190 (1843) — *Comolli* Fl. Com. Vol. V, p. 433 (1847) — *Dietrich* Syn. Pl. Sect. IV, p. 1001 (1847) — *Gren. Godr.* Fl. de Fr. Vol. I, p. 418 (1848) — *Zumaglini* Fl. Pedem. Vol. II, p. 197 (1849) — *Boreau* Fl. du centr. de Fr. Vol. II, p. 132 (1849) — *Bertol.* Fl. It. Vol. VIII, p. 101 (1850) — *De Vis.* Fl. Dalm. Vol. III, p. 300 (1850) — *Willkomm* Sert. pl. hisp., p. 43 (1852) — *Rota* Prosp. Fl. Prov. Bergamo, p. 33 (1853) — *Nyman* Syll. Fl. Eur., p. 296 (1854) — *Koch* Syn. Fl. Germ. et Helv. (ediz. 3a), Vol. I, p. 149 (1857) — *Caruel* Prod. Fl. Tosc., p. 169 (1860) — *Koch* Nomencl. Fl. Germ. et Helv., p. 22 (1861) — *Reut.* Catal. pl. vasc. Genève, p. 48 (1861) — *D'Angrev.* Fl. Valles., p. 32 (1862) — *Fuss* Fl. Transsilv., p. 162 (1866) — *Ardoino* Fl. Alp. marit., p. 104 (1873) — *Ces. Passer. Gib.* Comp. Fl. It., p. 712 (1867) — *Zersi* Prosp. pl. vasc. Bresc., p. 61 (1871) — *Verlot* Les plantes alpines, p. 97 (1873) — *Morthier* Fl. analyt. Suiss. (5a edit.), p. 146) (1873?) — *Arcangeli* Comp. Fl. It., p. 176 (1874) — *Celak.* Ueber Aufb. der Gatt. Trifolium. Oesterr. Bot. Zeitschf., N. 2, p. 42 (1874) — *Rchbch* Icon. Fl. Germ. et Helv. Vol. XXII, p. 75 (1874) — *Bouvier* Fl. Alp. Suiss. et Sav., p. 150 (1878) — *Koch* Taschb. der Deutsch. u. Schweiz. Fl., p. 521 (1878) — *Nyman* Comp. Fl. Europ., p. 179 (1878-82) — *Willkomm* et *Lange* Prod. Fl. Hisp. Vol. III, p. 358 (1880) — *Rossi* Stud. Fl. Ossol., p. 82 (1881) — *Re* Fl. Segus. (Comm. a B. Caso), p. 89 (1881) — *Gibelli* e *Pirotta* Fl. Moden. e Regg., p. 46 (1882) — *Janka* Trif. Lot. Europ., p. 154 (1884) — *Schlchtdl.* et *Hallier* Fl. von Deutschl. Vol. XXIII, p. 273 (1885) — *Camus* Catal. pl. de Fr., p. 65 (1888).

Lupinaster alpinus *Presl.*, l. c.

Subvar. β. **albiflorum** Haller Hist. Stirp. indig. Helv. Vol. I, p. 161, N. 369 = var. *b. albiflorum* Rota, l. c. (et auct. plur.).

Subvar. γ. **stenophyllum** Nob. (in herb. R. H. B. Romani).

Icones. — *Pona* Pl. mont. Baldo, etc., pag. cccxl et edit. ital., pag. 194 (fig. in textu) — *Parkinson* Theatr. Bot., p. 1104 (in textu) — *Bauhin.* Hist. pl. univers., p. 376 (fig. in textu) — *Morison* Hist. pl. univ. Vol. II, Sect. IIa, tab. 12, fig. 2 (mala) — *Sturm* Deutschl. Fl., l. c., heft. 15 = *Icon. Taurin.*, tab. XI, fig. 2. — *Perini,* frat. Fl. It. Sett. Cent., 1a. — *Reichbc.* fil., l. c., tab. 114. — *Cusin* Herb. Fl. Fr. tab. 1120. — *Schlechtdl.* et *Hall.*, l. c., tab. 2389.

Subvar. γ. **stenophyllum** Nob. (in herb. R. H. B. Romani).

“ *Capitulis laxifloris* (7-14 fl.). *Floribus maximis* (in G. Trifolio), *19, 21* (media) — *25 mill. longis; duplicatim verticillatis; verticillastris superpositis, infero 6-7, supero 4-5-floro saepe reducto, uni-bifloro, omnibus involucratis, involucello tenui, albo-membranaceo, denticulato, glabro; axi florifero indefinito in medio florum superiorum mucronulo centrali* (Tab. II, fig. 15*bis* *a*), *protrudente, interdum abortu subnullo, floribus cymosis — Calycis dentibus apice subulatis, acuminatissimis, inferiore dimidium vexillum semper*

superante, rarissime ei subæquilongo — Foliolis ternatis, rarissime (Bertoloni) *quinatis — Corolla speciosissima purpureo-rubente, siccando atropurpurea vel* (var. β) *alba — Ovario biovulato — Legumine saepissime bispermo — Tota planta glaberrima „* Nob. ♃.

Subvar. β. “ *flore albo, caeterum ut in typo „*.

Subvar. γ. “ *foliolis strictissimis, linearibus, acuminatis „*.

Icon nostra — Tab. II, fig. B.

Descrizione.

Radice fittonosa, legnosa, obconica, legnosa, lunga, più o meno ramosa, divisa e fibrillosa inferiormente, guarnita delle solite produzioni grumose a bacteroidi.

Caule nano, cespitoso; rami molteplici dal colletto, tosto ramificati, grossi, tozzi, arcuato-flessuosi, o stoloniformi, ma non mai radicanti (Exempl. Pierre sur Haute Erbario Levier) con internodii brevi, gli infimi ricoperti dai residui delle vecchie stipole sfilacciate e ridotte ad un invoglio fibrilloso-reticolato, brunastro o fulvo.

Foglie tutte all'apice dei rami, appressate, ricoprentisi a vicenda nella porzione stipulare: le inferiori (esterne) più lungamente picciolate, le superiori (interne) meno; picciuoli glabri, leggermente scanalati superiormente, grossi; stipole vegetanti oblungo-lineari, tutte conformi, oblungo-lineari (distese in piano), verdi dapprima, presto biancastro-scariose, guainanti inferiormente per breve tratto, con molti nervi paralleli e scarse anastomosi, massime nelle code brevi, triangolari, attenuato-acuminate. — *Foglioline* tre, rarissimamente (secondo Bertoloni) cinque, glabre, sessili oblungo-lanceolate od oblungo-lineari, cuneate alla base, più o meno lunghe (fino a 8 centimetri; in media 3 cent.), acute od ottuse od anche arrotondate, più verdi sopra, più pallide sotto, o glauche, integre al margine od oscuramente denticulate; raramente con denti fini e spiccati; con nervature fitte, pennate ma poco arcuate, salvo al margine dove sono forcate ed anastomosate con altre più esili, colle quali formano un reticolo a maglie oblunghe.

Infiorescenza (Vedi anche la Parte Generale e la Critica di questa specie). — *Peduncoli ascellari,* pochi per ogni cespo (2-3), solitarii, cilindrici, glabri, di lunghezza variabile, ma più spesso oltrepassanti al momento dell'antesi la foglia corrispondente. — *Asse fiorale* indefinito, prolungantesi sotto forma di mozzicone all'apice delle infiorescenze formate da pochi fiori (10-12), (al massimo 15, e al minimo 6): grandi (i più grandi del Genere) (18; (media 20) 25 mill. lunghezza), disposti ordinariamente in due verticillastri sovrapposti più di rado in uno solo (per aborto del superiore ridotto ad un fiore o due), rarissimamente con accenno ad un terzo verticillastro nei capolini enormemente sviluppati, ognuno involucrato da un collaretto membranoso-scarioso, biancastro, denticolato, glabro o con qualche emergenza glandulifera, enerve. — *Pedicelli fiorali* glabri, cilindrici, più brevi del calice, dapprima eretti, alla fine deflessi, cosicchè il capolino diventa umbelliforme.

Calice campanulato, glabro o guarnito dentro e fuori delle solite produzioni tricomatose glandulose, pedicellato-clavate, molto grandi, con tubo breve, tagliato a spese del labro superiore, leggermente saccato alla base superiormente, verdognolo, biancastro o colorato in rossigno, con dieci nervi; cinque dentali e cinque commissurali più esili. Denti cinque triangolari-allungato-subulati, assai più lunghi del tubo; i due

superiori più brevi dei laterali, l'inferiore più lungo di tutti ed oltrepassante sempre metà della lunghezza del vessillo, tutti trinervi massime alla base e con qualche nervo trasversale; scariosi al margine, colorati o no in rossigno.

Corolla vistosissima roseo-porporina, invecchiando fosco-bluastra o fosco-vinosa, più di rado bianca (var. β) persistente a lungo ed un poco scariosa.

Vessillo libero o quasi dagli altri petali connati nell'unghia, lungo un po' meno del doppio del calice, foggiato inferiormente alquanto a navicella (poco distensibile in piano senza lacerazione) e dilatato superiormente in lembo obovato-ellittico, ottuso, arrotondato, troncato o smarginato all'apice, integro al margine con nervature furcate riunentisi in basso in pochi fasci non troppo robusti; senza strozzatura dorsale, compiegato sugli altri petali prima e dopo la fecondazione e un po' rialzato anteriormente durante la stessa; più lungo delle *ali* irregolarmente oblunghe, ottuse con orecchietta poco bollosa, ottusa, ricche di vene più scure. — *Carene* foggiate a *bistory* retto, apiculate, senza orecchietta.

Stami come nel *T. Lupinaster.* — Antere *idem.*

Ovario fusiforme, glabro, stipitato, quasi costantemente biovulato, terminante nello stilo gradatamente assottigliato in alto, cilindrico; stigma a bottoncino papillifero anche sulla faccia dorsale.

Legume ellittico, stipitato, indeiscente, glabro, membranaceo, colle suture robuste; la ventrale un po' tuberculata e le pareti sottili leggermente venulose.

Semi due (raramente tre) grandi, nerastri, lisci subrotondi con ilo profondo e radichetta prominente.

Varietà. — Letteratura e Critica. — Osservazioni.

All'infuori della variazione a fiori bianchi, il *T. alpinum* non presenta vere varietà, essendo specie oltremodo uniforme e ben caratterizzata. Ho creduto di riferire come semplice sottovarietà anche la forma a foglie strettissime (abbastanza rara), non essendo questo nel G. *Trìfolium* un carattere di soverchio valore. — Se non erro, fu Haller (*Hist. Stirp. indig. Helv.*, Vol. I, pag. 161) che pubblicò la var. β. " *flore albo, in monte Serin* „. — Dopo di lui ne fecero cenno, come di semplice accidentalità nel colore della corolla e senza designarla con lettere, *Allioni, Schkuhr, Savi, Decandolle, Pollini, Loiseleur, Gaudin, Reichenbach* (fl. exc.), *Colla, Mutel, Koch, Dietrich, Grenier et Godron, Zumaglini, Bertoloni.* Il Rota solo la distinse nella Flora di Bergamo come var. *b.* Io l'ho veduta nell'Erbario di Firenze raccolta dal Rota stesso a Ca di S. Marco nel Bergamasco e dal Cesati nel monte Legnone e l'ho raccolta io stesso sotto il *Colle di Tenda* scendendo a *Limone.* — La sottovarietà *stenophyllum* fu raccolta nel monte Fusio in Val Sambuco da A. Franzoni (Erbario di Roma).

È appena il caso di accennare alle variazioni di statura del *T. alpinum,* certo in relazione colle condizioni di nutrizione e di località della specie. Così mi accadde di vedere saggi evolutissimi raccolti dal Thomas nel Vallese (*planta major helvetica* del suo cartellino e riportata dal Nyman *l. c.*); nel Tirolo australe (Monte Jaufen Erbario Levier): a S. Caterina di Val Furva (Valtellina Erbario Roma); sul Rocciamelone (Alpi Cozie) leg. Berrino, alle Echelles presso Bardonecchia *id.*; sulla Zeda

nella Valle Intrasca (Lago Maggiore) DNot., ecc. — Un saggio addirittura enorme con foglioline lunghe 7 centimetri, fiori lunghi 25 mill. e con radice lunga strisciante è quello contenuto nell'Erbario Sommier e raccolto a Bormio (Valtellina).

Molti Autori (*Pollini, Savi, Sprengel, Loiseleur, Host, Koch, etc., etc.*) attribuiscono al *T. alpinum* foglioline serrulate al margine. Questo carattere non è sempre costante; molto soventi le foglioline sono affatto integre nel contorno. Del resto se gli Autori in generale sono molto concordi nella descrizione di questa specie, pochi di essi si sono occupati del carattere speciale che offrono le sue stipole allorchè invecchiano, e quasi nessuno ha osservato a fondo la curiosa infiorescenza dei *Glycirrhizum*. Non sarà inutile il soffermarci un momento su questi due fatti. — Un cespo di *T. alpinum* tolto con diligenza dal terreno mostra le parti inferiori dei rami affatto ricoperte da un ammasso di fibre nerastre o brunastre, sfilacciate, intricatissime che vanno, di mano in mano che il ramo cresce, sfacelandosi. — Questa struttura accennata da qualcuno dei moderni, *Reichenbach* (fil.), *Bertoloni*, era stata anticamente osservata dal *Decandolle*, il quale scrive *l. c.* " Sa racine est longue, garnie vers son collet de " beaucoup de paillettes ou espèces de poils grisâtres „. — L'ammasso di fibrille sopra accennato è costituito dai residui delle stipole vecchie in cui il tessuto parenchimatoso si è distrutto lasciando solo la porzione dei fasci fibro-vascolari. Questo carattere è di grandissimo valore per riconoscere gli affini del *T. alpinum*: così esso è comune al *T. polyphyllum* del Caucaso, ed al *T. nanum* dei *Rocky-Mountains* d'America.

Più interessante ancora è la infiorescenza del *T. alpinum* e dei *Glycirrhizum* in generale.

Tutti gli Autori parlando di essa la descrivono più o meno come un capolino lasso, foggiato ad ombrella allorchè è fruttificato, lasciando così sottinteso che questa infiorescenza non differisca sostanzialmente da quella degli altri trifogli. Alcuni pochi hanno vagamente accennato ad una differenza strutturale di essa, ma senza venire ad una conclusione, come vedremo più avanti.

Il primo accennò all'infiorescenza del *T. alpinum* venne dato dal Micheli (*Nova plant. Genera,* pag. 28) nel 1729, il quale descrivendo l'*Ordo V* così si esprime:

" Trifoliastri floribus in *fasciculum,* seu *corymbum* minus speciosum *per binos* " *tantum ordines dispositis,* qui, dum pistillus in fructum abit deorsum reflectuntur „. Dalla qual frase risulta come il Micheli avesse benissimo osservata la apparente esterna struttura del capolino, ma la riferisse ad un corimbo o fascicolo di fiori. — Ognuno sa che il corimbo è un'infiorescenza racemosa, e che il falso corimbo è una cima. Non si può quindi dedurre dalle parole del Micheli a quale infiorescenza abbia voluto alludere, tenuto anche conto dell'epoca in cui furono scritte, e delle cognizioni che allora si avevano sui varii tipi di ramificazione.

Fu Schreber il secondo che rilevò la struttura fiorale del *T. alpinum.* Egli così si esprime: " l. c. " Der Kürze Schaft trägt ein einzelnes Blüthenköpfchen an der " Spitze, zuweilen in *proliferirenden Dolden*, denn die untern Blüthen *entspringen* " *alle* aus einem gemeinschaftlichen mittelpunkte, und das nähmliche findet noch " einmal an dem verlangerten Schafte statt „.

Schreber, molto meno esattamente del Micheli, ritiene, come è facile vedere, il verticillastro inferiore dei fiori come il vero capolino normale e suppone doversi ad un'anomalia, cioè alla proliferazione dell'asse il secondo verticillastro. Questa osser-

vazione si scosta dal vero in ciò che il fatto da Schreber riferito ad un'accidentalità, è invece il modo ordinario di comportarsi della pianta; il che non toglie nulla alla esattezza dell'osservazione. Altri Autori, p. es., Seringe l. c., si limitarono ad accennare la disposizione dei fiori " pedicellis minimis subverticillatis „ od interpretarono erroneamente questa infiorescenza.

Ricorderemo cose già note. L'infiorescenza del *T. alpinum* (ed affini) è fatta di due, raramente da tre, verticillastri sovrapposti. Nel verticillo superiore, più povero di fiori e spesso con qualche fiore tabescente, come nell'inferiore più ricco di fiori, i pedicelli nascono tutti attorno ad un punto dell'asse ed involucrati dal collaretto membranaceo, continuo, più o meno dentato. Tra i due verticillastri corre un tratto dell'asse comune, nudo. Ma se si osserva con attenzione il centro del verticillastro supremo si vede che quasi sempre *esiste colà uno spuntone breve che rappresenta la continuazione dell'asse fiorale* (Tav. II, fig. *B*, 15^{bis} *a*). È certo che senza uno studio organogenico ed anatomico accurato, che metta in chiaro la cronologica evoluzione delle membra, non si può matematicamente essere certi della natura di questa infiorescenza, tanto più che la genesi di molti verticillastri, in altri Generi che non sia il G. *Trifolium* (Labiate), spesso è tutt'altro che facilmente dimostrabile. Ma nel caso del *T. alpinum* il dubbio, anche *a priori* non mi par possibile. E, in verità, è egli ammissibile ritenere questa per una infiorescenza *racemosa* ridotta a due verticilli? Il volerlo supporre basandosi sul fatto che questo modo d'infiorescenza è comune a tutti i Trifogli, per quanto talora modificato o larvato (*T. Lupinaster*, ecc.) è un po' azzardato. Per ammettere una simile infiorescenza converrebbe supporre che un capolino fosse ridotto ad avere due giri di spira abbassati in piano quasi orizzontale con un tratto di ricettacolo nudo. Il che mi parrebbe voler portare le analogie ad un limite troppo spinto. Io sono persuaso che questa idea deve essere affatto abbandonata, e che l'infiorescenza del *T. alpinum* debba essere annoverata fra le infiorescenze *racemoso-cimose* o *botrio-cime*, analoghe a quelle di molte Labiate, nelle quali la natura di racemo spetta al solo asse generale dell'infiorescenza, svolgentesi indefinitamente, mentre le infiorescenze secondarie parziali, con assi soppressi, stanno raggruppate all'ascella di brattee, concresciute o no, sotto forma di verticillastri, semplici o composti. — Nel caso del *T. alpinum* ed affini due fatti ci fanno ritenere che tale sia la sua infiorescenza: 1° la presenza costante del mucrone apicale nel centro del verticillastro superiore; 2° lo svilupparsi e lo sbocciare in ordine acropeto *dei verticillastri* consecutivi per cui il superiore è *nel suo complesso* sempre più giovane dell'inferiore; però i fiori di uno stesso verticillo possono essere di età diversa; 3° finalmente appunto il diverso sviluppo e la diversa età dei fiori che si trovano in *uno stesso* verticillo considerati gli uni rispetto agli altri, al momento della fecondazione in guisa da dimostrare ampiamente essere essi produzioni cronologicamente differenti e dipendenti in parte, se non tutte, da assi soppressi di inegual valore genetico (1). Il fatto della proliferazione riferito

(1) Se si suppone p. e. che i 6 fiori di un verticillastro inferiore appartengano a due cime dicotomiche nate all'ascella del collaretto i cui assi siano soppressi, è evidente che i due fiori terminanti l'asse di 1° ordine della dicotomia si svolgeranno più presto dei laterali che nascerebbero all'ascella delle due brattee sottostanti al fiore terminale. — La soppressione degli assi porterebbe seco la saldatura delle brattee a guisa di collaretto, ammettendo che le minute squame onde si compone l'involucro abbiano valore di filloma, ciò che non è affatto dimostrato.

dallo Schreber sarebbe dunque perfettamente in parte giustificato, cioè per quel tanto che riguarda il prolungamento dell'asse. Soltanto, secondo lo Schreber, questa struttura fiorale, come si è già detto, sarebbe accidentale nel *T. alpinum* (Zuweilen in proliferirenden Dolden), mentre è generalissima. È poi appena il caso di accennare alla supposizione che questo prolungamento dell'asse sia un simpodio, e che vi possano esistere due assi primarii, supposizione che non è giustificata da nessun fatto strutturale.

Più raro è, già dicemmo, il vedere un terzo verticillastro soprastante ai due inferiori, e nei pochi casi che mi fu concesso di vederlo, cioè in esemplari enormemente sviluppati, lo spuntone apicale porta al suo apice un rudimento di collaretto con un fiore solo tabescente. Mi riservo di comunicare altrove lo studio morfologico e la genesi di questa infiorescenza interessantissima, che non avrebbe ragione di essere qui riferita data la natura di questa rivista critica. — È certo intanto che anche per questo carattere la *Stirps Glycirrhizum* si allontana affatto da quella a cui appartiene il *T. Lupinaster*.

Di non minore interesse in riguardo alla storia del *T. alpinum* è una circostanza che mi venne fatto di rilevare nel suo modo di vegetare e che probabilmente ripete la sua origine, oltre che dalla natura della pianta, anche dalle condizioni in cui la pianta stessa vive, cioè in altitudini elevate assai. Se si tolgono ad una ad una le stipole di un ramo di *T. alpinum in piena infiorescenza*, si osserva che, *contemporaneamente* agli scapi fiorenti, ed all'ascella delle stipole susseguenti alle scapifere, stanno delle infiorescenze rudimentali, piccolissime, lunghe tutt'al più 1 centimetro e spesso lunghe pochi millimetri, nelle quali però sono distinguibili, e perfettamente costituiti gli elementi fiorali od almeno il calice e gli stami. Queste infiorescenze passano l'inverno ricoperte dalle stipole vecchie, per svilupparsi poi rapidamente nel susseguente estate. È un fatto analogo, biologicamente, ma topograficamente differentissimo da quello che abbiamo esposto nel *T. Lupinaster,* dove le infiorescenze, preformate, stanno sotterra nelle gemme, e ricoperte dalle stipole afille, incassate le une nelle altre come i pezzi d'un cannocchiale. Nel *T. alpinum* invece sono le foglie susseguenti a quelle delle infiorescenze evolute nell' anno, che albergano alla loro ascella le infiorescenze rudimentali, mentre la sua porzione suprema col ciuffo di foglie giovanissime cresce indefinitamente, arrestandosi solo nell'inverno, ma all'ascella di queste ultime non stanno mai infiorescenze.

Il collaretto di brattee che sottosta ai verticillastri, pare fatto da una duplicatura epidermica, non mostra nervature di sorta e difficilmente può paragonarsi ad un filloma ridotto, come, p. es., nelle vere *Involucrarie* od in certi *Lagopus*. Mostra invece molta analogia colle squamule che sottostanno ai fiori delle *Chronosemium* portando come essi soventi delle emergenze glandulose microscopiche o delle glandule clavato-pedicellate identiche a quelle che si trovano sul calice e più di rado sulle stipole.

È secondo tutte le probabilità falso che Bauhino nel *Phytopinax* (1596) abbia fatto allusione al *T. alpinum;* avvegnachè le sue caratteristiche non gli siano applicabili per nulla. *Pona* (*x*) pel primo la descrisse assai bene e la figurò nella storia

delle piante del Monte Baldo. Gli Autori che dopo di Pona e prima delle " Species " plantarum „ Linneane se ne occuparono, sono i seguenti in ordine cronologico: *Parkinson* (1) — *Bauhino* (2) — *Morison* (3) — *Tournefort* (4) — *Scheuchzer* (5) — *Micheli* (6) — *Zannichelli* (7) — *Linnè* (8) — *Seguier* (9) — *Sauvages* (10) — *Haller* (11).

Quest'ultimo Autore non fa uso della nomenclatura binomia nell'opera citata quantunque posteriore alle " Species plantarum „.

(*x*) " Trifolium 42 siue alpinum minimum *flore luteo* „.

Plantae seu simplicia, " ut vocant, quae in Baldo monte et in via ab Verona ad Baldum " reperiuntur „, etc., p. cccxl (Antwerpiæ, 1601), apud Clusium, " Rar. pl. Hist. „; et " Monte Baldo descritto da Giovanni Pona etc. „, ediz. ital., p. 194 (Venezia, 1617).

(1) *Theatrum botanicum,* pag. 1104 (London, 1640), " Trifolium angustifolium alpinum „, non *Trifolium Glycyrrhizites* ut voluit Hallerus „!

(2) *Pinax Theatri Botanici* sive Index, etc., p. 328 (1671), Basilea: " Trifolium alpinum flore " magno radice dulci; Glycyrrhiza astragaloides quibusdam „ — et " Historia plantarum universalis „ (Ebrodum, 1671, p. 376, vol. II); " Trifolium alpinum rheticum astragaloides „ — et Προδρόμος Theatri Botanici, pag. 143 (Edit. altera emend., Basilea, 1671): " Trifolium alpinum flore magno radice " dulci etc. „.

(3) *Plantarum histor. univers.* Oxoniensis, etc., vol. II, pag. 139 (Oxonii, 1715): " Trifolium pur-" pureum angustifolium alpinum „.

(4) *Institutiones rei herbariae,* vol. I, p. 408 (Parisiis, 1719) — " Anonis alpina humilior, radice " ampla, dulci „.

(5) Ουρεσίφοιτης helveticus sive itinera per Helv. alp. reg. fact. annis 1702-11; Lugd. Bat. (1723); It. I, p. 43; It. II, p. 143; It. IV, p. 342.

(6) *Nova plantarum Genera* etc., p. 28 (Florentiae 1729) — " Trifoliastrum alpinum purpureum, " humile, caule nudo, simplici, foliis angustioribus, acutis, floribus amplioribus, siliquis planis, " incurvis et dispermis „.

(7) *Opuscula botanica* posthuma a Johanne Jacobo filio in lucem edita, p. 73. Venetiis, typ. Dom. Lovisa (1730).

(8) *Hortus Cliffortianus,* p. 499 (Amstelodami, 1737).

(9) *Plantae Veronenses* seu Stirp. quae in agro Veronensi reperiuntur methodica Synopsis, vol. II, pag. 95 (Veronae, Typis Seminarii), 1745.

(10) *Methodus foliorum* seu plantae florae Monspeliensis, p. 185 (A la Haye, 1751).

(11) *Historia stirpium indigenarum Helvetiae* inchoata, vol. I, p. 161, n° 369 (1768): " Trifolium " scapis radicatis, floribus racemosis, foliis ellipticis, lanceolatis integerrimis „.

HABITAT.

(Bo. Erbario Boissier — B. Erbario Belli — C. Erbario Cesati — F. Erbario Firenze — G. Erbario Gibelli — R. Erbario Roma — T. Erbario Torino — L. Erbario Levier — S. Erbario Sommier).

Piemonte e Liguria,

Monte Armetta (Liguria) . . . . leg.	*Gentili* F.
Colle di Tenda e Colle della Perla (Alpi maritt.)	*Belli*
Alpi sopra Viozennnes	*Ricca* F.
Liguria (?)	*Bertoloni* R.
Moncenisio (al Montanvert), al Lago etc. . .	*Pedicino* R. - *Cesati* C. - *Arcangeli* F. - *Parlatore* F. - *Bucci* F. *Balbis* T.
Riva (Valsesia)	*Carestia* R.
Punta della Mologna (Alpi Biellesi)	*Malinverni* R.
Passo della Croce Mulattiera sopra i Melezet (Bardonecchia) Alpi Cozie	*Berrino* T.
Valdieri (Alpi marittime), Vallone della Meris (lago della Sella)	*Ferrari e Belli* T.
Monte Tabor presso Bardonecchia (Alpi Cozie)	*Berrino* T.
Colle di Tenda ad ovest del Passo (Alpi maritt.)	*Ungern - Sternberg* T. - *Reuter* F.
Monte Bego presso Tenda (Alpi marittime) .	*Ungern-Sternberg* T.
Sciaccari e Mappa (Alpi marittime)	*Ungern-Sternberg* T.
Alpi di Giaveno (Prov. di Torino)	*Giusta* T. - *Delponte* F.
Monte Rocciamelone (Susa, Prov. Torino) . .	*Berrino* T.
Madonna delle Finestre	*Giusta* T.
Alle " Echelles „ presso Bardonecchia (Alpi Cozie)	*Berrino* T.
Monti d'Oropa (Biella) all'Alpe della strada .	*Belli* B.
Valsesia (Alpi Pennine)	*Carestia* F. - *Gibelli* G.
Monti d'Oropa (Biella, Alpi Pennine	*Cesati* F.
Monte Turlo (Alpi Biellesi)	*Carestia* C. F.
Colle di St-Théodule (Alpi Pennine)	*Belli* B.
Gressoney (Alpi Pennine)	*Carestia* F. - *Piccone* F.
Alagna (Valsesia)	*Carestia* F.
Alpi di Garessio (Alpi marittime)	*Berti* F.
Argentera (Alpi marittime)	*Parlatore* F.
Monte Cramont (Alpi Graje)	*Parlatore* F.
Col du Geant (Alpi Graie)	*Parlatore* F.
Orno (Col di Tenda, Alpi marittime)	*Borgeau* F.
Gran S. Bernardo (Alpi Graje)	*Parlatore* F.
Alle Balze di Cesare presso Crissolo (Monviso)	*Ferrari* T.
Vachère sopra Angrogna (Alpi Cozie)	*Rostan* F.

Lombardia, Veneto, Emilia, Toscana.

Corno alla Scala (Bologna) . . . . leg.	*Pirazzoli e Tassinari* R.
Val Viola (Alta Valtellina fra Senago e Campo)	*Levier* L.
Val Furva (Alta Valtellina), 1700 metri . . .	*Levier* L.
S. Caterina in Val Furva (id.)	*De Notaris* R. - *Parlatore* F.
Bormio (id.), 1500 m.	*Sommier* S.
Fusio (Val Sambuco)	*A. Franzoni* R.
Monte Moro (Alpi Leponzie)	*Cuboni* R.
Monte Legnone (Lecco) (flore albo).	*Cesati* C. - *Balsamo* F.
Valle Formazza (Ossola)	*Gibelli* C. - *Cesati e Negri* C. - *Negri* F.
Monte Canossio (Ossola), 2200 m.	*Rossi e Malladra* T.
Val Toggia (Ossola)	Id. Id.
Moncucco (Ossola), m. 2000	Id. Id.
Valcamonica (all'Incudine).	*Caldesi* F.
Spluga	*Cesati* F.
Val Brembana (a Branzi)	*V^a Rampoldi* F.
Tonale (pascoli alpini)	*Parlatore* F.
Sulla Zeda in Valle Intrasca (Lago Maggiore) .	*De Notaris* F.
Alpi Bresciane (Colombine)	*Parlatore* F.
Monte Rosa	Erb. *Accad. Georgofili* F.
Ca di S. Marco (Alpi del Bergamasco) . . .	*Rota* C.
Boscolungo (Appennino pistoiese)	*Forsitz Mayor* L. - *Parlatore* F.
Appennino Estense	*Targioni-Tozzetti* R. F.
Sommità del monte Cimone di Fanano (Alpi Apuane)	*Cesati* C.
Prati del Cimone (Alto Appennino Modenese) .	*Gibelli* G. - *Parlatore* F.
Alpi di Cusna (Appennino Reggiano)	*Ferrari* G.
Pizzo Stella sopra Campodolcino e Valle di Lei .	*Gibelli* G.
Sul Rondinajo (Appennino Lucchese)	*Giannini* F.
Sul Procinto (Alpi Apuane)	*P. Savi* F.
Cimone di Caldaja (Appennino modenese) . .	*Parlatore* F.
Alpi di Mommio	*Calandrini* F.
Alpe di Borga	*Parlatore* F.
Prati di Macerino	*Parlatore* F.

Località non italiane viste negli erbarii.

Svizzera.

M^t Jouly (Vallese) “ Planta major helvetica „ . leg.	*Em. Thomas* Bo.
Alpi Bernesi	*Levier* L.
Grindelwald (Oberland Bernese)	*Christener* L.
Hospice du Simplon (Valais).	*Levier* L. - *Cuboni* R.

Faulhorn (Alpi Bernesi) 6-7000′	*Pedicino* R.
S. Bernardino Grigioni	*DNris* R.
S. Gottardo	*Sommier* S. - *Parlatore* F.
S. Moritz	*Sommier* S.
Camfer (Grigioni)	*Rosa Cesati* C.
Spluga	*Cesati* C.
Lucomagno	*Franzoni* F.

Francia.

Pyrénées (environs de Barèges) . . . . . . leg.	Erb. *Fauché* Bo.
Colle d'Olle et Glaciers de St-Sorlin d'Arves (Maurienne-Savoie)	*E. Didier* Bo.
Mont Dore (Auvergne)	Bo. - *Lecoq* (Clermont Ferrand) R.
Vallon de Ségure près Abriès (Hautes Alpes) 2000 m.	Bo.
Pierre sur Haute (Loire)	Frères *Faustinien et Gandoyer* L. *Gastien* G.
Pelouse de Gondran (Briançon)	Erb. *Fauché* Bo.
Pyrénées centrales: Esquierry	*J. E. Zetterstedt* L.
Eaux bonnes (Pyren. occid.)	*J. Ball* L.
Pyrenées (Lheris)	Erb. *Francavillanum* R.
Lautaret (Hautes Alpes)	*J. de Parseval Grandmaison* R.

Spagna.

Pico Cordel (Castella Vetus)	Bo.
Pyrenées Arragon. in pascuis Jugi Puerto de Canfranc., 3600 m.	*Willkomm* Bo.

Austria e Tirolo Italiano.

Monte Iaufen a Sterzing, 2000 m. (Tirolo centrale) leg.	*Huter* L.
Alpi Tirolesi	Erb. *Pedicino* R.
Alpi del Tirolo meridionale	*Hoffman* T.
Tirolo Austro-orient. Lienz in monte Schleinitz-Iselrein 7000′	Rev. *Gander* T.
Trento (Bondone) Col Santo	Fratelli *Perini* C. F. - *Ambrosi* F.
Alpi di Duron e monti di Passirio (Trento) .	Fratelli *Perini* F.
Val Fassa (Trentino)	*Bracht* F.

DISTRIBUZIONE GEOGRAFICA.

Pirenei spagnuoli, Asturie, Pirenei e Alpi Francesi, Svizzere, Tirolesi, Italiane, Mont Dore, Appennino boreale, Carpazii (Transsilv.). NYMAN., l. c.

NB. — Maratti nella Flora Romana, l. c., ascrive anche il *T. alpinum* alla sua dizione come già vi ascrisse il **T. Lupinaster**. Dietro notizie avute dal Prof. Pirotta crediamo che si tratti anche qui di un errore, o che tutt'al più possa essere stato importato per caso, quantunque anche questa supposizione sia un po' azzardata trattandosi di specie affatto alpina e che difficilmente vive a lungo anche nelle regioni fredde, se portato alla pianura. — Il limite più basso a cui sia disceso a mia cognizione il *T. alpinum* sarebbe il Monte Summano nel Vicentino ivi raccolto dallo Zannichelli. Così il Prof. Saccardo scrissemi in proposito: " *A pag. 73 delle Opuscula* " *botanica leggesi fra le piante raccolte dall'Autore in Monte Summano territorii Vicen-* " *tini: T. alpinum flore magno radice dulci Casp. Bauhin. Pinax, p. 328.* T. alpinum L. " *Non abbiamo in erbario detta specie dal M. Summano ma dalle vicine Alpi verso il* " *Trentino. Il Summano è alto 1300 metri e ignoro se il T. alpinum possa veramente* " *trovarsi a tale altezza. Generalmente Zannichelli è autore accurato* ". — Per conto mio non ho mai visto il *T. alpinum* discendere al disotto di 1800 metri; ignoro se fu raccolto più in basso: ma le località qui riportate paiono accennare al più a questo limite estremo. Il limite più elevato, sarebbe dato dalla quota di Wilkomm metri 3600 s. m. nei Pirenei Arragonesi. — Il Comolli nella Flora Comensis, l. c., dice che il *T. alpinum* abita in tutti i monti della provincia della Valtellina e del Canton Ticino che sorpassano i 6000 piedi.

Subspecies I. — **T. polyphyllum** C. A. Meyer.

Verzeich. Pflz. am Caucas., p. 159 (1831) — *Dietrich* Syn. pl. Sect. IV, p. 1003 — *Ledeb.* Fl. Ross. Vol. I, p. 551 (1842) — *Valpers* Repertor. Vol. I, p. 642 (1842) — *Boiss.* Fl. Or. Vol. II, pag. 148 (1872) — *Celakowsky*, l. c., p. 42 (1874).

Subvar. α. stenophyllum Nob. in herb. Boissier (Aucher Eloy Herb. d'Orient) Lazistan.

Var. β. ochroleucum *Sommier* et *Levier* (in litteris et herb.).

Icon nostra. — Tab. II, fig. C.

" *Capitulis laxifloris (7-12); floribus magnis (18-*(20 media)*-22) mill. longis, duplicatim verticillatis; verticillastris superpositis, infero 5-6, supero 2-3 floro, saepissime reducto unifloro, omnibus involucratis, involucello tenui, albo-membranaceo-scarioso, dentato-crenato, glabro; mucrone in medio florum superiorum (axi inflorescentiae) subnullo vel nullo, floribus cymosis — Calyce corollam dimidiam subaequante vel longiore* (var. β) — *Dentibus calycinis triangularibus, acuminatissimis, basi et facie interna pilis plus minus raris obsitis — Foliolis 5-7, rarissime 9; nervis secundariis tenuibus — Corolla purpurea vel* (var. β) *ochroleucis* " Nob. ♃.

Var. β. " *Floribus dilute ochroleucis, vel citrinis, fere albis — Calyce corollam dimidiam parum superante* " (Sommier et Levier in litt.).

Descrizione.

Perenne.

Radice fittonosa, grossa, legnosa, più o meno ramificata. Del resto simile affatto a quella del *T. alpinum.*

Caule come nel *T. alpinum;* reticolo formato nel residuo delle stipole infime sfilacciate, di colore più chiaro, quasi biondo.

Foglie glaberrime, le inferiori più lungamente picciolate, le superiori meno; picciuolo grosso, subcilindrico, appena appiattito superiormente. Stipole quasi identiche a quelle del *T. alpinum* con code un po' più sottili, subulate, massime le supreme.

Foglioline sessili (5, 7, di rado 9, o 3, 4), lanceolate, o lanceolato-lineari, scanalate a doccia alla base cuneiforme, allungate, acute od acuminate, di rado ottuse, con nervature diritte e poco marcate, con margini quasi integri o leggermente denticolati.

Infiorescenza. — Peduncoli ascellari solitarii più lunghi della foglia corrispondente o di rado più brevi, cilindrici, glabri. Capolini come quelli del *T. alpinum,* soventi con minor numero di fiori (3, 8) formati da due verticillastri sovrapposti, ciascuno involucrato dal collaretto proprio, membranaceo, scarioso, crenato, enerve, l'inferiore più ricco di fiori, il superiore spesso ridotto ad uno o due fiori con collaretto rudimentale e privo dello spuntone mediano che continua l'asse fiorale indefinito.

Calice conforme a quello del *T. alpinum,* verdognolo, o spesso colorato in rossigno. Tubo leggermente saccato alla base e sul lato superiore, con dieci nervi: cinque dentali più validi, cinque commissurali più esili, glabro, o con pochi peli flagelliformi alla base dei denti ed internamente in corrispondenza della fauce, più di rado con villi sparsi su tutta la superficie esterna insieme alle solite produzioni glandulose, clavato-pedicellate. Denti cinque triangolari, allungati, acuminatissimi, l'inferiore lungo il doppio del tubo e metà del vessillo o poco più (var. β), glabri, o con qualche pelo al margine massime inferiormente.

Corolla porporina, ovvero (var. β) giallo-citrina, persistente a lungo e leggermente scariosa.

Vessillo quasi libero dagli altri petali o con leggerissimo cercine basilare, oltrepassante il calice del doppio (denti compresi) o poco meno (var. β), oblungo-obovato, arrotondato all'apice, troncato o smarginato, con nervature percorrenti tutto il lembo, forcate e riunentisi in basso in pochi fasci un po' più robusti, dapprima compiegato sugli altri petali, poi rialzato alquanto sul davanti al momento della fecondazione, poi nuovamente compiegato. Ali irregolarmente lanceolate, ottuse, con breve auricula poco bollosa. Carene cultriformi con margine superiore retto, l'inferiore convesso, ma ottuse, un poco più brevi delle ali non auriculate.

Stami come nel *T. alpinum.*

Ovario, idem.

Legume membranaceo, oblungo-elittico, glaberrimo, deiscente sulla sutura ventrale, del resto come nel *T. alpinum.*

Semi due, subgloboso-compressi, cordiformi, verdognolo-glauchi, lisci.

Varietà, Letteratura e Critica. — Osservazioni.

Il *T. polyphyllum* del Caucaso è senza discussione una pianta che dimostra una origine comune col *T. alpinum* delle Alpi. È impossibile osservare queste due specie senza essere colpiti dall'estrema rassomiglianza esteriore rivelante la strettissima loro affinità genealogica; a tal punto che, tolto il fatto costante della polifillia nel primo e fatta astrazione da alcuni altri pochi caratteri leggerissimi, per quanto costanti, si crederebbe di aver a che fare con due varietà di una stessa specie. Comune ad entrambi è il carattere, validissimo qui, dedotto dalle fibrille sfacelate delle vecchie stipole, comune la glabrescenza generale, il portamento, l'infiorescenza, la forma dei petali e la presenza di due sorta d'infiorescenza contemporaneamente esistenti, cioè le une sviluppate, le altre rudimentali. Identica poi l'ubicazione nelle alte regioni montuose, e finalmente parallele le variazioni nel colore della corolla. Difficilmente la pratica del concetto di Stirps nel nostro significato troverà altrove nel G. *Trifolium* una più bella applicazione. Diamo qui un piccolo schema delle differenze intercedenti fra *T. alpinum* e *T. polyphyllum*:

T. alpinum L.

Foglioline 3, rarissimamente 5.

Due verticillastri ad ogni asse fiorale; di rado tre (il supremo ridotto ad un fiore involucrato); più di rado ancora un solo. Verticillastro supremo con spuntone mediano rappresentante l'asse fiorale abortito, raramente mancante.

Calice un po' più lungo rispetto alla corolla. Denti triangolari, acuminati, evidentemente trinervi fin quasi all'apice, con qualche trabecola trasversale. Tubo con nervature commissurali e dentali *ben rilevanti e spiccanti* sul tessuto sottile interposto, affatto glabro.

T. polyphyllum C. A. Meyer.

Foglioline più spesso 5; più di rado 7 o 9.

Due verticillastri ad ogni asse fiorale; più di rado uno solo; il superiore ridotto ad uno o due fiori involucrati da un collaretto rudimentale.

Manca lo spuntone apicale in mezzo al collaretto superiore rappresentante dell'asse, o ridotto ad una prominenza mammillare.

Calice un po' più breve per rapporto alla corolla. Denti sottilissimi, subulati. Nervature del calice, massime le commissurali *meno evidenti* e con trabecole *più scarse.* Tubo più spesso colorato in rossigno con qualche villo denticulato alla fauce ed alla base dei denti.

Il *T. polyphyllum* osservato allorchè germina, dopo di aver emesso i cotiledoni, dà origine a foglie che portano 3 o 4 foglioline: le susseguenti ne portano più frequentemente cinque, le supreme talvolta sette, rarissimamente nove.

Il *T. alpinum* ne porta, come vedemmo, sempre tre ad ogni picciuolo, ma Bertoloni scrive aver osservato il *T. alpinum* con foglie " rarissime quinata ". Io non ho mai potuto osservare questo fatto nè negli erbarii nè sul vivo, ma, ritenendo esatta la asserzione del Bertoloni, essa parlerebbe ancor una volta in favore della colleganza genetica fra *T. alpinum* e *polyphyllum.*

Quest'ultima specie, quale io l'ho esaminata nell'erbario Boissier, presenterebbe due forme abbastanza distinte. L'una raccolta dal Meyer stesso e rispondente ai caratteri da lui dati e nella *Flora orientalis*, l. c., dal Boissier; l'altra è notevole per la grossezza della radice e per la forma tozza dei rami, grossi, brevissimi, all'apice dei quali stanno raggruppate delle foglioline minutissime lungo poco più di 15 mill., strette, lineari (Erbario Aucher, Eloy. Herb. d'Orient). In questo saggio il calice giunge coi denti appena al terzo della corolla.

Con un solo esemplare è difficile il dire se questa sia una varietà fissa: ad ogni modo io l'ho enumerata come una sottovarietà " stenophyllum „, la quale corrisponderebbe fino ad un certo punto all'omonima del *T. alpinum*. Anche nel saggio tipico, raccolto dal Boissier e più sopra citato, il calice arriva coi denti appena al terzo della lunghezza del vessillo ed i denti sono abbastanza larghi, acuti, ma non acuminati come nella var. β, di cui entriamo a parlare.

Questa bella forma di *T. polyphyllum* ci fu comunicata dai signori D[r] Sommier e Levier, che recentemente hanno visitato la catena del Caucaso, riportandone una ricca messe di piante. Il sig. Sommier annotò i saggi inviatici colle seguenti parole: " *T. polyphyllum*, C. A. Mey. — Flores ochroleuco-citrini nec purpurei ut Bois-
" sier Fl. Or. dicit. A descriptione Boissieri differt praesertim colore diluto ochro-
" leuco (fere albo) florum; dentibus calycinis longioribus (calyce corollam mediam
" excedente). A descriptione originali C. A. Meyeri differt dentibus calycis inaequa-
" libus. Differentiae paucae nec constantes. „

A me pare che l'egregio Autore abbia dato troppo poca importanza a questa varietà, la quale, a quanto ho potuto osservare dalle località riferite nei saggi è abbastanza diffusa. Le differenze accennate dal Sommier sono esattissime e tutti gli esemplari raccolti nel suo erbario (all'infuori forse dei saggi nani dei luoghi elevatissimi, nei quali pare che la corolla si sviluppi a preferenza del calice) mostrano in modo costante i caratteri da lui designati. E queste differenze si fanno molto più evidenti se si paragonano le piante in questione con quelle autentiche dell'erbario Boissier. Io l'ho quindi ritenuta per varietà distintissima nella mia rivista.

La var. β presenta essa pure come il tipo delle variazioni nella forma e nelle dimensioni delle foglioline, in rapporto specialmente collo sviluppo generale della pianta. Così ho visto forme nane (vedi *habitat*) con foglioline quasi lanceolate, ottuse e con nervature un po' più spiccate corrispondenti al saggio autentico di Meyer nell'erbario Boissier, e delle forme evolutissime parallele a quelle del *T. alpinum*.

Habitat.

Alpi del *Caucaso occidentale* leg. C. A. Meyer (1842) Erb. Boissier.

Subvar. *stenophyllum*.

Lazistan (Aucher-Eloy. — Herbier d'Orient) — Erbario Boissier.

Var. β. **ochroleucum** Sommier et Levier.

Svanetia libera ad limites *Abkhasiae* in montibus inter flumina *Neuskra et Seken* in rupibus circ. 2600-2800 m. $^s/_m$, 22 aug. 1890, leg. Sommier et Levier.

Abkhasia in valle fluminis *Kliutsch* infra jugum *Klukkow* 2700-2800 m. s/m, 28 aug. 1890, leg. Sommier et Levier.

(Forma nana) — In jugo "*Tieberdinski perival*" dicto, inter flumina *Tieberda* et *Do-ut*, ditionis *Kuban*. 2500-2600 m. s/m circa; in pascuis alpinis, II, 2 7bre 1890, leg. Sommier et Levier.

Species 2a.

T. nanum Torr.

in Ann. Lyc. N. York 1, 35, t. 3 — Watson in Proceed. Am. Acad. XI, p. 128 — Rothr. Pl. Wheeler — Walpers Repert. Vol. I, p. 643 — Dietr. Syn. pl. Sez. IV, p. 1003 — Gray in Am. Journ. Sc. II, 33, p. 409.

Questa sottospecie non è europea, ma abita le Montagne Rocciose nell'America Nord. — Potei studiarla sopra pochi saggi comunicatimi dalla cortesia dell'amico Prof. Mattirolo che li ebbe dal Prof. Rothrock di Filadelfia, e raccolti nella regione del Rio Colorado all'enorme altezza di 12000′ (1). Il cartellino accompagnante i saggi portava scritto quanto segue:

" Exploration and Surveys West of the 100 th. meridian — Lieutenant G. M. " Wheeler Com'ding; Corps of Engineers U. S. Army, Expedition of. 1873 ".

L'aspetto esteriore, la *facies* del *T. nanum* è assolutamente quella del *T. alpinum,* tanto che, osservati così all'ingrosso, si potrebbero scambiare l'uno per l'altro. Ma un esame un po' attento lascia vedere nel *T. nanum* delle particolarità curiosissime, che nel *T. alpinum* non si ritrovano. La più essenziale è questa. I germogli scapiferi si originano dai germogli sterili (fogliferi soltanto) all'ascella di una stipola perfettamente conformata, e crescono portando delle stipole biancastre scariose, diversamente foggiate da quelle che hanno code e foglioline. Sono cioè senza code, rigonfie, ampie, e si accavalcano le une sulle altre a cagione degli internodii brevissimi; e finalmente ad un certo punto si saldano pei loro lati, formando una specie di collare grande tre-quadri-fido, dal quale spunta il peduncolo o scapo fiorale, che porta due o tre fiori grandi come quelli del *T. alpinum,* ma ognuno dei quali ha un secondo collaretto scarioso-membranoso proprio.

Il calice del *T. nanum* ha i denti triangolari, cordati alla base, più brevi del tubo o tutt'al più subeguali ad esso. L'ovario è oblungo-lineare, *poliovulato,* ed in ciò si distingue anche dal *T. alpinum.* — Nei saggi esaminati sgraziatamente mancava il legume. Nel resto del fiore le differenze dal *T. alpinum* sono quasi nulle.

Certamente occorrerebbe un materiale fresco, per poter studiare meglio l'infiorescenza così strana del *T. nanum.* Se mi sarà dato di farlo in tempo avvenire, potrò anche meglio stabilire se questa sia una specie od una sottospecie del *T. alpinum* stesso. Ma per ciò fare occorrerebbe poter studiare le forme, che crescono a lui vicine sui Rocky-mountains, cosa non troppo facile. Certo è che il *T. nanum* appartiene alla *Stirps Glycirrhizum.* N. (Bertol).

(1) Il *T. alpinum,* come già si disse, venne raccolto ad altezza maggiore (3600 metri nei Pirenei Arragonesi — Wilkomm).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA I.

1. Sezione longitudinale di una gemma ipogea di ***T. Lupinaster*** — *a*) Stipola del capolino inferiore *a'* — *b*) Stipola del capolino superiore *b'* — *y* Stipole afille senza capolini o rami all'ascella (ingrandimento $^{20}/_{1}$).

2. Infiorescenza pseudo-scorpioide di ***T. Lupinaster*** — *a*) Ricettacolo foggiato a palmetta visto pel dorso — *b*) Fiori inseriti all'apice organico del capolino spostato in basso e tabescenti (ingrand. $^{4}/_{1}$).

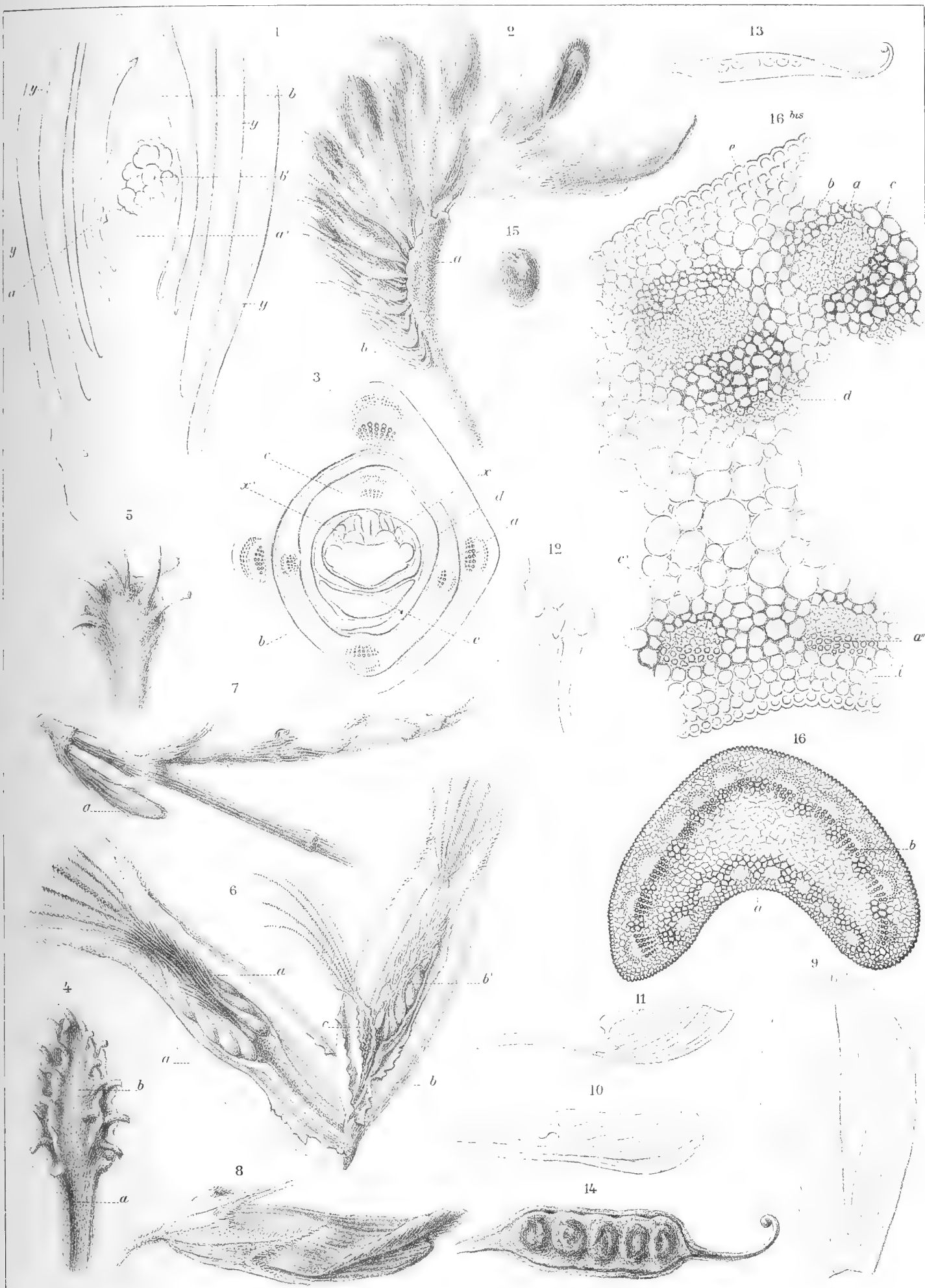
3. Sezione trasversa di una gemma ipogea del ***T. Lupinaster*** passante un po' al disopra del punto in cui due capolini stanno in boccio — *a*) cordoni vascolari delle stipole afille — *b-c*) Stipole più interne (superiori) disposte secondo la divergenza $^{1}/_{2}$ — *d*) Ricettacolo del capolino inferiore — *e*) Ricettacolo del capolino superiore tagliato trasversalmente e ricevente nella sua concavità, l'inferiore del quale si vedono solo due fiori rappresentati da due mamelloni *x* e *x'* (ingrand. circa $^{40}/_{1}$).

4. Ricettacolo del ***T. Lupinaster*** foggiato a palmetta ovata coi peduncoli fiorali inseriti all'interno dei due collaretti di brattee, e mostrante il peduncolo scanalato *a*, terminante nella superficie interna *b* allargata e concavo-pianeggiante (ingrand. $^{6}/_{1}$).

5. Ricettacolo come sopra tendente a divenire orizzontale, molto meno schiacciato lateralmente (ingrand. $^{6}/_{1}$).

6. Infiorescenza in boccio del ***T. Lupinaster*** — *a*) Stipola inferiore fogliuta avviluppante il capolino *a'* e contemporaneamente la stipola *b*; la quale a sua volta abbraccia il capolino *b'* — Il capolino *c* ravvolto nella corrispondente stipola si applica contro la base del ricettacolo del capolino *b'*, e tutto questo corpo si applica a sua volta contro la base del ricettacolo del capolino *a'* — I capolini sono nella figura divaricati e le guaine tagliate per mostrare i punti di pressione reciproca sui ricettacoli e sui peduncoli fiorali (ingrand. $^{10}/_{1}$ c. c.).

7. Porzione di rizoma sotterraneo del ***T. Lupinaster*** portante due gemme ipogee colle stipole afille, di cui una in via di sviluppo (ingrand. $^{3}/_{1}$).

Lit. Salussolia-Torino

8. ***T. Lupinaster*** — Fiore completo.

9. Vessillo (ingrand. $^4/_1$).

10. Ala " "

11. Carena " "

12. Stami " "

13. Ovario " "

14. Legume " "

15. Seme " "

16. Sezione trasversa di un peduncolo fiorale di ***T. Lupinaster***.

16 bis. Porzione ingrandita dello stesso peduncolo che dimostra la differenza di sviluppo soprattutto dei fasci fibro-vascolari nelle due regioni esterna ed interna del peduncolo fiorale — *i*) Faccia interna — *e*) Faccia esterna — *a*) Cuffia di elementi sclerenchimatosi (libro duro) — *c*) Xilema — *d*) *Regione endoxilare* del fascio, rappresentata da elementi sclerificati in parte ed in parte parenchimatosi, simili a quelli del libro esterno — Nella faccia interna del peduncolo i fasci vascolari sono molto più piccoli; la cuffia di libro duro è molto meno sviluppata, lo *xilem* è ridotto ad una sola serie di vasi punteggiati con qualche rara trachea, e nella regione *endoxilare* mancano quegli elementi parenchimatosi sclerificati rappresentati nella figura alla lettera *d* nei fasci esterni del peduncolo.

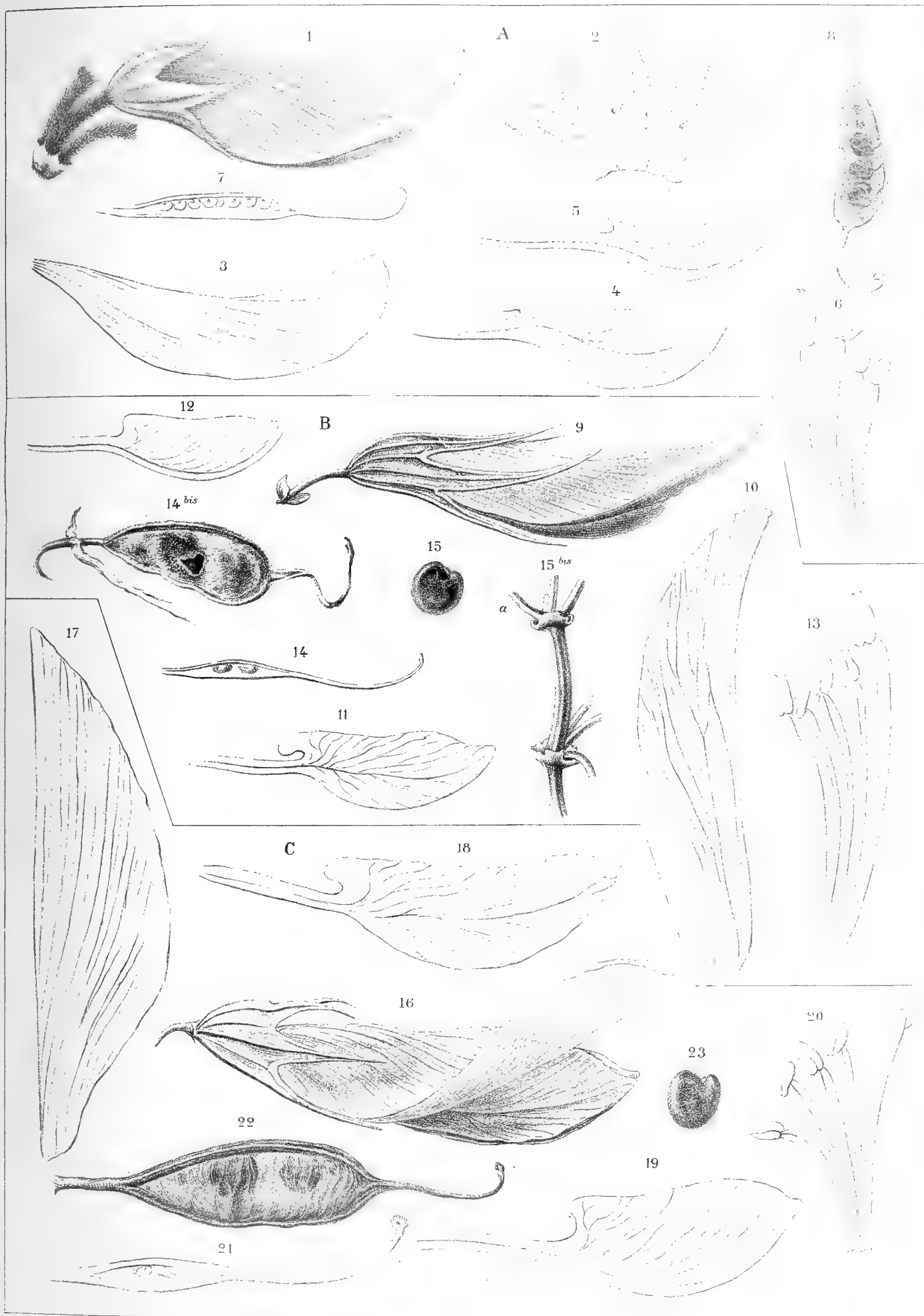
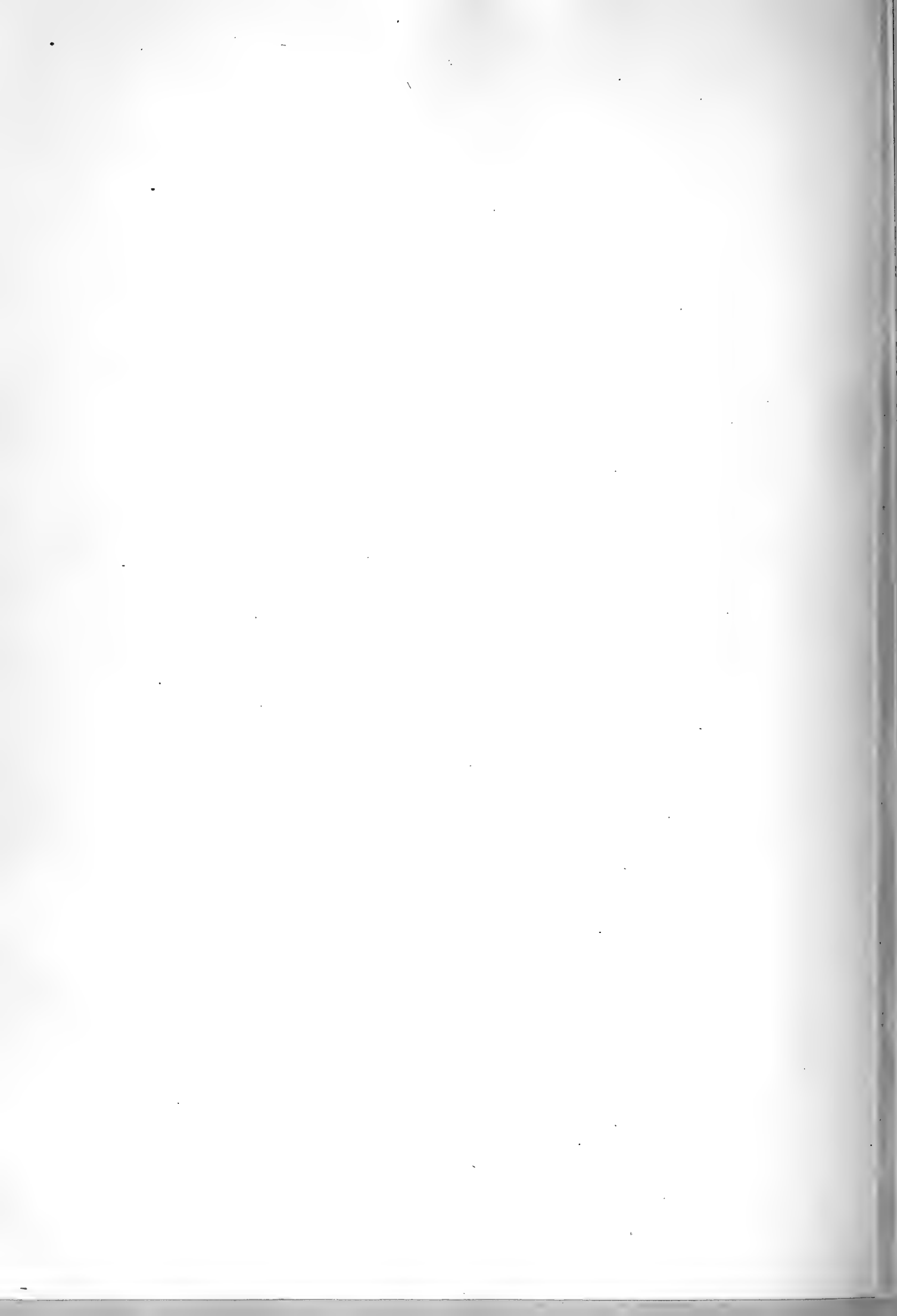
SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA II.

A) ***T. eximium*** Steph. — 1. Fiore completo — 2. Calice aperto — 3. Vessillo — 4. Ala — 5. Carena — 6. Stami — 7. Ovario — 8. Legume.

B) ***T. alpinum*** L. — 9. Fiore completo — 10. Vessillo — 11. Ala — 12. Carena — 13. Stami — 14. Ovario — 14^{bis}. Legume — 15. Seme — 15^{bis}. Asse dell'infiorescenza col mozzicone rudimentale sporgente all'apice.

C) ***T. polyphyllum*** C. A. Meyer. — 16. Fiore completo — 17. Vessillo — 18. Ala — 19. Carena — 20. Stami — 21. Ovario — 22. Legume — 23. Seme.

NB. L'ingrandimento in tutte queste figure è circa $^4/_1$ salvo per gli stami nei quali è maggiore.

A
1
2
8
7
5
3
4
6
12
B
9
14 bis
10
15
15 bis
a
17
14
13
11
C
18
16
20
23
22
19
21

			ERRATA	CORRIGE
A pag.	237 linea	8 (dal basso)	legume	ovario
„	259 „	4 (dall'alto) in nota	*T. Lupinaster* sottosezione .	*T. Lupinaster* alla Sottosez.
„	280 „	ultima	nulla. *Pona* (x)	nulla (x). *Pona*
„	280 „	ultima	la descrisse ..... e la figurò .	lo descrisse ..... e lo figurò
„	289 „	2 (dal basso) in nota	maggiore	press'a poco eguale

Nota alla pag. 284:

Fra le località spagnuole riportate per l' “ *Habitat* „ del *T. alpinum* havvi la seguente: “ Pyrenées “ Arragon. in pascuis Jugi Puerto de Canfranc. 3600 metr. „. — Il cartellino di Willkomm portava questa quota altimetrica scritta evidentemente per inavvertenza, poichè, considerando anzitutto che la cima più alta dei Pirenei centrali non raggiunge i 3500 metri, non è poi supponibile che la pianta sia stata raccolta proprio sull'estrema vetta priva di qualsiasi vegetazione.

Nota alla pag. 285:

Ho potuto avere dalla cortesia del sig. Burnat di Vevey le seguenti località dove fu raccolto il *T. alpinum*, le quali proverebbero come esso scenda a livelli relativamente bassi nelle Alpi marittime:

“ Entre les vallées de Cairos et de Ceva près de Fontan (Dép. des Alp. marit. franç.) 1500 m. s/m.
“ Près de Beuil (Dép. des Alp. marit. franç.) Herbier Marcilly - 1450 m. s/m.
“ Caussols (près de Grasse - France) Abbé Pons in litteris - 1100 m. s/m. „

SULLE

EQUAZIONI ABELIANE RECIPROCHE

LE CUI RADICI

SI POSSONO RAPPRESENTARE CON x, θx, $\theta^2 x$, ..., $\theta^{n-1}x$.

MEMORIA I

DI

V. MOLLAME.

Approvata nell'Adunanza dell'11 Giugno 1893.

Se $m+1$ è un numero primo, l'equazione seguente

$$x^m + x^{m-1} + \ldots\ldots + x + 1 = 0, \tag{1}$$

che è quella della divisione del cerchio, oltre ad essere reciproca, è anche abeliana, come è noto. Le sue radici sono i termini della serie

$$\alpha,\ \alpha^g,\ \alpha^{g^2},\ \ldots\ldots,\ \alpha^{g^{m-1}}, \tag{2}$$

nella quale g è una radice primitiva del numero primo $m+1$ ed α è una radice qualunque, diversa da 1, dell'equazione binomia

$$x^{m+1} = 1\,, \tag{3}$$

le cui radici, salvo 1, son tutte primitive.

Inoltre, imaginando divisa in m parti uguali la circonferenza di un cerchio, se le radici (2) si pongano, ordinatamente, nei punti di divisione, risulteranno reciproche quelle che sono negli estremi di un diametro, per es. α^{g^k}, $\alpha^{g^{k+\frac{m}{2}}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, come a suo tempo verrà provato.

Quest'ultima proprietà e l'altra precedentemente detta, cioè che ogni radice α, diversa da 1, dell'equazione (3) dà luogo ad una serie (2), i cui termini sono le radici di un'equazione abeliana reciproca, non sono che casi particolari di quel che avviene per alcune radici

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots,\ x_\nu) \tag{4}$$

di certe equazioni più generali dell'equazione (3). Se $M(x) = 0$ è una di tali equazioni, con ogni sua radice x appartenente al sistema (4) si può, mediante una determinante funzione razionale $\theta(x)$, formare la serie

$$x,\ \theta(x),\ \theta^2(x),\ \ldots\ldots,\ \theta^{n-1}(x)$$

i cui termini sono le radici di un'equazione abeliana reciproca, di grado pari n e per la quale $\theta^k(x)$ e $\theta^{k+\frac{n}{2}}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n-1)$ sono radici reciproche.

Le radici (4), il cui numero ν è multiplo di n, sono quelle di una equazione $F(x)=0$, di grado ν, con coefficienti razionali rispetto a quelli dell'equazione $M(x)=0$.

In particolare, l'equazione

$$x\theta^{\frac{n}{2}}(x) = 1, \tag{5}$$

nella quale n è un numero pari positivo, e

$$\theta(x) = \pm \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots\ldots + a_0}{a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots\ldots + a_r},$$

è una delle anzidette equazioni. Essa può divenir binomia, ed allora si riduce all'una od all'altra delle seguenti

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1, \tag{6}$$

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1 \tag{7}$$

nella seconda delle quali i numeri interi e positivi r ed $\frac{n}{2}$ devonsi supporre dispari.

Nel campo delle radici (4) trovansi le radici primitive delle equazioni (6) e (7) (*) allorchè ad una di esse si riduca l'equazione (5).

Con le radici primitive dell'equazione (6), o della (7), si può comporre, come è noto, un'equazione razionale, $G(x) = 0$, il cui primo membro è perciò un fattore razionale di $F(x)$, quando l'equazione $F(x) = 0$ è quella che si ricava dalla (6) o dalla (7).

Se $f(x) = 0$ è un'equazione abeliana reciproca di grado n, le cui radici siano rappresentabili con x, $\theta(x)$, $\theta^2(x)$, ..., $\theta^{n-1}(x)$, il numero μ' nella radice $\theta^{\mu'}(x)$, che è reciproca dell'altra radice x_μ, può essere o indipendente da μ, e quindi dalla scelta della radice diretta x_μ, ovvero variare con μ. Dalla prima di queste due ipotesi fondamentali scaturisce una classe di equazioni abeliane reciproche fra le quali trovasi quella della divisione del cerchio: esse formano il soggetto della presente memoria.

(*) Per le radici primitive dell'equazione binomia $x^m = -1$ veggasi la mia Nota, *Sulle radici primitive dell'unità negativa* (" Rendiconto della R. Accademia delle Scienze di Napoli ", Fascicolo 7° a 12°, 1892).

§ 1.

Sia

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

un'equazione di grado n, le cui radici, indicando con x una qualunque di esse, siano rappresentate dai termini della serie

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x,\ \ldots\ldots,\ \theta^{n-1} x, \tag{2}$$

nella quale si è posto per brevità di scrittura

$$\theta^2 x = \theta\,[\theta\,(x)],\ \theta^3 x = \theta\,(\theta^2 x),\ \text{ecc.}$$

e si è denotata con $\theta\,(x)$ una funzione razionale di x, tale, che per ogni valore di x che sia radice dell'equazione (1) risulti

$$\theta^n x = x, \tag{3}$$

e

$$\theta^{n-\nu} x \text{ non } = x, \tag{4}$$

qualunque sia il numero ν scelto nella serie $1, 2, 3, \ldots, n-1$.

In virtù delle ipotesi fatte sulle sue radici, l'equazione (1) è abeliana. Dalla equazione (3) e dalla condizione (4) si deduce poi immediatamente che al numero k, o *esponente di* θ in $\theta^k x$, se x è radice dell'equazione (1), si può aggiungere o togliere un multiplo di n, e che da $\theta^k x = \theta^{k'} x$ segue che la differenza fra k e k' deve essere un multiplo di n.

La funzione $\theta\,(x)$ si dirà *funzione generatrice* delle radici dell'equazione abeliana (1).

Suppongasi inoltre che l'equazione (1) sia reciproca e, scelta una sua radice x_μ, ne sia $\theta^{\mu'} x_\mu$ la radice reciproca. L'esponente μ' di θ in $\theta^{\mu'} x$ potrà essere o indipendente da μ, cioè dalla scelta della radice x_μ, o variare con questa. Dalla prima di tali ipotesi fondamentali nasce una classe di equazioni abeliane reciproche che formano il soggetto della presente memoria e che, per brevità di linguaggio, si diranno *equazioni abeliane della classe* (I).

Sia x una radice qualunque dell'equazione (1), supposta abeliana e della classe (I), e $\theta^\nu x$, ne sia la radice reciproca: sarà ν indipendente da x; e però se nella serie (2) si imagini che all'ultimo termine segua il primo, come al primo segue

§ 1.

il secondo e così via, le radici reciproche seguiranno ad intervalli uguali le radici dirette; e, come applicando ν volte l' operazione θ si passa dalla radice x alla radice reciproca $\theta^{\nu} x$, così applicando ν volte la stessa operazione alla radice $\theta^{\nu} x$ si passerà da $\theta^{\nu} x$ alla radice reciproca di $\theta^{\nu} x$, cioè si tornerà alla radice x. Si ha quindi

$$\theta^{2\nu} x = x$$

e perciò 2ν deve essere un multiplo di n. Or essendo ν uno degli esponenti di θ nella serie (2), si ha $\nu \leq n - 1$; per la qual cosa il multiplo di n che può essere uguale a 2ν o è zero, ovvero è n. Se è $2\nu = 0$, cioè $\nu = 0$, allora ogni radice dell'equazione (1) è reciproca di sè stessa, e quindi quella equazione non ha altre radici che $+1$, o -1. Questo caso che non offre nulla degno di nota non sarà preso in considerazione e rimane perciò a porre soltanto $2\nu = n$. Adunque la radice reciproca di x è $\theta^{\frac{n}{2}} x$, qualunque sia x, cioè si deve avere

$$\theta^k x \; \theta^{\frac{n}{2}+k} x = 1\,, \tag{3}$$

per ogni radice x dell'equazione (1) e per ogni valore finito del numero intero e positivo k.

Si può quindi conchiudere che:

Le equazioni abeliane della classe (I) *sono di grado pari; e se* $\theta(x)$ *è la funzione generatrice delle loro radici, ognuna di queste deve soddisfare l'equazione* (3).

§ 2.

Nelle ricerche ulteriori si presenta il problema seguente, del quale si premette ora qui la soluzione.

Determinare la forma generale di una funzione razionale $\theta(x)$ *che goda la proprietà espressa dall'equazione identica*

$$\theta(x)\,\theta\left(\frac{1}{x}\right) = 1. \tag{1}$$

Pongasi

$$\theta(x) = \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \left[= \frac{A(x)}{B(x)} \right],$$

e le funzioni intere $A(x)$, $B(x)$ si suppongano prive di fattori comuni e decomposte in fattori lineari. Allora $\theta(x)$ assumerà la forma seguente

$$\theta(x) = \frac{a_r (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r)}{b_s (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_s)} \tag{2}$$

nella quale una ξ_α non può essere uguale ad una x_β. Dalla (2) si ha che

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_r (1 - x_1 x)(1 - x_2 x) \ldots (1 - x_r x)}{b_s (1 - \xi_1 x (1 - \xi_2 x) \ldots (1 - \xi_s x)} x^{s-r}; \tag{3}$$

e però l'identità (1) in virtù delle (2) e (3) diviene

$$\frac{a_r^2 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_r)(1 - x_1 x)(1 - x_2 x) \ldots (1 - x_r x)}{b_s^2 (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_s)(1 - \xi_1 x)(1 - \xi_2 x) \ldots (1 - \xi_s x)} x^{s-r} = 1. \tag{4}$$

Il numeratore della precedente frazione si annulla per $x = x_\beta$ ($\beta = 1, 2, \ldots, r$), ed è x_β una quantità finita, perciò deve annullarsi anche il denominatore; e siccome una ξ_α non può essere uguale ad una x_β, così nessuno dei primi s fattori di quel denominatore può annullarsi per $x = x_\beta$. Tale annullamento deve adunque essere prodotto da qualcuno dei rimanenti fattori. Se è $1 - x_\beta \xi_\alpha = 0$, si avrà

$$\xi_\alpha = \frac{1}{x_\beta},$$

§ 2.

e perciò le quantità ξ_α sono reciproche delle quantità x_β: per la qual cosa deve essere $r = s$ e deve $B(x)$ avere la forma seguente

$$B(x) = \lambda(a_r + a_{r-1}x + a_{r-2}x^2 + \ldots + a_0 x^r),$$

nella quale λ è una quantità indipendente da x. Col precedente valore, $B(x)$ l'espressione di $\theta(x)$ diviene

$$[\theta(x) =] \frac{a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{\lambda(a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r)};$$

e questa, applicandovi l'identità (1), mostra dover essere $\lambda = \pm 1$: quindi si ha per la chiesta funzione la seguente espressione

$$\theta(x) = \pm \frac{a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_0 x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r}, \tag{5}$$

nella quale i coefficienti a ed il grado r rimangono arbitrarii.

Si ha inoltre che:

Se una funzione razionale $\theta(\mathrm{x})$ *gode la proprietà espressa dall'equazione identica* (1), *anche l'altra funzione* $\theta^k(\mathrm{x})$ *godrà quella stessa proprietà; ossia sarà, identicamente,*

$$\theta^k(x)\ \theta^k\left(\frac{1}{x}\right) = 1. \tag{6}$$

In effetti l'identità (1), che può scriversi

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\theta(x)},$$

mostra che l'azione di θ sopra una frazione della forma $\frac{1}{x}$ si esplica solo sul denominatore x; e però applicando k volte di seguito l'operazione θ risulterà

$$\theta^k\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\theta^k(x)},$$

cioè la (6).

§ 3.

Sia $f(x) = 0$ un'equazione di grado n, abeliana e della classe (I). E però ogni sua radice dovrà soddisfare anche le equazioni

$$\theta^k x\, \theta^{k+\frac{n}{2}} x = 1, \tag{1}$$

$$\theta^n x = x, \tag{2}$$

nella prima delle quali il numero intero e positivo k può ricevere qualunque valore finito. Cambiando k in $k + \frac{n}{2}$, l'equazione (1) non muta per ogni sua radice che verifichi anche l'equazione (2): quindi dall'equazione (1) si ottengono equazioni fra loro differenti solo per gli $\frac{n}{2}$ valori $0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ di k. Tali equazioni, insieme alla (2), formano un sistema di $\frac{n}{2} + 1$ equazioni alle quali, come fu detto, devono appartenere le n radici di $f(x) = 0$. Questo sistema può sostituirsi con quello formato dalle $\frac{n}{2}$ equazioni ricavate dalla (1) per $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ e dall'altra fornita dalla stessa (1) per $k = \frac{n}{2}$; cioè dalla seguente

$$\theta^{\frac{n}{2}} x\, \theta^n x = 1.$$

Imperocchè da questa equazione, paragonata con l'altra

$$x \theta^{\frac{n}{2}} x = 1, \tag{3}$$

che si ha dalla (1) per $k = 0$, si deduce l'equazione (2). Sicchè le n radici di $f(x) = 0$ devono esser comuni alle seguenti $\frac{n}{2} + 1$ equazioni

$$\left.\begin{array}{c} x\theta^{\frac{n}{2}} x = 1 \\ \theta x\, \theta^{\frac{n}{2}+1} x = 1 \\ \theta^2 x\, \theta^{\frac{n}{2}+2} x = 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \theta^{\frac{n}{2}} x\, \theta^n x = 1; \end{array}\right\} \tag{4}$$

le quali mostrano immediatamente: 1° che se x' è una loro radice comune, sarà pur tale ciascuna delle quantità $\theta x'$, $\theta^2 x'$, ..., $\theta^{n-1} x'$; 2° che $\theta^n x'$ riproduce x'; 3° che

§ 3.

le radici $\theta^k x'$ e $\theta^{k+\frac{n}{2}} x'$ sono fra loro reciproche. In conseguenza di ciò, se n è il più piccolo degli esponenti ν di θ, per i quali si ha $\theta^\nu x' = x'$, allora i termini della serie

$$x', \; \theta x', \; \theta^2 x', \; \ldots\ldots, \; \theta^{n-1} x'$$

saranno le radici di un'equazione $f(x) = 0$ di grado n, abeliana e della classe (I).

Per la composizione di un'equazione della specie di $f(x) = 0$ è dunque mestieri innanzi tutto che la funzione razionale $\theta(x)$ sia determinata in guisa che le $\frac{n}{2} + 1$ equazioni (4) abbiano una radice comune.

Al sistema (4) può sostituirsi anche il seguente

$$\left.\begin{array}{l} x\,\theta^{\frac{n}{2}} x = 1 \\ \theta x \, \theta \frac{1}{x} = 1 \\ \theta^2 x \, \theta^2 \frac{1}{x} = 1 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \theta^{\frac{n}{2}} x \, \theta^{\frac{n}{2}} \frac{1}{x} = 1 \, ; \end{array}\right\} \quad (5)$$

giacchè per ogni radice x comune alle equazioni (4) si può in quelle sostituire a $\theta^{\frac{n}{2}} x$ la quantità eguale $\frac{1}{x}$, tratta dalla prima di esse, ed allora il sistema (4) si riduce al sistema (5). Viceversa dal sistema (5) si deduce il sistema (4) col sostituire nelle equazioni che seguono la prima delle (5) ad $\frac{x}{1}$ il suo valore $\theta^{\frac{n}{2}} x$ tratto da quella equazione. Il sistema (5) è più semplice del sistema (4), se si tien conto del numero di volte che devesi applicare l' operazione θ; essendo tal numero nel sistema (5) minore di quello relativo al sistema (4).

Esprimendo che le $\frac{n}{2} + 1$ equazioni (5) hanno una radice comune, si ottengono, al più, $\frac{n}{2}$ equazioni diverse, razionali nel campo dei coefficienti di $\theta(x)$, alle quali soltanto devono soddisfare i coefficienti di qualunque funzione $\theta(x)$ razionale in x, se essa si voglia assumere come funzione generatrice di un' equazione di grado n abeliana e della classe (I).

Sul grado della funzione $\theta(x)$, se essa è intera, o sui gradi del numeratore e del denominatore di $\theta(x)$, se essa è frazionaria, si può notare quanto segue.

Sia $\theta(x)$ funzione intera di x, per es.

$$\theta(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots\ldots + a_p x^p \, ;$$

sarà $\theta^\nu(x)$ del grado r^ν ed x^{p^ν} ne sarà il termine di minor grado.

§ 3.

Perciò in $\theta^\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ il numeratore è di grado $r^\nu - p^\nu$ ed il denominatore di grado r^ν. Adunque, se per brevità di scrittura si rappresenta con (μ, μ') una funzione algebrica fratta della quale μ e μ' sono i gradi del numeratore e del denominatore, si avrà

$$\theta^\nu(x) = (r^\nu, 0)$$

$$\theta^\nu\left(\frac{1}{x}\right) = (r^\nu - p^\nu, r^\nu).$$

Per la qual cosa, i gradi delle equazioni (5), ridotte a forma intera, sono dati, ordinatamente, dai numeri $r^{\frac{n}{2}} + 1$, $2r - p$, $2r^2 - p^2$, ecc. Quindi, affinchè le n radici x', $\theta x'$, $\theta^2 x'$, ..., $\theta^{n-1} x'$ comuni alle equazioni (5) possano essere fra loro disuguali, è necessario che o nessuno dei precedenti gradi sia minore di n, la qual cosa importa che sia $r > 1$, come è chiaro, ovvero che si convertano in identità quelle equazioni i cui gradi risultano minori di n.

Ora si ha

$$r^{\frac{n}{2}} = [1 + (r-1)]^{\frac{n}{2}} = 1 + \frac{n}{2}(r-1) + \ldots\ldots + \frac{n}{2}(r-1)^{\frac{n}{2}-1} + (r-1)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 1 + \frac{n}{2}\left[r - 1 + (r-1)^{\frac{n}{2}-1}\right] + \epsilon,$$

dove ϵ è una quantità positiva diversa da zero, se $\frac{n}{2} > 2$: e perciò risulta in tal caso

$$r^{\frac{n}{2}} > 1 + \frac{n}{2}\left[r - 1 + (r-1)^{\frac{n}{2}-1}\right].$$

Se in questa relazione ad $r - 1$ (≥ 1) si sostituisce 1, si ottiene l'altra

$$r^{\frac{n}{2}} > n + 1$$

e quindi si conchiude che

$$r^{\frac{n}{2}} + 1 \geqq n + 1,$$

dove il segno $=$ si riferisce solo alle ipotesi $\left(\frac{n}{2} = 2,\ r = 2\right)$, $\left(\frac{n}{2} = 1,\ r = 2\right)$.

Adunque il grado della prima delle equazioni (5) non è mai inferiore ad n. Delle equazioni rimanenti poi, la seconda è quella di grado minore: giacchè i gradi di tali equazioni, per $p = r$, sono dati dai numeri crescenti r, r^2, r^3, ecc. e per $p \lessdot r$, dall'identità

$$r^\nu - p^\nu = (r - p)\,(r^{\nu-1} + r^{\nu-2}p + \ldots\ldots + p^{\nu-1})$$

§ 3.

segue che al crescere di ν cresce la differenza $r^\nu - p^\nu$ e quindi cresce vieppiù l'altra differenza $2r^\nu - p^\nu$; sicchè i gradi delle equazioni che seguono la prima delle (5) sono sempre crescenti, e la seconda di dette equazioni ha perciò il grado minore, $2r - p$. O dunque deve essere $2r - p \geq n$, ovvero, se

$$2r - p < n,$$

e le predette n radici x', $\theta x'$, $\theta^2 x'$, ..., $\theta^{n-1} x'$ sono fra loro disuguali, deve la seconda delle equazioni (5) convertirsi in una identità; nel qual caso avverrà altrettanto di tutte le equazioni che seguono quella, in virtù della proposizione enunciata in fine del § precedente; ed allora la funzione intera $\theta(x)$ deve avere per espressione quella riportata nel detto §. Tale espressione intanto non può ridursi a forma intera se non per $a_0 = a_1 = ... = a_{r-1} = 0$: in tal caso si avrà $\theta(x) = \pm x^r$ e la prima delle equazioni (5) diverrà un'equazione binomia, $x^m = \pm 1$. In conseguenza le radici x', $\theta x'$, $\theta^2 x'$, ..., $\theta^{n-1} x'$ di essa, cioè di $f(x) = 0$ sono radici dell'unità reale, positiva o negativa. Si conchiude perciò che

Se $2r - p < n$, *la funzione intera*

$$a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + ... + a_p x^p$$

si può solo allora assumere come generatrice di un'equazione $f(x) = 0$, *abeliana, della classe* (I) *e di grado* n, *quando* $a_p = a_{p-1} = ... a_{r-1} = 0$ *ed* $a_r = \pm 1$; *cioè quando quella funzione si riduce alla potenza* x^r. *In tal caso le radici di* $f(x) = 0$ *sono radici dell'unità reale, positiva o negativa.*

Sia $\theta(x)$ una funzione frazionaria, per es.

$$\theta(x) = \frac{a_r x^r + a_{r-1} x_{r-1} + ... + a_0}{b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + ... + b_0} \left[= \frac{f_r(x)}{g_s\ x)} \right].$$

I gradi r ed s non si possono supporre entrambi uguali ad 1; altrimenti le equazioni (5) risulterebbero tutte del secondo grado. Ora si ha:

$$\theta^2(x) = \frac{a_r f_r^r + a_{r-1} f_r^{r-1} g_s + ... + a_0 g_s^r}{b_s f_r^s + b_{s-1} f_r^{s-1} g_s + ... + b_0 g_s^s} g_s^{s-r};$$

e quindi, se è $r \geq s$, la potenza g_s^{s-r} figurerà nel denominatore di $\theta^2(x)$ con l'esponente positivo $r - s$. In tal caso il numeratore di $\theta^2(x)$ risulta di grado r^2, rispetto ad x, ed il denominatore di grado $2rs - s^2$. Se invece è $r \leq s$ ed a_0, b_0 non $= 0$, il numeratore ed il denominatore di $\theta^2(x)$ risultano entrambi di grado s^2: sicchè si avrà, secondo la precedente notazione

$$\theta(x) = (r, s)$$
$$\theta^2(x) = (r^2, 2rs - s^2), \quad r \geq s$$
$$\theta^2(x) = (s^2, s^2), \quad r \leq s.$$

§ 3.

Siccome poi con $r \geq s$ si ha pure $2r - s > 1$, cioè $2rs - s^2 > s$ ed è in ogni caso $r^2 \geq 2rs - s^2$, così ponendo

$$\theta^2(x) = (r', s'),$$

si ha che da $\theta(x)$, con la condizione $r \geq s$, si arriva a $\theta^2(x)[= (r', s')]$ dove è pure verificata la condizione $r' \geq s'$, la quale perciò sarà verificata in $\theta^\nu(x)$ per qualunque valore intero e positivo di ν. Oltre a ciò, come a motivo di $r \geq s$ in $\theta(x)$ si è avuto $r' > r$ ed $s' > s$, così da $r' \geq s'$ in $\theta^2(x)$ si avrà $r'' > r'$ ed $s'' > s'$ in $\theta^3(x)$ e così via.

Si ha pure, per a_0, b_0 non $= 0$

$$\left.\begin{aligned} \theta\left(\frac{1}{x}\right) &= (r, r) \\ \theta^2\left(\frac{1}{x}\right) &= (r^2, r^2) \end{aligned}\right\} \quad r \geq s$$

$$\left.\begin{aligned} \theta\left(\frac{1}{x}\right) &= (s, s) \\ \theta^2\left(\frac{1}{x}\right) &= (s^2, s^2) \end{aligned}\right\} \quad r \leq s$$

e si può quindi conchiudere che il grado del numeratore e quello del denominatore di $\theta^\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ sono uguali fra loro e crescono con ν, così come avviene in $\theta^\nu(x)$. Adunque la seconda delle equazioni (5), anche nel caso che $\theta(x)$ sia una funzione fratta per la quale a_0, b_0 non $= 0$, è quella che ha il minor grado fra le equazioni che seguono la prima. Tal grado è dato da $2r$ se $r \geq s$, ovvero da $2s$ se $s \geq r$. Quindi se le n radici x', $\theta x'$, $\theta^2 x'$, ..., $\theta^{n-1}x'$ comuni alle equazioni (5) debbono essere fra loro disuguali, è necessario che il grado $2r$, o $2s$, della seconda di quelle equazioni non sia minore di n. Nel caso contrario, cioè quando il maggiore dei numeri r ed s, o uno di essi, se sono uguali, è minore di $\frac{n}{2}$, la seconda delle equazioni (5), e come conseguenza tutte le rimanenti, debbonsi convertire in altrettante identità. La funzione $\theta(x)$ in tal caso sarà quella determinata nel § precedente; in essa i coefficienti a_0 ed a_r devonsi supporre diversi da zero, altrimenti o il numeratore, o il denominatore di $\theta(x)$ sarebbero privi del termine indipendente da x, ciò che in principio si è per ipotesi escluso. Si conchiude adunque che:

Supponendo a_0, b_0 *non* $= 0$, *se è* $r \gtrless s$, *la funzione*

$$\frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots\ldots + a_0}{b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \ldots\ldots + b_0},$$

nell'ipotesi di $r, s < \frac{n}{2}$ *non può assumersi come funzione generatrice delle radici di un'equazione abeliana di grado* n *e della classe* (I). *Ciò può farsi o quando il maggiore dei due numeri* r, s *non è minore di* $\frac{n}{2}$, *ovvero quando* $r = s$. *In quest'ultimo caso deve*

§ 3.

essere $b_s = \pm a_0$, $b_{s-1} = \pm a_1$, ..., $b_0 = \pm a_r$, *convenendosi di prendere costantemente l'uno o l'altro dei segni* $\pm$.

In particolare se $\theta(x)$ sia stata determinata in guisa che le equazioni (5) abbiano una radice comune e che qualcuna di quelle equazioni risulti di grado n, essa sarà un'equazione della specie di $f(x) = 0$, purchè non abbia radici uguali.

In generale, dopo aver determinata la funzione $\theta(x)$ in modo che le equazioni (5) abbiano una radice comune, sia $M(x)$ il massimo comun divisore dei primi membri di quelle equazioni ridotte a forma intera e con uno dei membri uguale a zero. Con ogni radice dell'equazione $M(x) = 0$ si può formare la serie

$$x', \ \theta x', \ \theta^2 x', \dots,$$

nella quale è

$$\theta^n x' = x'$$

$$\theta^k x' \ \theta^{k+\frac{n}{2}} x' = 1;$$

e però se nella precedente serie avviene che $\theta^n x'$ è il primo di quei termini che riproducono x', saranno $x', \theta x', \theta^2 x', \dots, \theta^{n-1} x'$ radici di $M(x) = 0$ con le quali si può comporre un'equazione di grado n, della specie di $f(x) = 0$. Se dunque si sopprime da $M(x) = 0$ ogni radice x'' per la quale nella serie $x'', \theta x'', \theta^2 x'', \dots$ non è $\theta^n x''$ il primo di quei termini che riproducono x'', l'equazione cui si perviene sarà decomponibile in equazioni che hanno i caratteri di $f(x) = 0$ e che sono tutte quelle che nascono per effetto della determinazione ricevuta dalla funzione generatrice $\theta(x)$. Per sopprimere dall'equazione $M(x) = 0$ la radice x'', comune a tutte le equazioni (5), basterà sopprimerla da una qualunque di esse. A tal fine è sufficiente sopprimere da una delle equazioni (5) ogni sua radice x che sia comune a qualche altra di dette equazioni e per la quale si abbia $\theta^{n'} x = x$ per $n' < n$. Scelgansi, per es., la prima e l'ultima delle (5), o, ciò che è lo stesso, le equazioni (3) e (2).

È facile vedere innanzi tutto che una radice x comune alle equazioni (3), (2) ed a qualche equazione,

$$x \theta^{\frac{n'}{2}} x = 1, \tag{6}$$

della stessa forma della (3), ma con un esponente $\frac{n'}{2}$ di θ minore di $\frac{n}{2}$, è da sopprimersi da una delle equazioni (3) e (2), per es. dalla (3): giacchè per una tale radice risulta

$$\theta^{n'} x = x \tag{7}$$

con $n' < n$. In effetti, per ogni radice x comune alle equazioni (3) e (6) risulta

$$\theta^{\frac{n}{2}} x = \theta^{\frac{n'}{2}} x; \tag{8}$$

§ 3.

or applicando una volta l'operazione $\theta^{\frac{n}{2}}$ ed un'altra l'operazione $\theta^{\frac{n'}{2}}$ ad ambo i membri della (8), e tenendo presente l'equazione (2), che per ipotesi è pur essa verificata dalla radice x in discorso, si avrà, rispettivamente,

$$x = \theta^{\frac{n+n'}{2}} x$$

$$\theta^{\frac{n+n'}{2}} x = \theta^{n'} x;$$

e dal confronto di queste due equazioni si ottiene la (7).

In generale, nella presente quistione basta considerare quelle soltanto delle equazioni (6), nelle quali n' è un divisore (pari) di n, minore di n, che dà un quoziente dispari. Sia infatto x una radice delle equazioni (3) e (2) che verifichi anche qualche equazione della forma (2) ma con un esponente di θ minore di n. Di tali equazioni sia

$$\theta^a x = x \tag{9}$$

quella nella quale θ ha il più piccolo esponente: in tal caso dovrà essere a un divisore di n; altrimenti, posto $n = a\nu + \mu$, dove ν e μ sono il quoziente ed il resto della divisione di n per a, l'equazione (2), cioè la seguente

$$\theta^{\mu} \theta^{\nu a} x = x,$$

per ogni sua radice che soddisfi anche la (9) diviene

$$\theta^{\mu} x = x,$$

e questa, essendo $\mu < a$, mostra non esser la (9) quella fra le anzidette equazioni nella quale è a il più piccolo esponente di θ, ciò che è contro l'ipotesi.

Adunque essendo $\mu = 0$ ed $n = a\nu$, l'equazione (3) può scriversi

$$x\theta^{\frac{a\nu}{2}} x = 1. \tag{10}$$

Il numero ν può essere pari o impari; nel primo caso, essendo $\frac{\nu}{2}a$ un multiplo di a, l'equazione (10), cioè la (3), per ogni sua radice che verifichi anche la (9) si si riduce alla seguente

$$x^2 = 1, \tag{11}$$

e si conchiude che se a è un divisore di n che dà un quoziente pari (in particolare se $a = 1$) le radici che le equazioni (3) e (2) possono avere comuni con la (9) sono le radici $+1$ o -1 dell'equazione (11). Tali radici devonsi perciò sopprimere dall'e-

§ 3.

quazione (3), quando vi siano. Sicchè nell'equazione (9) è da considerarsi solo il caso in cui a è un divisore di n che dà un quoziente dispari ν.

Sia $\nu = 2b + 1$; in conseguenza a deve essere pari. L'equazione (10), cioè la (3), si può scrivere

$$x\theta^{\frac{a}{2}}\,\theta^{ba}x = 1,$$

e questa, per ogni sua radice che verifichi anche la (9), diviene la seguente

$$x\theta^{\frac{a}{2}}x = 1 \qquad (12)$$

nella quale, come fu detto, a è un divisore (pari) di n, minore di n, che dà un quoziente dispari; ovvero nella quale $\frac{a}{2}$ è un divisore di n, minore di $\frac{n}{2}$ che dà un quoziente pari.

Si può ora enunciare il seguente

Teorema. — *La funzione razionale* $\theta(\mathrm{x})$ *sia tale che le* $\frac{\mathrm{n}}{2} + 1$ *equazioni* (5) [*o* (4)] *abbiano una radice comune. Dall'equazione* (3) *si sopprimano tutte quelle radici che essa ha in comune con altre equazioni della stessa sua forma ma con esponenti di* θ *minori di* $\frac{\mathrm{n}}{2}$, *e* $\Theta(\mathrm{x}) = 0$ *sia l'equazione che ne risulta. Ridotte a zero ed a forma intera le equazioni* $\Theta(\mathrm{x}) = 0$ *e quelle che seguono la prima delle* (5), *sia* $\mathrm{F}(\mathrm{x})$ *il massimo comun divisore dei loro primi membri; l'equazione*

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = 0 \qquad (13)$$

sarà decomponibile in equazioni di grado n, *abeliane e della classe* (I); *per le quali* $\theta(\mathrm{x})$ *è la funzione che genera le radici.*

Se si sopprimono dall'equazione (3) *le radici* $+1$ *e* -1, *quando vi siano, allora delle anzidette equazioni aventi la forma della* (3), *ma con esponente di* θ *minore di* $\frac{\mathrm{n}}{2}$, *basterà prendere in esame quelle soltanto nelle quali, come nella* (12), a *è un divisore (pari) di* n, *minore di* n *che dà un quoziente dispari: cioè quelle nelle quali l'esponente di* θ *è un divisore di* n, *minore di* $\frac{\mathrm{n}}{2}$, *chè dà un quoziente pari.*

Non esistono altre equazioni abeliane della classe (I) *oltre quelle ottenute nell'anzidetto modo.*

§ 4.

Il caso in cui la funzione $\theta(x)$ sia tale che le $\frac{n}{2}$ equazioni che seguono la prima delle (5) del § precedente diventino identità, vien preso in esame nel presente §.

Sia dunque la funzione $\theta(x)$ determinata in guisa che le equazioni

$$\theta^k x\, \theta^k\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (1)$$

$$\left(k = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}\right)$$

diventino altrettante identità. In tal caso il sistema (5) del § 3 è verificato da ogni radice x' dell'equazione non identica

$$x\theta^{\frac{n}{2}}x = 1, \qquad (2)$$

che è la prima di quel sistema; e quindi con la radice x' e con la funzione generatrice $\theta(x)$ si può comporre un'equazione abeliana della classe (I), che sarà di grado n se nella serie x', $\theta x'$, $\theta^2 x'$, ecc. è $\theta^n x'$ il primo dei termini che riproducono x'.

Per la formazione di tale equazione e delle altre analoghe deducibili dalla (2) già provvede il teorema poc'anzi enunciato, nel quale l'equazione $F(x) = 0$ è quella che si ottiene sopprimendo dall'equazione (2) tutte quelle radici che sono considerate nel citato teorema.

Or affinchè riescano identiche le equazioni (1) è sufficiente che la prima di esse si riduca ad un'identità, secondo quel che fu detto nel § 2, nel quale fu data anche l'espressione che deve avere $\theta(x)$ nel caso in discorso: e però si ha il seguente

Teorema. — *Sia*

$$\theta(x) = \pm \frac{a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0}{a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots\ldots + a_{r-1}x + a_r};$$

se dall'equazione

$$x\theta^{\frac{n}{2}}x = 1$$

si sopprimono tutte quelle radici considerate nel teorema del § 3, l'equazione rimanente $F(x) = 0$ *sarà decomponibile in equazioni abeliane di grado* n *e della classe* (I), *per le quali è* $\theta(x)$ *la funzione generatrice delle radici* (*).

(*) Le radici dell'equazione $x\theta^{\frac{n}{2}}x = 1$, non appartenenti ad altre equazioni della stessa forma della precedente e con esponente di θ minore di $\frac{n}{2}$, potrebbero denominarsi *radici abeliane di*

§ 4.

L'equazione (2), se $\theta(x)$ ha per espressione quella indicata nel teorema precedente, è di grado $r^{\frac{n}{2}} + 1$. Essa, se la formola che dà $\theta(x)$ si prende col segno $+$, ha la radice $x = 1$, qualunque sia r; ha inoltre la radice $x = -1$ se r è dispari. Imperocchè essendo attualmente $\theta^{\frac{n}{2}}x \, \theta^{\frac{n}{2}}\frac{1}{x} = 1$, identicamente, ne segue che $\theta^{\frac{n}{2}}x$ avrà un'espressione della stessa forma di quella della funzione $\theta(x)$ determinata nel § 2; quindi l'equazione (2) potrà mettersi sotto la forma seguente

$$\pm \frac{x(b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \ldots\ldots + b_1 x + b_0)}{b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots\ldots + b_{s-1}x + b_s} = 1, \left(s = r^{\frac{n}{2}}\right)$$

e sarà verificata da $x = 1$, se si prende il segno $+$ nel primo membro, qualunque sia il valore di s e quindi di r: se poi s, e quindi r, è impari quell'equazione, nell'ipotesi del segno $+$, sarà verificata anche da $x = -1$.

Se poi si sceglie il segno $-$ nel primo membro dell'equazione precedente, essa ha la radice $x = +1$, o l'altra $x = -1$, secondo che r è dispari o pari.

Così, posto

$$n = 4, \; r = 2$$
$$P = ax^2 + bx + c,$$
$$Q = cx^2 + bx + a,$$
$$\theta(x) = \pm \frac{P}{Q},$$

le equazioni biquadratiche seguenti

$$\frac{(ax - c)P^2 + b(x - 1)PQ + (cx - a)Q^2}{x - 1} = 0,$$

$$\frac{(ax + c)P^2 + b(x + 1)PQ + (cx + a)Q^2}{x + 1} = 0,$$

sono abeliane della classe (I) ed hanno per funzione generatrice delle loro radici $[\theta(x) =] + \frac{P}{Q}$, $[\theta(x) =] - \frac{P}{Q}$, rispettivamente.

---

ordine n di quella equazione. Con ciascuna di tali radici può comporsi un'equazione abeliana di grado n e della classe (I). Nel campo di queste radici trovansi le radici primitive dell'equazione in discorso, quando essa si riduce ad un'equazione binomia, come sarà in seguito dimostrato.

Le rimanenti radici dell'equazione $x\theta^{\frac{n}{2}}x = 1$, salvo $+1$, -1, appartengono ad equazioni della forma $x\theta^{\frac{a}{2}}x = 1$ dove a è un divisore di n, minore di n, che dà un quoziente dispari [§ (3)]; e però se n è della forma 2^{μ}, e solo allora, le radici dell'equazione in discorso, che diviene

$$x\theta^{2^{\mu-1}}x = 1,$$

sono tutte abeliane, tranne $+1$, o -1.

§ 5.

Alle equazioni abeliane della classe (I) considerate nel § precedente appartengono, come caso particolare, quelle le cui radici sono radici dell'unità, positiva, o negativa. Per l'indagine di tali equazioni è necessario ricorrere ai teoremi (A) e (B) che seguono.

Teorema (A). — *In ognuna delle equazioni binomie*

$$x^m = 1 \qquad (1)$$

$$x^m = -1 \qquad (2)$$

se una radice, x_2, *è funzione razionale di un'altra,* x_1, *si potrà esprimere* x_2 *come potenza con esponente intero e positivo di* x_1.

In effetto se α è una radice primitiva dell'equazione (1), si potranno esprimere x_1 ed x_2 come potenze di α, con esponenti interi e positivi, siccome è noto. Sia

$$x_1 = \alpha^p, \quad x_2 = \alpha^q; \qquad (3)$$

si avrà allora

$$x_2 = x_1^{\frac{q}{p}}; \qquad (4)$$

e quindi se x_2 è funzione razionale di x_1 dovrà essere q multiplo di p: per es. $q = pr$; in tal caso la relazione (4) diviene

$$x_2 = x_1^r \qquad (5)$$

ed il teorema precedente rimane dimostrato per l'equazione (1).

Estesa poi la definizione di radice primitiva dell'equazione (1) anche all'equazione (2) si ha che:

Se α *è una radice primitiva dell'equazione* (2), *i termini della serie*

$$\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5, \ldots\ldots,\ \alpha^{2m-1}$$

esprimono tutte le radici dell'equazione (2) (*).

In conseguenza le relazioni (3) relative all'equazione (1) e le altre (4) e (5) che da quelle scaturiscono sono vere anche nel caso dell'equazione (2). Dopo ciò il precedente teorema rimane provato anche per l'equazione (2).

(*) Questo teorema trovasi dimostrato nella " Nota ": *Sulle radici primitive dell'unità negativa*, già innanzi citata. Tale nota, alla quale spesso si ricorre nella presente Memoria, sarà detta, per brevità, Nota *A*.

§ 5.

Il numero intero $r\left(=\frac{q}{p}\right)$ nella relazione (5) può risultare maggiore di m, nel caso dell'equazione (2); giacchè gli esponenti p e q variano da 1 a $2m-1$. In tal caso se per es. è $r=m+r'$, la relazione (5); ponendovi -1 in luogo di x^m diviene

$$x_2 = - x_1^{r'}. \qquad (6)$$

Supponghasi ora che la funzione $\theta(x)$ sia stata determinata in guisa che le equazioni (5) del § 3 abbiano una radice comune x: esse avranno comuni anche le radici θx, $\theta^2 x$, ecc. In virtù della detta determinazione, $\theta(x)$ assuma una forma tale che l'equazione

$$x\theta^{\frac{n}{2}}x = 1, \qquad (7)$$

cioè la prima delle (5) del § 3, si riduca ad un'equazione binomia: ciò che può avvenire solo se $\theta^{\frac{n}{2}}x$ è una potenza di x, per es. se

$$\theta^{\frac{n}{2}}x = \pm x^{\nu}.$$

In tal caso l'equazione (7) diviene

$$x^{\nu+1} = \pm 1: \qquad (7')$$

e siccome se x è una radice della precedente equazione, cioè della (7), anche $\theta(x)$ è radice della stessa, così a motivo delle relazioni (5) e (6) alle quali ha dato luogo il teorema (A), la funzione razionale $\theta(x)$ che esprime una radice dell'equazione binomia (7') mediante un'altra x può mettersi sotto la forma

$$\theta(x) = \pm x^r \qquad (8)$$

dove r è un numero intero che si può sempre supporre minore di $\nu+1$.

E però da una parte le equazioni che seguono la prima delle (5) del § 3 attualmente diventano tutte identiche, per virtù della forma (8) di $\theta(x)$, e dall'altra l'espressione di $\theta(x)$ rientra in quelle che emanano dalla formola (7) del § 2. Adunque l'equazione $F(x)=0$ considerata nel teorema del § 4 è decomponibile, presentemente, in equazioni abeliane della classe (I) e di grado n, le cui radici sono tutte radici d'un medesimo indice o dell'unità positiva o dell'unità negativa.

Viceversa poi se $\theta(x)$ assume la forma (8), allora l'equazione (7) si riduce ad un'equazione binomia e precisamente alla seguente

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1, \qquad (9)$$

se nella (8) si sceglie il segno $+$; e se invece si sceglie il segno $-$, si trova che

§ 5.

$$\theta^{\frac{n}{2}}x = (-1)^{\epsilon} x^{r^{\frac{n}{2}}}$$

dove

$$\epsilon = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{\frac{n}{2}-1},$$

e che l'equazione (7) si cangia nell'altra

$$(-1)^{\epsilon} x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1,$$

la quale non è diversa dall'equazione (9) se ϵ è pari, cioè se r è dispari ed $\frac{n}{2}$ è pari.

La precedente equazione è invece diversa dalla (9) se ϵ è dispari: nel quale caso essa diviene

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1. \qquad (10)$$

Sorge qui l'opportunità di considerare separatamente le due ipotesi di r dispari o pari.

Se r è dispari, allora ϵ che è somma di $\frac{n}{2}$ numeri dispari risulterà dispari solo quando $\frac{n}{2}$ è pur tale.

Se r è pari il numero ϵ è sempre dispari qualunque sia n. Adunque prendendo il segno — nell'espressione (8) di $\theta(x)$ si otterrà dalla (7) l'equazione (10), invece della (9), solo allorquando è r pari, ovvero r ed $\frac{n}{2}$ sono entrambi dispari.

Oltre alle equazioni abeliane della classe (I) aventi per radici le radici dell'unità positiva o dell'unità negativa, e che si ottengono come poc'anzi fu detto, non ne esistono altre. La verità di questa asserzione poggia sul seguente

Teorema (B). — *Se una radice* x_1 *dell'equazione*

$$x^m = \pm 1$$

è funzione razionale di una radice x_2 *dell'altra equazione*

$$x^{m'} = \pm 1$$

dovrà essere x_1 *una potenza, positiva o negativa, con esponente intero, di* x_2.

In fatto da

$$x_1^m = \pm 1,$$

$$x_2^{m'} = \pm 1,$$

si deduce che

§ 5.

$$x_1^{2m} = x_2^{2m'}$$

e che

$$x_1 = \pm\, x_2^{\frac{m'}{m}}.$$

Se dunque x_1 è funzione razionale di x_2 deve essere m' multiplo di m. C. D. D.

Segue dal precedente teorema e dal teorema (A) che se un'equazione $f(x) = 0$ ha per radici i termini della serie

$$x,\ \theta x,\ \theta^2 x, \ldots, \theta^{n-1}x, \qquad (\theta^n x = x)$$

nella quale è $\theta(x)$ una funzione razionale di x, e se x e $\theta(x)$ sono radici dell'unità positiva, o negativa, dovrà essere $\theta(x)$ una potenza positiva, o negativa di x: e però $\theta(x)$ dovrà avere un'espressione della forma (8). Quindi l'equazione $\theta^n x = x$ alla quale deve soddisfare ogni radice di $f(x) = 0$, diviene l'una o l'altra delle seguenti

$$x^{r^n - 1} = 1, \qquad x^{r^n - 1} = -1,$$

le quali provano che le radici di $f(x) = 0$ sono tutte radici con uno stesso indice, o dell'unità positiva, o dell'unità negativa.

Inoltre, se l'equazione $f(x) = 0$ è reciproca, allora la (7), alla quale devono pur soddisfare le radici di $f(x) = 0$, diviene l'equazione (9), o l'equazione (10). Si può quindi conchiudere il seguente

Teorema I. — *Le equazioni abeliane della classe* (I) *e di grado* n *che hanno per radici le radici dell'unità positiva, o negativa, sono quelle sole che si possono ottenere o mediante l'equazione binomia* (9), *qualunque siano i numeri interi e positivi* r *ed* n, *o mediante l'equazione binomia* (10) *allorchè* r *è pari, oppure allorchè* r *ed* $\frac{n}{2}$ *sono entrambi dispari.*

Il processo dichiarato nel teorema del § 3 sull'equazione generale (3) di quel § serve a comporre le equazioni menzionate nel teorema precedente; ed a tal fine quel processo verrà in seguito sottoposto ad ulteriori considerazioni.

Per le equazioni che si ottengono mediante la (9) la funzione $\theta(x)$ generatrice delle radici è espressa da x^r, qualunque siano r ed $\frac{n}{2}$: se poi r è dispari ed $\frac{n}{2}$ è pari, allora $\theta(x)$ può avere per espressione sia x^r che $-x^r$. Per le altre equazioni ottenute mediante la (10), nella quale deve essere r pari, ovvero r ed $\frac{n}{2}$ entrambi dispari, la funzione $\theta(x)$ è espressa da $-x^r$.

In particolare suppongasi che $n + 1$ sia numero primo, ed r ne sia una radice primitiva: sarà allora

$$r^n \equiv 1 \qquad mod.\ (n+1)$$

e quindi

§ 5.

$$r^n - 1 = multiplo\ (n + 1),$$

ossia

$$\left(r^{\frac{n}{2}} + 1\right)\left(r^{\frac{n}{2}} - 1\right) = multiplo\ (n + 1).$$

Il numero $n + 1$ dovendo dividere il primo membro della precedente eguaglianza e non potendone dividere il fattore $r^{\frac{n}{2}} - 1$, altrimenti non sarebbe r radice primitiva di $n + 1$, dovrà quel numero dividere l'altro fattore $r^{\frac{n}{2}} + 1$. È dunque $r^{\frac{n}{2}} + 1$ un multiplo di $n + 1$: e però ogni radice dell'equazione

$$x^{n+1} = 1$$

è radice anche dell'equazione (9). Le radici dell'equazione $x^{n+1} = 1$, diverse da 1, possono esprimersi, come è noto, con

$$x,\ x^r,\ x^{r^2}, \ldots\ldots, x^{r^{n-1}},$$

e sono le radici dell'equazione

$$x^n + x^{n-1} + \ldots\ldots + x + 1 = 0$$

che è quella della divisione del cerchio in $n + 1$ parti uguali. Tale equazione, reciproca per la sua forma, ed abeliana per la forma delle sue radici, appartiene alla classe (I): giacchè per ogni radice x^{r^k} di essa, o dell'equazione $x^{n+1} = 1$, risulta

$$x^{r^k} . x^{r^{k+\frac{n}{2}}} = \left(x^{r^{\frac{n}{2}}+1}\right)^{r^k} = 1,$$

essendo $r^{\frac{n}{2}} + 1$ multiplo di $n + 1$: perciò si ha $\psi(k) = k + \frac{n}{2}$ (§ 1). Dunque *l'equazione della divisione del cerchio è una delle equazioni abeliane della classe* (I) *che si possono ottenere dall'equazione* (9) *quando* r *esprime una radice primitiva del numero primo* n + 1.

Le ulteriori considerazioni che seguono in questo § servono a semplificare in parte il processo di composizione delle equazioni alle quali si riferisce il teorema I.

Sia x una radice dell'equazione (9): le quantità

$$x^r,\ x^{r^2},\ x^{r^3}, \ldots\ldots \qquad (11)$$

sono anche radici di quella equazione e deduconsi l'una dall'altra, ordinatamente, mediante l'operazione espressa da $[\theta(x) =]x^r$. Se r è pari, e quindi $r^{\frac{n}{2}} + 1$ è dispari, le radici dell'equazione (10) sono uguali ed opposte a quelle dell'equazione (9): perciò, posto $-x = x_1$, ne segue che come le quantità (11) sono radici della (9), così le altre quantità

$$x_1,\ -x_1^r,\ -x_1^{r^2}, \ldots\ldots,$$

§ 5.

che sono eguali ed opposte alle quantità (11), e deduconsi l'una dall'altra mediante l'operazione $[\theta(x_1) =] - x_1{}^r$, sono radici dell'equazione (10): e se avviene che $x^{r^k} = x$, per $k = n$ e non per $k < n$, e che $x^{r^k} . x^{r^{k+\frac{n}{2}}} = 1$, avverrà pure che $- x_1^{r^k} = x_1$ per $k = n$ e non per $k < n$, e che $x_1^{r^k} . x_1^{r^{k+\frac{n}{2}}} = 1$. Si conchiude perciò che se r è pari e mediante la funzione generatrice $[\theta(x) =] x^r$, applicata ad una radice x dell'equazione (9), si è potuto comporre l'equazione abeliana $f(x) = 0$ di grado n e della classe (I), l'altra equazione che si può formare con la radice $-x\,(= x_1)$ della (10) e con la funzione generatrice $[\theta(x_1) =] - x_1{}^r$ è pure abeliana, della classe (I) e di grado n ed è data da $f(-x) = 0$. Questa equazione è sempre diversa dall'altra $f(x) = 0$; altrimenti $f(x) = 0$ dovrebbe avere radici uguali ed opposte, ciò che è impossibile, giacchè le radici di $f(x) = 0$ appartengono alla (9), e questa, essendo di grado dispari, non può avere radici uguali ed opposte. Si ha quindi il seguente

Teorema II. — *Se* r *è pari e con una radice* x *dell'equazione* (9) *si è potuto comporre l'equazione* $f(x) = 0$ *abeliana, della classe* (I) *e di grado* n, *avente* $[\theta(x) =] x^r$ *per funzione generatrice delle sue radici; con la radice* $-x\,(= x_1)$ *della* (10) *si potrà comporre un'altra equazione abeliana della classe* (I) *e di grado* n, *nella quale è* $[\theta(x_1) =] - x_1{}^r$ *la funzione generatrice delle radici. Questa equazione è espressa da* $f(-x) = 0$ *ed è sempre diversa da* $f(x) = 0$.

Nel caso di r pari è quindi inutile il prendere in considerazione l'equazione (10), basta solo associare ad ognuna delle equazioni $f(x) = 0$ dedotte dalla (9) l'altra equazione $f(-x) = 0$.

Sia ora r impari, e quindi $r^{\frac{n}{2}} + 1$ pari; l'equazione (9) ha le sue radici a due a due uguali ed opposte. Mediante la radice x della (9) e con la funzione generatrice $[\theta(x) =] x^r$ si supponga formata l'equazione abeliana $g(x) = 0$ della classe (I) e di grado n, le cui radici sono perciò i termini della serie seguente

$$x,\ x^r,\ x^{r^2},\ \ldots\ldots,\ x^{r^{n-1}}. \qquad (12)$$

Con l'altra radice $-x\,(= x_1)$ dell'equazione (9) e con la funzione generatrice $[\theta(x_1) =] x_1{}^r$ si ottengono i termini dell'altra serie

$$x_1,\ x_1{}^r,\ x_1{}^{r^2},\ \ldots\ldots,\ x_1{}^{r^{n-1}}; \qquad (13)$$

e come avviene che $x^{r^k} = x$ per $k = n$ ma non per $k < n$, e che $x^{r^k} . x^{r^{k+\frac{n}{2}}} = 1$, così avverrà pure che $x_1^{r^k} = x_1$ per $k = n$ ma non per $k < n$, e che $x_1^{r^k} . x_1^{r^{k+\frac{n}{2}}} = 1$. I termini della serie (13) i quali sono uguali ed opposti ai loro corrispondenti nella serie (12) sono dunque radici di un'equazione $g(-x) = 0$ che si trova nelle stesse condizioni di $g(x) = 0$.

Le due equazioni $g(x) = 0$, $g(-x) = 0$ sono sempre fra loro diverse: altrimenti l'equazione $g(x) = 0$ dovrebbe avere radici uguali ed opposte: dovrebbero cioè

§ 5.

i termini della serie (12) essere a due a due uguali ed opposti: ora ciò non può avvenire. In effetto se fosse

$$x^{r^k} = -x \tag{14}$$

ne seguirebbe che

$$x^{r^{2k}} = -x^{r^k} = x = x^{r^n}:$$

giacchè essendo x radice della (9), sarà pure radice dell' equazione $x^{r^n-1} = 1$, cioè sarà $x = x^{r^n}$. Per la qual cosa dovrebbe essere $2k$ multiplo di n; e siccome è $k < n$, così potrà essere solo $2k = n$. In tal caso, insieme all'equazione (14) che diviene

$$x^{r^{\frac{n}{2}}} = -x,$$

dovendosi avere anche l'equazione (9) che può scriversi

$$x^{r^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{x}$$

si dedurrebbe che $-x = \frac{1}{x}$, e che $x = \pm i$, $\left(i = (-1)^{\frac{1}{2}}\right)$. Da $x = \pm i$ seguirebbe poi che $x^{r^2} = x$, se r è della forma $r = 4p + 3$, oppure $x^r = x$, se r è della forma $r = 4p + 1$: in conseguenza essendo anche $x^{r^n} = x$ ed x^{r^n} il primo dei termini della serie (12) che riproducono x si dovrebbe avere o $n = 2$, od $n = 1$, in conformità di $x^{r^2} = x$ o di $x^r = x$. L'ipotesi di $n = 1$ non è ammissibile: quella di $n = 2$ fu già precedentemente esclusa, perchè non offre nulla degno di nota, quindi la supposta relazione (14) non può sussistere. Nè parimente può sussistere l' altra relazione più generale

$$x^{r^k} = -x^{r^{k'}}:$$

giacchè da essa si dedurrebbe che

$$x^{r^{k-k'}} = -x;$$

e si ricadrebbe in una relazione della forma (14). Le equazioni $g(x) = 0$, $g(-x) = 0$ sono dunque sempre fra loro diverse.

Tenendo ferma l'ipotesi di r impari, si supponga che n sia multiplo di 4. Se i termini della serie (12) si prendono con segni alternati, si otterrà l'altra serie

$$x, -x^r, x^{r^2}, \ldots, -x^{r^{n-1}}, \tag{15}$$

i cui termini sono tutti radici dell'equazione (9) e si ottengono l'uno dall'altro mediante l'operazione $[\theta(x) =] -x^r$. Essi, inoltre, sono radici di un'equazione $h(x) = 0$ che è abeliana, della classe (I) e di grado n. Per dimostrare ciò basterà far vedere che

$$(-1)^k x^{r^k} = x \tag{16}$$

§ 5.

per $k = n$ ma non per $k < n$, e che

$$\left(\theta^k x . \theta^{k+\frac{n}{2}} x =\right) (-1)^{2k+\frac{n}{2}} x^{r^k} . x^{r^{k+\frac{n}{2}}} = 1. \tag{17}$$

Ora, per $k = n$ la (16) diviene $x^{r^n} = x$, ed è verificata giacchè x è il primo termine della serie (12): per $k < n$ la (16) si riduce all'una od all' altra delle seguenti relazioni, secondo che k è pari o dispari

$$\left.\begin{array}{l} x^{r^k} = x, \\ x^{r^k} = - x, \end{array}\right. \qquad (k < n)$$

delle quali la prima non può verificarsi, altrimenti i termini della serie (12) non sarebbero tutti fra loro disuguali come si è supposto, e la seconda non può neppure verificarsi altrimenti fra i termini della serie (12) dovrebbe sussistere la relazione (14) ciò che si è dimostrato impossibile.

La relazione (17) poi, essendo per ipotesi $\frac{n}{2}$ pari, si riduce alla seguente

$$\left(x^{r^{\frac{n}{2}}+1}\right)^{r^k} = 1$$

che è un'identità, giacchè x è radice dell'equazione (9). L'equazione $h(x) = 0$ trovasi dunque realmente nelle predette condizioni e quindi, nell'ipotesi di r impari, si ha il seguente

Teorema III. — *Se* r *è impari e con una radice* x *dell'equazione* (9), *mediante la funzione generatrice* $[\theta(x) =]\ x^r$ *si è potuto comporre l'equazione abeliana* $g(x) = 0$, *della classe* (I) *e di grado* n, *l'altra equazione* $g(-x) = 0$ *formata con la radice* $-x (= x_1)$ *della* (9) *e con la medesima funzione generatrice* $[\theta(x_1) =]\ x_1^r$, *sarà pure abeliana della classe* (I) *e di grado* n. *E se, oltre ad essere* r *impari, è* $\frac{n}{2}$ *pari, l'equazione* $h(x) = 0$ *formata con la stessa radice* x *ma con la funzione generatrice* $[\theta(x) =]\ - x^r$ *sarà anch'essa abeliana della classe* (I) *e di grado* n.

Nell'ipotesi di r dispari devesi però prendere in considerazione anche l'equazione (10), se $\frac{n}{2}$ è pure dispari (Teorema I).

§ 6.

Teorema I. — *Se* x *è una radice primitiva dell'equazione*

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1, \qquad (1)$$

si avranno le seguenti proprietà:

a) *Le* n *quantità*

$$x,\ x^r,\ x^{r^2}, \ldots\ldots, x^{r^{n-1}} \qquad (2)$$

sono radici di un'equazione abeliana della classe (I) *e di grado* n;

b) *Le stesse quantità sono tutte radici primitive dell'equazione* (1);

c) *Le altre* n *quantità*

$$x_1,\ x_1^{r},\ x_1^{r^2}, \ldots\ldots, x_1^{r^{n-1}}, \qquad (2')$$

formate con una radice primitiva dell'equazione (1), *non compresa fra le* (2), *sono tutte disuguali alle quantità* (2) *e fra loro.*

a) Ogni radice x dell'equazione (1) è pure radice dell'altra equazione

$$x^{r^n-1} = 1, \qquad (3)$$

giacchè $r^n - 1$ è multiplo di $r^{\frac{n}{2}} + 1$. Or l'equazione (3), messa sotto la forma seguente,

$$x^{r^n} = x$$

mostra che per ogni radice x dell'equazione (1) v'è sempre un qualche esponente ν per il quale risulta

$$x^{r^\nu} = x, \qquad (4)$$

cioè

$$x^{r^\nu-1} = 1. \qquad (5)$$

Intanto se la detta radice x è radice primitiva dell'equazione (1), dal confronto di tale equazione con la (5) risulta che $r^\nu - 1$ deve esser multiplo di $r^{\frac{n}{2}} + 1$, cioè deve essere

$$r^\nu \equiv 1 \qquad mod.\left(r^{\frac{n}{2}} + 1\right). \qquad (6)$$

§ 6.

Or affinchè il quoziente $\frac{r^{\nu}-1}{r^{\frac{n}{2}}+1}$ sia un numero intero, è necessario e sufficiente che ν sia multiplo pari di $\frac{n}{2}$, cioè un multiplo di n, per es. $\nu = pn$: ed allora si conchiude che il più piccolo valore di ν nella (4) e nella (6) è n. Di qui segue immediatamente che le quantità (2) sono tutte fra loro disuguali; altrimenti da

$$x^{r^k} = x^{r^{k'}} \qquad (k,\ k' < n)$$

seguirebbe che (se $k > k'$)

$$x^{r^{k-k'}} = x$$

e non sarebbe n il più piccolo valore di ν nella (4), essendo $k - k' < n$.

Si ha inoltre che x^{r^k} ed $x^{r^{k+\frac{n}{2}}}$ sono quantità reciproche, come si è già visto altrove; e però, ponendo $\theta(x) = x^r$, si ha

$$\theta^k x \,.\, \theta^{k+\frac{n}{2}} x = 1;$$

perciò le quantità (2) hanno tutte le idoneità delle radici di un'equazione abeliana della classe (I) e di grado n. Rimane quindi provata la prima parte del teorema precedente.

b) Le quantità (2) sono tutte radici primitive dell'equazione (1). In fatto si ha in primo luogo che i numeri $r^{\frac{n}{2}} + 1$ ed r sono primi fra loro; altrimenti ogni loro comun divisore d diverso da 1 dovendo dividere il primo di essi ed ogni potenza, per es. $r^{\frac{n}{2}}$, del secondo, dovrebbe dividere anche la differenza 1 fra $r^{\frac{n}{2}} + 1$ ed $r^{\frac{n}{2}}$.

I numeri r, r^2, r^3, ecc. sono dunque primi col grado $r^{\frac{n}{2}} + 1$, dell'equazione (1): or le potenze delle radici primitive di un'equazione binomia della forma $x^m = 1$, cioè della forma (1), i cui esponenti sono numeri primi col grado dell'equazione sono pur esse radici primitive, come è noto, quindi la proprietà (*b*) rimane dimostrata.

c) non può essere infine un termine $x_1^{r^{k_1}}$ della serie (2') eguale ad uno x^{r^k} della serie (2). Imperocchè in tal caso da

$$x_1^{r^{k_1}} = x^{r^k}$$

si dedurrebbe, se $k > k_1$, che

$$x_1 = x^{r^{k-k_1}}$$

ovvero, se $k < k_1$, che

$$x_1 = x^{r^{n+k-k_1}},$$

ed allora la quantità x_1 figurerebbe fra i termini della serie (2), ciò che è contro l'ipotesi. Inoltre essendo x_1 radice primitiva dell'equazione (1), le quantità (2′) trovansi nelle identiche condizioni delle quantità (2) e sono perciò tutte fra loro disuguali. Il teorema precedente rimane quindi dimostrato.

Il più piccolo valore di ν nella congruenza (6) è, come fu visto n; e però il numero r *appartiene all'esponente* n, rispetto al modulo $r^{\frac{n}{2}}+1$.

Dal teorema precedente si deduce che le radici primitive delle equazioni (1) si possono ordinare in uno schema della forma seguente

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_1^{r},\ x_1^{r^2},\ \ldots\ x_1^{r^{n-1}} \\ x_2,\ x_2^{r},\ x_2^{r^2},\ \ldots\ x_2^{r^{n-1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (7)$$

nel quale le n quantità disposte sopra ogni orizzontale sono radici di un'equazione abeliana, di grado n e della classe (I).

Il numero delle quantità (7) è dato, come si sa, da $\varphi\,(r^{\frac{n}{2}}+1)$, se $\varphi\,(m)$ ha il significato noto nella teoria dei numeri: perciò deve essere $\varphi\,(r^{\frac{n}{2}}+1)$ un multiplo di n, e quindi si ha che

$$\varphi\,(r^{n}+1) = \text{multiplo } 2n, \qquad (r > 1).$$

Sia r dispari, ed il numero pari $r^{\frac{n}{2}}+1$ sia multiplo di 4; allora le radici primitive dell'equazione (1) sono a due a due ed uguali opposte (*), e però se x_1 è radice primitiva dell'equazione (1), tale sarà pure $-x_1$. La radice $-x_1$ non può trovarsi fra i termini della prima orizzontale dello schema (7), come è stato dimostrato nel § precedente: e però, se come radice iniziale x_2 della seconda orizzontale dello schema (7) si prende $-x_1$, i termini della seconda orizzontale di quello schema diventano uguali opposti ai loro corrispondenti nella prima orizzontale. Similmente, se si pone $x_4 = -x_3$, i termini della quarta orizzontale dello schema (7) diventano uguali opposti ai loro corrispondenti nella terza orizzontale, e così via. Quindi le radici primitive dell'equazione (1) si possono ordinare anche secondo lo schema seguente

---

(*) *Se* m *è multiplo di* 2, *e solo allora, in ciascuna delle equazioni*

$$x^m = -1\,,\quad x^{2m} = 1$$

le radici primitive sono, a due, a due, uguali ed opposte. " Nota ", A, teor. IV.

§ 6.

$$\left.\begin{array}{ccccc} x_1, & x_1^{r}, & x_1^{r^2}, & \ldots, & x_1^{r^{n-1}} \\ -x_1, & -x_1^{r}, & -x_1^{r^2}, & \ldots, & -x_1^{r^{n-1}} \\ x_2, & x_2^{r}, & x_2^{r^2}, & \ldots, & x_2^{r^{n-1}} \\ -x_2, & -x_2^{r}, & -x_2^{r^2}, & \ldots, & -x_2^{r^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \quad (8)$$

Le $\varphi(m)$ radici primitive di un'equazione binomia, $x^m = 1$, sono, come è noto, le radici di un'equazione razionale. Sia questa $F(x) = 0$, nel caso dell'equazione (1): sarà $\varphi(r^{\frac{n}{2}} + 1)$ il grado di $F(x) = 0$. Tale equazione si può scrivere

$$f_1(x)\, f_1(-x)\, f_2(x)\, f_2(-x) \ldots f_\mu(x)\, f_\mu(-x) = 0,$$

dove i 2μ fattori $f(x)$, $f(-x)$ uguagliati a zero dànno le equazioni abeliane di grado n e della classe (I) le cui radici sono, rispettivamente, i termini delle successive orizzontali dello schema (8), e dove deve essere

$$2n\mu = \varphi(r^{\frac{n}{2}} + 1).$$

Nelle equazioni $f = 0$ è poi $[\theta(x) =]\ x^r$ la funzione generatrice delle radici.

Le radici primitive dell'equazione (1), sempre nell'ipotesi che $r^{\frac{n}{2}} + 1$ sia multiplo di 4, si possono ordinare anche secondo lo schema seguente

$$\left.\begin{array}{cccccc} x_1, & -x_1^{r}, & x_1^{r^2}, & -x_1^{r^3}, & \ldots, & -x_1^{r^{n-1}} \\ -x_1, & x_1^{r}, & -x_1^{r^2}, & x_1^{r^3}, & \ldots, & x_1^{r^{n-1}} \\ x_2, & -x_2^{r}, & x_2^{r^2}, & -x_2^{r^3}, & \ldots, & -x_2^{r^{n-1}} \\ -x_2, & x_2^{r}, & -x_2^{r^2}, & x_2^{r^3}, & \ldots, & x_2^{r^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \quad (9)$$

il quale si ottiene dallo schema (8) con facili scambii sulle verticali di posto pari. Le serie costituite sulle orizzontali dello schema (9) hanno la forma della serie (15) del § precedente; nella quale fu supposto essere x una radice tale dell'equazione (1) da potersi con essa mediante la funzione generatrice $[\theta(x) =]\ -x^r$, comporre un'equazione abeliana della classe (I) e di grado n: la qual cosa avviene per ogni radice primitiva della (1) [teorema (I)]. Perciò le quantità che sono sulle singole orizzontali

§ 6.

dello schema (9), a simiglianza di quelle della serie (15) del § precedente, sono radici di un'equazione $h_m(x) = 0$, od $h_m(-x) = 0$, abeliana, della classe (I) e di grado n, nella quale è $[\theta(x) =] -x^r$ la funzione generatrice delle radici.

L'equazione $F(x) = 0$ si potrà quindi scrivere anche nel seguente modo

$$h_1(x)\, h_1(-x)\, h_2(x)\, h_2(-x)\ \ldots\ h_\mu(x)\, h_\mu(-x) = 0.$$

Con i risultati fin qui ottenuti in questo § si possono enunciare i teoremi seguenti:

Teorema II. — *Il numero* $\varphi\,(r^n + 1)$, $(r > 1)$, *è divisibile per* 2n (*).

Teorema III. — *L'equazione* $F(x) = 0$ *che ha per radici le radici primitive dell'equazione binomia* $x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1$ *è decomponibile in* $\frac{\varphi(r^{\frac{n}{2}}+1)}{n}$ *equazioni abeliane di grado* n *e della classe* (I); *in ciascuna delle quali è* $[\theta(x) =]\ x^r$ *la funzione generatrice delle radici.*

Se $r^{\frac{n}{2}} + 1$ *è multiplo di 4, la detta decomposizione può farsi in due modi. Dei quali uno fornisce coppie di equazioni della forma* $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$ *che hanno tutte per funzione generatrice delle loro radici* $[\theta(x) =]\, x^r$; *e l'altro dà coppie di equazioni* $h(x) = 0$, $h(-x) = 0$ *che hanno* $[\theta(x) =] -x^r$ *per funzione generatrice delle loro radici.*

Se $r^n + 1$ è numero primo, il teorema II diviene il seguente:

Teorema IV. — *Se* $r^n + 1$ *è un numero primo, sarà* r^n *divisibile per* 2n, $(r > 1)$.

I teoremi I e III hanno i loro corrispondenti rispetto all'equazione

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1, \qquad (10)$$

nell'ipotesi che r ed $\frac{n}{2}$ siano due numeri dispari, nel qual caso soltanto la precedente equazione è da prendersi in esame, come fu provato nel § 5.

Sia x una radice qualunque dell'equazione (10). I termini della serie

$$x,\ -x^r,\ x^{r^2},\ \ldots,\ -x^{r^{n-1}}\ \ldots \qquad (11)$$

sono pur tutti radici di quella equazione, come è facile verificare, e si deducono l'uno dall'altro, ordinatamente, mediante l'operazione espressa da $[\theta(x) =] -x^r$. Quei termini inoltre sono a due a due reciproci; e precisamente sono reciproci i termini

(*) Questa proprietà del numero $\varphi(r^n + 1)$ risulta anche dal fatto che il numero n al quale, come fu innanzi dimostrato, appartiene r rispetto al modulo $r^{\frac{n}{2}} + 1$, è un divisore di $\varphi(r^{\frac{n}{2}} + 1)$. Cfr. Dirichlet, *Teoria dei numeri* § 28, parte I.

§ 6.

$$[\theta^k(x) =] (-1)^k x^{r^k} \quad e \quad [\theta^{k+\frac{n}{2}}(x) =] \ (-1)^{k+\frac{n}{2}} x^{r^{k+\frac{n}{2}}};$$

giacchè, essendo r ed $\frac{n}{2}$ numeri dispari ed x una radice dell'equazione (10), si ha

$$\theta^k(x) \,.\, \theta^{k+\frac{n}{2}}(x) = (-1)^{2k+\frac{n}{2}} \left(x^{r^{\frac{n}{2}}+1}\right)^{r^k} = 1. \qquad (12)$$

Intanto ogni radice, x, dell'equazione (10) è radice anche dell'altra equazione

$$x^{r^n-1} = 1, \qquad (13)$$

perchè essendo $r^{\frac{n}{2}} - 1$ un numero pari, si ha

$$x^{r^n-1} = \left(x^{r^{\frac{n}{2}}+1}\right)^{r^{\frac{n}{2}}-1} = (-1)^{r^{\frac{n}{2}}-1} = 1.$$

Or l'equazione (13), scritta come segue

$$x^{r^n} = x,$$

mostra che per ogni radice x della (10) esiste sempre qualche numero intero e positivo ν tale che risulti

$$x^{r^\nu} = x; \qquad (14)$$

e se ν è pari allora x^{r^ν} è della serie (11) un termine che riproduce il primo.

Ciò posto sia x in quella serie una radice primitiva dell'equazione (10): allora in virtù del seguente teorema

C) *Le equazioni*

$$x^m = -1$$

$$x^{2m} = 1$$

hanno le stesse radici primitive (*),
sarà x radice primitiva anche dell'altra equazione

$$x^{2\left(r^{\frac{n}{2}}+1\right)} = 1,$$

la quale, paragonata con la (14), che può scriversi

$$x^{r^\nu-1} = 1,$$

(*) Cfr. " Nota „ A.

§ 6.

fa conchiudere che $r_\nu - 1$ deve essere divisibile per $2(r^{\frac{n}{2}} + 1)$. Sia q il quoziente di tale divisione: si avrà così

$$\frac{r^\nu - 1}{r^{\frac{n}{2}} + 1} = 2q.$$

Il più piccolo valore di ν per il quale risulta numero intero il quoziente $\frac{r^\nu - 1}{r^{\frac{n}{2}} + 1}$ è n come fu visto precedentemente; e per $\nu = n$ il detto quoziente risulta anche pari, giacchè

$$\frac{r^n - 1}{r^{\frac{n}{2}} + 1} = r^{\frac{n}{2}} - 1 = \textit{numero pari}.$$

Adunque per ogni radice primitiva dell'equazione (10) è n il più piccolo valore che può avere ν nella (14); e siccome n è pari, così sarà x^{r^n} un termine della serie (11) e precisamente il primo di quelli che riproducono x. Associando a questa proprietà di ogni radice primitiva dell'equazione (10) l'altra espressa dalla relazione (12) si può conchiudere che se x è una radice primitiva della (10) i primi n termini della serie (11) sono radici di un' equazione abeliana della classe (I) e di grado n, e che $[\theta(x) =] - x^r$ ne è la funzione generatrice delle radici.

Quegli n termini, inoltre, sono tutti, come il primo, radici primitive dell'equazione (10). In effetti, in virtù del teorema (C), poc'anzi citato, si ha che la radice primitiva x dell'equazione (10) è pure radice primitiva dell'altra equazione

$$x^{2(r^{\frac{n}{2}}+1)} = 1. \qquad (15)$$

Or il grado $2(r^{\frac{n}{2}} + 1)$ della precedente equazione ed il numero r non possono avere alcun divisore comune; altrimenti dovendo questo esser dispari, come r, e dovendo esso dividere anche i numeri $2r^{\frac{n}{2}}$ e $2(r^{\frac{n}{2}} + 1)$, dividerebbe la loro differenza 2: ciò che è assurdo.

Essendo r, e quindi le potenze di r numeri primi col grado dell'equazione (15), le potenze x^{r^k} della radice primitiva x di quella equazione, sono pur esse radici primitive di tale equazione. Siccome poi il grado dell'equazione (15) è multiplo di 4 perchè $r^{\frac{n}{2}} + 1$ è numero pari, così sarà radice primitiva di detta equazione sia x^{r^k} che $-x^{r^k}$, come fu già notato innanzi. E però si conchiude che i termini della serie (11) sono tutti radici primitive dell' equazione (15) e quindi anche dell' equazione (10) [teorema (C)].

Sia x_1 un'altra radice primitiva dell'equazione (10) non compresa nella serie (11); le quantità

§ 6.

$$x_1, \ -x_1^{r}, \ x_1^{r^2} \ . \ . \ . , \ -x_1^{r^{n-1}} \tag{16}$$

si trovano nelle stesse condizioni di quelle della serie (11) ed inoltre son tutte a quelle disuguali. In effetto, se fosse per es.

$$(-1)^{k_1} x_1^{r^{k_1}} = (-1)^k x^{r^k}, \tag{17}$$

ne seguirebbe, per k e k_1 entrambi pari od entrambi dispari, che

$$x_1^{r^{k_1}} = x^{r^k},$$

e quindi che

$$x_1 = x^{r^{k-k_1}},$$

se è $k > k_1$, ovvero

$$x_1 = x^{r^{n+k-k_1}},$$

se è $k < k_1$; cioè x_1 sarebbe un termine della serie (11), la qual cosa è contro l'ipotesi.

Se poi dei numeri k e k_1 l'uno è pari e l'altro dispari, allora la relazione (17) diviene

$$x_1^{r^{k_1}} = -x^{r^k}$$

e da questa si conchiude come innanzi che

$$x_1 = -x^{r^{k-k_1}}$$

ovvero che

$$x_1 = -x^{r^{n+k-k_1}}$$

secondo che è $k > k_1$ ovvero $k < k_1$: per la qual cosa x_1 dovrebbe di nuovo trovarsi fra i termini della serie (11), ciò che si è escluso.

Le precedenti deduzioni intorno all'equazione (10) dànno luogo ai due teoremi seguenti:

Teorema V. — *Se* r *ed* $\frac{n}{2}$ *sono numeri dispari ed è* x *una radice primitiva dell'equazione*

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1, \tag{a}$$

le n *quantità, fra loro disuguali,*

$$x, \ -x^{r}, \ x^{r^2}, \ . \ . \ . , \ -x^{r^{n-1}}, \tag{b}$$

§ 6.

sono tutte radici primitive di quella equazione. Con esse si può comporre un' equazione abeliana di grado n *e della classe* (I), *per la quale è* $[\theta(x) =] = -x^r$ *la funzione generatrice delle radici. Tale equazione non avrà alcuna radice comune con ogni altra che si può comporre mediante una radice primitiva dell'equazione (a) non compresa fra quelle della serie (b).*

Teorema VI. — *Se* r *ed* $\frac{n}{2}$ *sono numeri dispari, l' equazione* $G(x) = 0$ *che ha per radici le radici primitive dell'equazione*

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1$$

è decomponibile in $\frac{\varphi\left[2\left(r^{\frac{n}{2}}+1\right)\right]}{n}$ *equazioni abeliane di grado* n *e della classe* (I), *in ciascuna delle quali è* $[\theta(x) =] - x^r$ *la funzione generatrice delle radici.*

---

§ 7.

I teoremi I e V del precedente paragrafo stabiliscono che con qualunque radice primitiva di ciascuna delle equazioni

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1\,, \qquad (1)$$

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -\,1\,, \qquad (2)$$

nella seconda delle quali r ed $\frac{n}{2}$ sono due numeri dispari, si può comporre un'equazione abeliana della classe (I) e di grado n. Ma fra le radici delle dette equazioni ve n'ha di quelle che, pur non essendo primitive, hanno però di queste la stessa attitudine nella presente quistione. Così se $n+1$ è un numero primo ed r ne è una radice primitiva, le n quantità

$$x,\ x^r,\ x^{r^2},\ \ldots,\ x^{r^{n-1}}$$

formate mediante una radice x dell'equazione $x^{n+1}=1$ sono radici dell'equazione

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0$$

che è abeliana e della classe (I). Intanto fu dimostrato nel § 5 che la radice x, come ogni altra dell'equazione $x^{n+1}=1$, è pure radice dell'equazione (1), ma non ne è una radice primitiva. Sicchè esistono nell'equazione (1) radici le quali quantunque non primitive dànno luogo però ad equazioni abeliane di grado n e della classe (I).

Il teorema generale del § 3 provvede ad escludere dalle radici dell'equazione (1) o dell'equazione (2) quelle con le quali non è possibile comporre equazioni abeliane di grado n. L'equazione (12) considerata in quel teorema diviene nel caso presente, in cui è $\theta(x) = \pm\, r^r$,

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1\,, \qquad (3)$$

se si pone $\theta(x) = x^r$; e se invece si pone $\theta(x) = -\,x^r$, quell'equazione diviene

$$x^{r^{\frac{a}{2}}+1} = (-\,1)^{\varepsilon'}, \qquad (4)$$

dove è

$$\epsilon' = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{\frac{a}{2}-1}.$$

§ 7.

Or l'equazione generale (3) del § 3 si ridusse all'attuale equazione (1) in seguito all'ipotesi di $\theta(x) = x^r$, per ogni valore di r e di $\frac{n}{2}$, ovvero di $\theta(x) = -x^r$, se r è dispari ed $\frac{n}{2}$ è pari. Ma se $\frac{n}{2}$ è pari, tale è pure $\frac{a}{2}$, che è un divisore di $\frac{n}{2}$ al quale deve corrispondere un quoziente dispari, e però in tal caso, risultando pari il numero ϵ', ne segue che l'equazione (4) si riduce all'equazione (3) e si conchiude che dalle radici dell'equazione (1) son da escludersi solo tutte quelle che tale equazione ha comuni con le equazioni della forma (3).

Analogamente si conchiuderebbe che dalle radici dell'equazione (2) vanno escluse solo quelle che tale equazione ha comuni con equazioni della forma

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1. \tag{5}$$

Per quel che riguarda poi le radici $+1$ o -1 che, secondo il teorema del § 3 devonsi sopprimere dall'equazione (1) o dalla (2), si ha che 1 è radice comune alla (1) ed a ciascuna delle equazioni (3), ed altrettanto, se r è impari, avviene della radice -1 dell'equazione (1). Di guisa che le radici $+1$ o -1 di questa equazione verranno da essa soppresse come radici che tale equazione ha comuni con una qualunque delle (3). Fa solo eccezione il caso nel quale delle equazioni (3) non ne esista alcuna; ciò che può avvenire solo allorquando n è una potenza di 2, oppure $r^{\frac{n}{2}} + 1$ è un numero primo. Giacchè se n è una potenza di 2 non esistono i numeri a e se $r^{\frac{n}{2}} + 1$ è un numero primo, allora non esistendo i numeri $r^{\frac{a}{2}} + 1$, che altrimenti sarebbero divisori di $r^{\frac{n}{2}} + 1$, non esisteranno neppure i numeri a. Il secondo di questi due casi include il primo: imperocchè se $r^{\frac{n}{2}} + 1$ è numero primo, non esistendo più i divisori $r^{\frac{a}{2}} + 1$, non esisteranno neppure i divisori a di n e quindi n dovrà essere una potenza di 2.

Ora, se delle equazioni (3) non ne esista alcuna, è d'uopo sopprimere dall'equazione (1) solo la radice 1, se r è pari, o solo le radici 1 e -1 se r è dispari.

L'equazione (2) poi non può avere nè la radice $+1$ nè la radice -1 essendo in essa $r^{\frac{n}{2}} + 1$ un numero pari. Oltre a ciò, siccome $\frac{n}{2}$ è dispari, esisterà sempre qualche equazione della forma (5), per es. l'equazione $x^{r+1} = -1$, per la quale è $a = 2$.

Si possono ora enunciare i teoremi seguenti.

Teorema I. — *Siano* r *ed* $\frac{\mathrm{n}}{2}$ *due numeri interi e positivi, il secondo dei quali non sia una potenza di* 2*: siano inoltre* a, a′, a″, *ecc. tutti quei divisori positivi di* n, *minori di* n, *che dànno quozienti dispari. Se dall'equazione*

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1 \tag{1'}$$

§ 7.

si sopprimono tutte quelle radici che essa ha comuni con le equazioni seguenti

$$x^{r^{\frac{a}{2}}+1}=1\,,\quad x^{r^{\frac{a'}{2}}+1}=1\,,\quad x^{r^{\frac{a''}{2}}+1}=1,\ \text{ecc.}; \qquad (a)$$

ovvero se dall'equazione

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1}=-1, \qquad (2')$$

nella quale r *ed* $\frac{n}{2}$ *si suppongono dispari, si sopprimono tutte quelle radici che essa ha comuni con le altre equazioni seguenti*

$$x^{r^{\frac{a}{2}}}+1=-1\,,\quad x^{r^{\frac{a'}{2}}+1}=-1\,,\quad x^{r^{\frac{a''}{2}}+1}=-1\,,\ \text{ecc.}, \qquad (a')$$

le equazioni razionali $\Phi(x)=0$, $\Psi(x)=0$ *che, nel primo caso, o nel secondo, risultano formate con le rimanenti radici dell'equazione* (1′) *o dell'equazione* (2′), *sono decomponibili in equazioni abeliane di grado* n *della classe* (I).

Le equazioni provenienti dalla scomposizione di $\Phi(x)=0$ *hanno per funzione generatrice delle loro radici* $[\theta(x)=]\ x^r$*; le altre, relative all'equazione* $\Psi(x)=0$, *hanno per funzione generatrice delle loro radici* $[\theta(x)=]-x^r$.

Se nell'equazione (1′) r *è impari ed* $\frac{n}{2}$ *è pari, la decomposizione di* $\Phi(x)=0$ *può farsi in due modi: potendosi assumere come funzione generatrice sia* $[\theta(x)=)\ x^r$ *che* $[\theta(x)=]-x^r$. (Teorema III, § 5) (*).

Teorema II. — *Le equazioni*

$$\frac{x^{r^{2^m}+1}-1}{x-1}=0 \qquad (6)$$

$$\frac{x^{r^{2^m}+1}-1}{x^2-1}=0, \qquad (7)$$

nella prima delle quali r *è pari e nella seconda* r *è dispari, sono decomponibili in equazioni tutte abeliane di grado* 2^{m+1} *e della classe* (I). *Di tali equazioni, quelle che provengono dalla decomposizione dell'equazione* (6) *hanno per funzione generatrice delle loro radici* $[\theta(x)=]\ x^r$, *e quelle provenienti dalla decomposizione dell'equazione* (7) *possono avere per funzione generatrice o* $[\theta(x)=]\ x^r$ *ovvero* $[\theta(x)=]-x^r$ (**).

(*) Le radici delle equazioni $\Phi(x)=0$ e $\Psi(x)=0$ sono *radici abeliane d'ordine n* delle equazioni (1′) e (2′). Esse potrebbero anche denominarsi *radici abeliane di indice* $r^{\frac{n}{2}}+1$ dell'unità positiva o dell'unità negativa. Nel campo di tali radici trovansi le radici primitive delle equazioni (1′) e (2′). Cfr. la nota al § 4.

(**) Le radici dell'equazione binomia $x^{r^{2^m}}-1=0$, salvo ±1, sono tutte abeliane di ordine 2^{m+1} Cfr. la nota al § 4.

§ 7.

Il grado $r^{2^m}-1$ dell'equazione (7) dovendo esser multiplo del grado 2^{m+1} delle equazioni abeliane nelle quali essa si decompone, ne segue che, ponendo $r=2p+1$ deve essere

$$\frac{(2p+1)^{2^m}-1}{2^{m+1}} = numero\ intero\,,$$

per ogni valore del numero intero e positivo p.

Essendo $\frac{a}{2}$ un divisore di $\frac{n}{2}$ che dà un quoziente dispari, si deduce che $r^{\frac{n}{2}}+1$ è divisibile per $r^{\frac{a}{2}}+1$: e però il quoziente $\dfrac{x^{r^{\frac{n}{2}}+1}-1}{x^{r^{\frac{a}{2}}+1}-1}$ è una funzione intera di x. Inoltre il quoziente di $r^{\frac{n}{2}}+1$ diviso per $r^{\frac{a}{2}}+1$ è dispari: imperocchè se q è il quoziente dispari $\frac{n}{a}$ si ha

$$\frac{r^{\frac{n}{2}}+1}{r^{\frac{a}{2}}+1} = \left(r^{\frac{n}{2}-\frac{a}{2}}-r^{\frac{n}{2}-2\frac{a}{2}}\right)+\ldots+\left(r^{\frac{n}{2}-(q-2)\frac{a}{2}}-r^{\frac{n}{2}-(q-1)\frac{a}{2}}\right)+1:$$

or la funzione di r, $f(r)$, che è nel secondo membro della precedente uguaglianza ha, oltre al termine 1, altri $\frac{n}{2}-\frac{a}{2}\left[=\frac{a}{2}(q-1)\right]$ termini, i quali formano $\frac{a}{2}\cdot\frac{q-1}{2}$ differenze che son tutte pari; e però $f(r)+1$ è un numero dispari.

Essendo dispari il quoziente di $r^{\frac{n}{2}}+1$ diviso per $r^{\frac{a}{2}}+1$ ne segue che $\dfrac{x^{r^{\frac{n}{2}}+1}+1}{x^{r^{\frac{a}{2}}+1}+1}$ è una funzione intera di x.

Ciò premesso, siano $\mu_1(x)$ il massimo comun divisore fra $\dfrac{x^{r^{\frac{n}{2}}}\mp1}{x^{r^{\frac{a}{2}}}\mp1}$ ed $x^{r^{\frac{a'}{2}}}\mp1$ (dove devonsi prendere contemporaneamente o i segni superiori o quelli inferiori), $\mu_2(x)$ il massimo comun divisore fra $\dfrac{x^{r^{\frac{n}{2}}+1}\mp1}{\left(x^{r^{\frac{a}{2}}+1}\mp1\right)\mu_1(x)}$ ed $x^{r^{\frac{a''}{2}}+1}\mp1$ e così via; si avrà allora che l'equazione

$$\frac{x^{r^{\frac{n}{2}}+1}\mp1}{\left(x^{r^{\frac{a}{2}}+1}\mp1\right)\mu_1(x)\,\mu_2(x)\ldots..} = 0 \qquad (8)$$

esprimerà l'equazione $\Phi(x)=0$ o l'equazione $\Psi(x)=0$, secondo che si prendano i segni superiori o quelli inferiori.

§ 7.

In particolare sia $n = 2^\nu q$, dove q è un numero primo: in conseguenza 2 è l'unico divisore di n che dà un quoziente dispari. L'equazione $\Phi(x) = 0$ presentemente diviene

$$\frac{x^{r^{2^{\nu-1}q}+1} - 1}{x^{r^{2^{\nu-1}}+1} - 1} = 0,$$

ed il suo grado $r^{2^{\nu-1}q} - r^{2^{\nu-1}} \left[= r^{2^{\nu-1}}\left(r^{2^{\nu-1}(q-1)} - 1\right)\right]$ deve essere un multiplo di n, cioè di $2^\nu q$. Posto adunque $\nu - 1 = p$, si ha l'altro seguente

Teorema III. — *Se* q *è un numero primo positivo, e sono* r *e* p *due numeri interi positivi qualunque, sarà*

$$\frac{r^{2^p}\left(r^{2^p(q-1)} - 1\right)}{2^{p+1} q} = \textit{numero intero}.$$

Essendo q un numero primo, il numeratore della precedente espressione deve essere divisibile per q: e quindi se q non è un divisore di r, sarà

$$\frac{r^{2^p(q-1)} - 1}{q} = \textit{numero intero}.$$

La precedente eguaglianza per $p = 0$ dà il teorema di *Fermat*.

L'equazione $\Psi(x) = 0$ se, come si è supposto poc'anzi, è $n = 2^\nu q$, diviene

$$\frac{x^{r^{2^{\nu-1}q}+1} + 1}{x^{r^{2^{\nu-1}}} + 1} = 0.$$

---

§ 8.

Sia x una qualunque delle radici dell'equazione $\Phi(x) = 0$ o dell'equazione $\Psi(x) = 0$ considerate nel § precedente e per le quali è $(\theta(x) =) \pm x^r$ la funzione generatrice delle radici.

La funzione seguente

$$y = x + \theta x + \theta^2 x + \ldots + \theta^{n-1} x$$

di n radici di $\Phi(x) = 0$, o di $\Psi(x) = 0$, rimane invariata se in essa in luogo della radice x si pone una qualunque delle altre radici $\theta x, \theta^2 x, \ldots, \theta^{n-1} x$: e perciò y può avere solo ν valori, se ν è il quoziente del grado di $\Phi(x) = 0$, o di $\Psi(x) = 0$, diviso per n. Per la qual cosa y è radice di un'equazione razionale

$$Y = 0 \qquad (1)$$

di grado ν, la quale si ottiene con processi noti.

Se questa equazione non ha radici uguali, con la sua risoluzione si conoscerà la funzione simmetrica y di n radici dell'equazione $\Phi(x) = 0$ o dell'equazione $\Psi(x) = 0$, e, mediante la conoscenza di y, resteranno determinati, come è noto, i fattori di grado n di $\Phi(x)$ o di $\Psi(x)$: questi uguagliati a zero forniscono le equazioni abeliane di grado n e della classe (I) nelle quali è decomponibile l'equazione $\Phi(x) = 0$, o l'altra $\Psi(x) = 0$.

Questo processo generale può però nei casi particolari essere semplificato.

Vogliansi, per es., determinare le equazioni abeliane di quarto grado e della classe (I) per le quali è $r = 3$ ovvero $r = 2$.

L'equazione

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = 1$$

per $r = 3$ diviene

$$x^{10} = 1. \qquad (2)$$

L'equazione (7) considerata nel teorema II del § 7 è data attualmente da

$$\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = 0, \qquad (3)$$

cioè da

$$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0. \qquad (3')$$

§ 8.

Questa equazione deve esser decomponibile in due equazioni abeliane di quarto grado e della classe (I) le quali hanno $[\theta(x) =]\, x^3$ per funzione generatrice delle loro radici. E siccome presentemente r è dispari, così l'equazione (3') si può decomporre anche in altre due equazioni abeliane nelle quali la funzione generatrice è $[\theta(x) =] - x^3$. La precedente funzione y per $\theta(x) = x^3$ diviene

$$y = x + x^3 + x^9 + x^{27},$$

cioè

$$y = x + x^3 + x^7 + x^9, \tag{4}$$

giacchè $x^{27} = x^{20}.\, x^7 = x^7$, in virtù dell'equazione (3). Per $\theta(x) = - x^3$ la funzione y diviene invece

$$y = x - x^3 - x^7 + x^9. \tag{5}$$

L'equazione (1) corrispondente alla funzione (4), od alla funzione (5), è di secondo grado: essa può ottenersi eliminando x fra le equazioni (3') e (4), ovvero (3') e (5).

Addizionando membro a membro le equazioni (3') e (4) si ha che

$$y = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} - x^5 \tag{6}$$

e siccome x è una radice diversa da ± 1 dell'equazione (2), così la (6) si riduce alla seguente

$$y = - x^5,$$

dalla quale si ottiene

$$y^2 = x^{10} = 1$$

e però $y = \pm 1$.

Col valore -1 della funzione y si ottiene il seguente fattore biquadratico del primo membro dell'equazione (3')

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

e col valore $+1$ di y si ottiene, conseguentemente, l'altro fattore

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Sicchè l'equazione (3') si scinde nelle seguenti due equazioni abeliane della classe (I)

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \tag{7}$$

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0, \tag{8}$$

le cui radici hanno $[\theta(x) =]\ x^3$ per funzione generatrice. L'equazione (8) si ottiene dalla (7) mutando x in x, come prescrive il teorema III del § 5.

L'altra equazione

$$x^{r^{\frac{n}{2}}+1} = -1$$

nella quale $\frac{n}{2}$ deve esser dispari, non è da prendersi attualmente in considerazione, giacchè $\frac{n}{2} (= 2)$ è pari.

Le equazioni (7) ed (8) si potevano anche ottenere immediatamente considerando che

$$\frac{x^{10}-1}{x^2-1} = \frac{x^5-1}{x-1} \cdot \frac{x^5+1}{x+1}$$

$$= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1);$$

e che se x è radice di una delle due equazioni (7) ed (8) che si hanno uguagliando a zero i due precedenti fattori in parentesi, anche $[\theta(x) =]\ x^3$ è radice di quella equazione; giacchè si ha

$$x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = x^{10}.\, x^2 + x^5.\, x^4 + x^5.\, x + x^3 + 1 =$$
$$= x^2 + x^4 + x + x^3 + 1 = 0,$$

ed

$$x^{12} - x^9 + x^6 - x^3 + 1 = x^{10}.\, x^2 - x^5.\, x^4 + x^5.\, x - x^3 + 1 =$$
$$= x^2 + x^4 - x - x^3 + 1 = 0.$$

Oltre a ciò è pure, per $n = 4$,

$$x^{3^k}\ x^{3^{k+\frac{n}{2}}} = x^{3^k(1+3^2)} = (x^{10})^{3^k} = 1.$$

Se $r = 2$ si rinvengono immediatamente di nuovo le equazioni (7) ed (8).

Per avere l'altra equazione (1) risultante dall'eliminazione di x fra le equazioni (3′) e (5), si moltiplichino ambo i membri della (5) per x e se ne sottraggano poi quelli della (3′); risulta così

$$xy = -2x^8 - x^6 - 2x^4,$$

cioè

$$xy = -2(x^8 + x^6 + x^4) + x^6,$$

od anchè, tenendo presente l'equazione (3′)

$$xy = -2(x^2 + 1) + x^6.$$

§ 8.

Da quest'ultima equazione, notando che $x^{12} = x^2$, si deduce l'altra

$$x^2 y^2 = 4 (x^8 + x^6 + x^4 + x^1 + 1) + 5x^2,$$

la quale, in virtù della (3'), si riduce alla seguente

$$x^2 y^2 = 5x^2$$

e questa dà

$$y = \pm \sqrt{5}.$$

Mediante il valore $-\sqrt{5}$, od il valore $+\sqrt{5}$ della funzione y, l'equazione (3') si decompone nelle due seguenti

$$x^4 + \sqrt{5}x^3 + 3x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0 \tag{9}$$

$$x^4 - \sqrt{5}x^3 + 3x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0. \tag{10}$$

Sicchè, oltre alle equazioni (7), (8), (9), (10), mediante le radici di ± 1 non si possono formare altre equazioni abeliane, biquadratiche e della classe (I), per le quali è $r = 3$, ovvero $r = 2$.

Catania, 1892.

SOPRA LE CURVE DI DATO ORDINE

E DEI MASSIMI GENERI

IN UNO SPAZIO QUALUNQUE

MEMORIA

DI

GINO FANO

Approvata nell'Adunanza del 25 Giugno 1893 (*).

Al concorso aperto dall'Accademia delle Scienze di Berlino pel conferimento del terzo premio Steiner (sopra un tema relativo alla teoria delle curve sghembe algebriche (1)) si presentarono, com'è noto, due celebri Memorie; una dell'Halphen (2), l'altra del Noether (3): pregevolissime entrambe, n'ebbero anzi diviso il premio (4). E fra i risultati contenuti in queste Memorie è certo importantissimo il teorema, che *le curve sghembe di dato ordine e* GENERE MASSIMO *sono tutte contenute in una quadrica* (5). Questa proposizione è stata poi estesa dal sig. Castelnuovo alle curve di uno spazio lineare a un numero qualunque r di dimensioni (6), e in luogo della quadrica compare in questo caso più generale la rigata razionale normale di ordine $r-1$ (7) (o anche, per $r=5$, la superficie omaloide F_2^4 di Veronese (*Mem. della R. Accad. dei Lincei*, 3°, XIX)). Con quest'estensione si può ritenere esaurita la determinazione delle varie curve di genere massimo (π) di uno spazio qualunque S_r (e di ordine $> 2r$); appunto perchè queste curve ne risultano contenute

(*) Questa Memoria è tratta dalla Dissertazione di Laurea presentata dall'autore alla Facoltà di Scienze dell'Università di Torino nel giugno 1892.

(1) " *Irgend eine auf die Theorie der höheren algebraischen Raumcurven sich beziehende Frage von " wesentlicher Bedeutung vollständig erledigen* ".

(2) *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques:* un estratto di questa Memoria era già stato pubblicato nei " Compt. Rend. de l'Ac. des Sc. " (t. 70, 1870). All'Halphen è pure dovuta la determinazione del numero minimo di punti doppi apparenti (ossia del massimo genere) che può avere una curva sghemba di dato ordine.

(3) *Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven* (Berlin, 1883).

(4) V. " Sitzungsber der Berl. Akad. ", 1882; p. 735 (öffent. Sitz. vom 29 Juni).

(5) Proposizione già accennata da Halphen nei Compt. Rend. (1870).

(6) Cfr. la Mem. *Ricerche di Geometria sulle curve algebriche;* n^i 28 e seg. (" Atti dell'Accad. di Torino ", vol. XXIV). In questo stesso lavoro è anzi stato determinato per la prima volta il *genere massimo* di una curva di dato ordine e appartenente a un dato spazio qualsiasi.

(7) Della quale appunto quella quadrica (dello spazio S_3) è caso particolare.

in superficie (razionali) molto semplici e di proprietà ben note, sulle quali sarà sempre facile costruirle. La questione che si presenta ora invece come — dirò così — successiva, e che sembra anche meritevole di essere studiata, è quella di fare una ricerca analoga anche per le curve di genere $\pi - 1$, $\pi - 2$,..... determinando se e quando anche queste possano stare sulla rigata R^{r-1} (o, per $r = 5$, sulla F_2^4 di Veronese); ovvero, quando non vi stiano, in quali altre superficie (possibilmente semplici) esse siano contenute. E tale ricerca costituisce appunto l'oggetto principale di questo lavoro. Già prima ch'io cominciassi ad occuparmene lo stesso sig. Castelnuovo mi aveva detto di ritenere che le curve di genere $\pi - 1$ dovessero stare necessariamente — almeno da un certo ordine in poi — su di una superficie a sezioni ellittiche o razionali. La proposizione sussiste effettivamente, e si vedranno anzi in seguito enumerati i varî casi che queste curve possono presentare. Uno studio analogo sarà fatto anche per le curve di genere $\pi - 2$; più in succinto però, perchè molte loro proprietà si potranno poi stabilire facilmente e con ragionamenti affatto identici a quelli già usati per le curve di genere $\pi - 1$. E sarebbe forse interessante il cercar di estendere questi stessi risultati anche alle curve di genere $\pi - 3$, $\pi - 4$,..... e, in generale, $\pi - k$; ma di questo (come dico pure alla fine del § 8) non intendo per ora occuparmi.

A questa ricerca fa seguito, come appendice, una breve Nota, nella quale, applicando quel concetto, ormai notissimo, ma sempre fecondo (1) a cui è informata la *Neue Geometrie des Raumes* di Giulio Pluecker e a cui pure si informarono in seguito parecchi lavori di altri scienziati — e primi fra tutti quelli del sig. Klein —, si deducono dai risultati ricordati e ottenuti in questo lavoro alcune proprietà di certe rigate e congruenze di rette appartenenti al nostro spazio (2).

§ 1.

Genere massimo di una curva che sta sopra un dato numero di quadriche.

1. Il signor Castelnuovo dopo aver determinato nelle sue *Ricerche di geometria sulle curve algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, XXIV) il *genere massimo* di una curva di ordine n (C^n) *appartenente* allo spazio S_r (3), dimostra che:

(1) " *Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer* $M_4^{(2)}$ *des* R_5 „ (Cfr. F. Klein: *Ueb. Liniengeometrie und metrische Geometrie*; " Math. Ann. „, V. p. 261).

(2) Mi è caro rinnovare qui i più vivi ringraziamenti al prof. C. Segre, che mi iniziò allo studio delle curve algebriche e della Geometria sopra queste (nelle sue lezioni di *Geometria sopra un ente algebrico,* dettate nell'Università di Torino l'anno acc. 1890-91), e al prof. G. Castelnuovo dell'Università di Roma, che volle anche gentilmente dirigermi in queste ricerche.

(3) Questo *genere massimo* (che noi in seguito indicheremo sempre colla lettera π) egli lo trova espresso da

$$\chi \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi \, \frac{r-1}{2} \right\}$$

dove χ è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$ (cfr. loc. cit., 27). Questo stesso risultato fu poi ridimostrato, circa un anno più tardi, dal prof. E. Bertini nella sua Nota: *Intorno ad alcuni teoremi della Geometria sopra una curva algebrica* (" Atti dell'Accad. di Torino „, XXVI). In questo lavoro si

Per una curva di S_r *d'ordine* $n \geq 2r$ *e del massimo genere passano* $\binom{r-1}{2}$ *quadriche linearmente indipendenti;* e ogni altra quadrica passante per una tal curva appartiene al sistema lineare di quelle. — La prima parte dell'enunciato è vera anche se l'ordine della curva è inferiore a $2r$; ma per questa curva potranno passare allora anche più di $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti (1).

Da questo risultato egli deduce poi che:

Se $n > 2r$, *la curva d'ordine* n *e di genere massimo di* S_r *sta in una superficie a due dimensioni d'ordine* $r-1$; superficie che, come sappiamo, è sempre rigata se r è diverso da 5 (2), ma può non esserlo nel caso di $r = 5$ (superficie di Veronese) (3). *Questa superficie è comune a tutte le quadriche passanti per quella curva*, e costituisce anzi precisamente la *varietà base* del loro sistema lineare (4).

La dimostrazione che il sig. Castelnuovo dà di quest'ultima proposizione si applica anche *a qualsiasi curva di* S_r *di ordine* $n > 2r$ *per la quale passino* $\binom{r-1}{2}$ *quadriche indipendenti* (sia o non sia questa curva di genere massimo) (5) (6).

---

trovano anche generalizzate alcune delle proprietà che condussero il Castelnuovo a quella determinazione, e ne sono accennate alcune fra le possibili applicazioni.

Non occorre avvertire che il *genere massimo* da noi indicato con π è sempre funzione dell'ordine n della curva e della dimensione r dello spazio cui essa appartiene. Per brevità ci asteniamo dall'usare per questo una notazione più espressiva, scrivendo ad es. $\pi \{ n, r \}$; e ciò perchè, anche in seguito, non ci sembra vi sia pericolo di confusione.

(1) Ci sia concesso, ora ed in seguito, di parlare semplicemente di *quadriche indipendenti*, sottintendendo per brevità il *linearmente*.

(2) Cfr. Del Pezzo: *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio* S_{n+1} (" Rendiconti della R. Accad. di Napoli ", 1885).

(3) *La superficie omaloide normale a due dimensioni del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario* (" Mem. della R. Acc. dei Lincei ", serie 3ª, vol. XIX, 1883-84).

(4) Nel caso di una superficie rigata, come osserva anche il sig. Castelnuovo, il numero χ aumentato di un'unità dà il numero dei punti in cui la curva considerata incontra le varie generatrici di quella stessa rigata. Però, per le curve il cui ordine è un multiplo di $r-1$ aumentato di una unità, questo stesso numero può anche esser dato dalla somma $\chi + 2$. Segando infatti la rigata R^{r-1} con una varietà M^k_{r-1} che non le sia tangente in alcun punto, ma passi per $r-2$ sue generatrici, otteniamo come intersezione (residua) una curva di ordine $n = (k-1)(r-1)+1$ incontrata da ogni generatrice in k punti; e perciò, per una nota formola, di genere $\binom{k-1}{2}(r-1)$, cioè appunto di genere π. E il numero χ, in questo caso precisamente uguale a $\frac{n-r}{r-1}$, vale soltanto $k-2$ (onde $k = \chi + 2$).

La formola cit. è quella data dal sig. Segre nella Nota: *Intorno alla geometria su una rigata algebrica* (" Rendic. R. Accad. dei Lincei ", 1887), e da lui stesso poi generalizzata nella Nota successiva (stessi Rendic.): *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi.*

(2 novembre) L'osservazione contenuta in questa nota è stata fatta anche recentemente dal sig. Castelnuovo, in un lavoro inserto nei " Rend. di Palermo " (t. VII, p. 97).

(5) Questa sola proprietà (l'essere contenuta cioè in $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti) basta infatti per concludere che le n intersezioni della curva C^n con un S_{r-1} (intersezioni che possiamo ritenere ad r ad r indipendenti) non imporranno certo alle quadriche di quest'ultimo spazio che le contengono più di $2r-1$ condizioni distinte. E il sig. Castelnuovo fa vedere appunto (cfr. loc. cit.: 30) che in tal caso, se $n > 2r$, quelle n intersezioni dovranno stare sopra una curva razionale normale di ordine $r-1$, che sarà pur contenuta a sua volta in tutte le quadriche passanti per quegli stessi n punti. E dalla curva C^{r-1} di S_{r-1} si risale poi subito alle superficie F^{r-1} di S_r.

(6) Questi risultati ottenuti dal sig. Castelnuovo e qui ricordati si possono anche estendere al

2. Una curva di S_r la quale stia sopra meno di $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti non potrà dunque essere di genere massimo (π)— e non starà sopra una rigata razionale normale, nè sulla superficie di Veronese (se $r=5$) —.

Si presenta dunque, di per sè, la questione: *Sapendo che per una certa curva C_p^n appartenente a S_r passano solo* $\binom{r-1}{2}-\delta$ *quadriche indipendenti (o almeno non ne passano di più), determinare per il genere* p *di questa stessa curva un limite superiore* (possibilmente diverso da π, e precisamente inferiore a questo, se $\delta>0$).

A questa domanda si può rispondere facilmente, con un ragionamento analogo a quello con cui il Castelnuovo giunse alla determinazione del genere π. E noi dimostreremo precisamente che:

Il genere p *di una curva normale* (1) *d'ordine* n *appartenente a* S_r *per la quale passino non più di* $\binom{r-1}{2}-\delta$ *quadriche indipendenti non può mai superare il limite*

$$\chi_\delta\left\{n-\frac{r+1}{2}-\chi_\delta\frac{r-1}{2}\right\}-\left\{\chi_\delta-1\right\}\delta$$

dove χ_δ *è il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-r-\delta}{r-1}$.

Questo risultato comprenderà come caso particolare ($\delta=0$) quello già ottenuto dal sig. Castelnuovo.

Infatti, per le nostre ipotesi, la serie lineare (di ordine $2n$) segata sulla curva C_p^n dal sistema di tutte le quadriche di S_r sarà di dimensione

---

caso in cui, invece di quadriche, si vogliano considerare varietà pure di dimensione $r-1$, ma di un ordine qualunque $k\geq 2$. E si ha precisamente:

Per ogni curva appartenente ad S_r e del genere massimo passano almeno

$$\binom{r+k}{k}-\binom{k+1}{2}r+\binom{k}{2}-1$$

varietà M_{r-1}^k linearmente indipendenti. Indicando questo numero per brevità con (r,k), possiamo aggiungere:

Quando l'ordine della curva di genere massimo è superiore a $k(r-1)$ *per essa passano precisamente* (r, k) *varietà M_{r-1}^k indipendenti;* e ogni altra M_{r-1}^k che la contiene appartiene al sistema lineare di queste. La dimostrazione si può fare per induzione completa da k a $k+1$, osservando che le M_{r-1}^k passanti per una curva (irriduttibile) appartenente a S_r e per un dato S_{r-1} (di questo S_r) sono tante quante le M_{r-1}^{k-1} che contengono quella stessa curva. E infine:

Se per una curva appartenente ad S_r e di ordine $n>k(r-1)+2$ *passano* (r, k) *varietà M_{r-1}^k indipendenti, questa curva starà su di una superficie razionale normale di ordine* $r-1$ *comune a tutte quelle varietà.* Questa proposizione si applica in particolare alle curve di genere massimo; da essa deduciamo altresì che, se una curva di S_r è contenuta in (r,k) varietà indipendenti di un certo ordine k, ed è a sua volta di ordine $>k(r-1)+2$, essa dovrà anche stare sopra almeno (r,k') varietà indipendenti di ogni altro ordine $k'\geq 2$.

Anche le ricerche che andremo ora facendo per curve contenute in sistemi lineari di quadriche di dimensione inferiore a $\binom{r-1}{2}-1$ potrebbero estendersi al caso di sistemi di varietà M_{r-1}^k; ma già il calcolo analogo a quello che faremo nel n° 2 riuscirebbe molto complicato; ci basti quindi di aver accennata la possibilità di questa estensione.

(1) Si potrebbe anche omettere questa restrizione, e supporre la curva normale per un S_{r+i}, modificando solo opportunamente il limite superiore che segue. Ho preferito tuttavia dare al teorema questa forma (più semplice) perchè sarà solo a curve normali che dovremo applicarlo. Si può anzi ritenere, come sappiamo, che una curva speciale (di quelle non speciali non avremo ad occuparci) sia anche, *in generale*, una curva normale.

$$d \geq \binom{r+2}{2} - \binom{r-1}{2} + \delta - 1$$

ossia

$$d \geq 3r + \delta - 1.$$

Supponiamo che questa serie g_{2n}^d sia *speciale*. Sarà allora speciale — perchè contenuta in quest'ultima — anche la g_n^r segata su C_p^n dagli iperpiani (S_{r-1}) di S_r, e speciale la curva stessa. Essendo questa normale, ogni gruppo di quella g_n^r imporrà a un gruppo della serie *canonica* (g_{2p-2}^{p-1}) che debba contenerlo un numero μ_1 di condizioni precisamente uguale a $n - r$. D'altra parte, se indichiamo con μ_2 il numero (minimo) delle condizioni imposte pure da un gruppo di g_n^r a un gruppo della serie residua $g_{2p-2-n}^{p-n+r-1}$ che debba contenerlo (e di gruppi così fatti ve ne saranno certo) avremo, per una delle relazioni stabilite dal Castelnuovo (1),

$$d \leq 2n - (\mu_1 + \mu_2)$$

(e ciò risulta anzi evidente, quando si pensi al significato della somma $\mu_1 + \mu_2$); e quindi, *a fortiori,*

$$3r + \delta - 1 \leq 2n - (\mu_1 + \mu_2)$$

ossia

$$\mu_1 + \mu_2 \leq 2n - 3r - \delta + 1.$$

E tenendo conto infine della relazione $\mu_1 = n - r$ ossia

$$(\gamma_1) \qquad \mu_1 = n - (r-1) - 1$$

se ne deduce quest'altra:

$$(\gamma_2) \qquad \mu_2 \leq n - 2(r-1) - \delta - 1.$$

Osserviamo poi che sarà precisamente $2n - (\mu_1 + \mu_2)$ la dimensione della serie completa di ordine $2n$ che contiene la g_{2n}^d — se questa già non è completa (2) — e quindi le varie coppie di gruppi di g_n^r (3).

Se si ha poi ancora

$$(\alpha_3) \qquad \mu_1 + 2\mu_2 - (r-1) < p$$

si dimostra facilmente (cfr. Castelnuovo, l. c., n[i] 25 e seg.; Bertini, n[i] 5 e seg.) che anche a un gruppo della serie $g_{2p-2-2n}^{p-(\mu_1+\mu_2)-1}$ residua della $g_{2n}^{2n-(\mu_1+\mu_2)}$ si può imporre di contenere un gruppo arbitrario G_n di g_n^r; e che, indicando con μ_3 il numero minimo di

---

(1) La relazione generale (loc. cit., 28) sarebbe

$$\rho \leq kn - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_k)$$

dove ρ è la dimensione della serie lineare segata su C_p^n dal sistema di tutte le M_{r-1}^k di S_r. Questa formola si applica qui per $k = 2$.

(2) E sarebbe completa appunto nel caso estremo $d = 2n - (\mu_1 + \mu_2)$.

(3) Di queste *serie multiple* di una data serie lineare si è occupato recentemente (e in modo più particolare) lo stesso sig. Castelnuovo, nella Nota: *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica* (" Rend. di Palermo ", t. VII). In questo lavoro si trova anche determinato nuovamente il valore del genere massimo π, per una via sostanzialmente non diversa, ma forse più semplice, di quella tenuta nelle *Ricerche* (2 novembre).

punti di un tal gruppo che devono stare nel primo, perchè questo lo contenga per intiero, si dovrà avere

$$\mu_3 \leq \mu_2 - (r-1)$$

ossia

$$(\gamma_3) \qquad \mu_3 \leq n - 3(r-1) - \delta.$$

Segue pure da ciò che le terne di gruppi G_n sono a lor volta *gruppi speciali*, e appartengono precisamente a una serie speciale *completa* di ordine $3n$ e dimensione $3n - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$.

E se ora estendiamo alle $\mu_4 \ldots\ldots \mu_k \ldots\ldots$ le definizioni date per μ_1, μ_2, μ_3, nell'ipotesi, s'intende, che siano soddisfatte le successive relazioni

$$(\alpha_4) \qquad \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 - (r-1) < p$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\alpha_k) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-2} + 2\mu_{k-1} - (r-1) < p \text{ (1)}$$

troveremo facilmente che anche per queste nuove μ si ha in generale

$$\mu_i \leq \mu_{i-1} - (r-1)$$

e quindi

$$(\gamma_4) \qquad \mu_4 \leq n - 4(r-1) - \delta - 1$$

$$(\gamma_5) \qquad \mu_5 \leq n - 5(r-1) - \delta - 1$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(\gamma_k) \qquad \mu_k \leq n - k(r-1) - \delta - 1$$

dalle quali relazioni si deduce immediatamente

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \leq (k+1)\, n - \binom{k+2}{2}(r-1) - k\delta - (k+1)$$

ovvero anche

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \leq (k+1)\left\{ n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} \right\} - k\delta.$$

Il numero k si supponga ora precisamente tale che, essendo pur verificate le relazioni α_i) per $i \leq k$, non lo sia più la α_{k+1}); ma si abbia invece

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_{k-1} + 2\mu_k - (r-1) \geq p \text{ (2)}.$$

---

(1) Supposto cioè che si verifichi la (α_4), chiameremo μ_4 il numero minimo di punti di G_n che devono trovarsi in un gruppo della serie residua della $g_{3n}^{3n-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)}$ perchè questo gruppo contenga tutto G_n medesimo, ecc. ecc.

(2) È chiaro che un valore così fatto di k dovrà sempre esistere (cfr. anche Castelnuovo, loc. cit.). Potrebbe però essere $k=2$ (non essere cioè già più soddisfatta nemmeno la (α_3)), — e allora dovremmo naturalmente fermarci alla relazione (γ_2) —.

Allora da queste ultime due relazioni seguirà immediatamente

$$(a) \qquad p \leq \{ k+1 \} \left\{ n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} \right\} - k\delta$$

e questa stessa disuguaglianza sarà anche soddisfatta, per $h = 1$, se la g^d_{2n} è *non speciale.* In tal caso si avrebbe infatti, per un noto teorema, $p \leq 2n - d$; e quindi, *a fortiori*, $p \leq 2n - 3r + 1 - \delta$.

Esisterà dunque certo, in ogni caso, un valore di k soddisfacente alla relazione (a). Ma il secondo membro di questa stessa relazione può scriversi anche così:

$$\frac{2}{r-1} \left\{ (k+1)\frac{r-1}{2} \left(n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} - \delta \right) + \frac{r-1}{2}\delta \right\}$$

e diventa perciò massimo quando i due fattori

$$(k+1)\frac{r-1}{2} \quad \text{e} \quad n - \frac{r+1}{2} - (k+1)\frac{r-1}{2} - \delta$$

la cui somma è costante sono uguali fra loro ed eguali quindi entrambi a

$$\frac{1}{2}\left\{ n - \frac{r+1}{2} - \delta \right\} = \frac{1}{2}\left\{ n - r - \delta + \frac{r-1}{2} \right\}.$$

Questo si otterrebbe prendendo $k + 1 = \frac{n-r-\delta}{r-1} + \frac{1}{2}$; ma dovendo nel nostro caso k (e quindi $k+1$) essere un numero intero, basterà che prendiamo per esso l'intero più vicino al valore medesimo $\frac{n-r-\delta}{r-1} + \frac{1}{2}$, ossia *il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-r-\delta}{r-1}$ (1).

Indicando perciò questo stesso intero con χ_δ, è chiaro che si dovrà avere in ogni caso

$$p \leq \chi_\delta \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi_\delta \frac{r-1}{2} \right\} - \{ \chi_\delta - 1 \} \delta$$

e questo è appunto quanto si voleva dimostrare.

Come conseguenza (sebbene quasi evidente) di questo teorema e di quelli ricordati al n° 1, abbiamo:

Una curva di S_r *la quale sia di ordine* $n > 2r$ *e di genere*

$$p > \chi_1 \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi_1 \frac{r-1}{2} \right\} - \chi_1 + 1$$

$\left(\right.$*dove* χ_1 *è il minimo intero non inferiore a* $\left.\frac{n-r-1}{r-1}\right)$ *sta sempre su di una superficie di ordine* $r-1$ *comune a tutte le quadriche che la contengono.*

---

(1) Se $\frac{n-r-\delta}{r-1}$ fosse precisamente un numero intero, l'espressione considerata di sopra assumerebbe lo stesso valore massimo per $k+1$ eguale a questo intero, o anche al successivo (all'intero cioè immediatamente superiore).

§ 2.

Sull'ordine di una curva per la quale deve passare un dato numero di quadriche.

3. Il risultato semplicissimo ottenuto nel § precedente ci permetterebbe di stabilire subito un *minimum* per il numero delle quadriche che passano per una curva di dato ordine e genere e appartenente a un dato spazio (o almeno di stabilire un tal *minimum* in modo nuovo, se la curva è non speciale). Ma per noi ha molto maggior importanza lo studio della questione seguente: *Determinare possibilmente un ordine dal quale in su una curva di* S_r, *supposta normale* (1) *e di genere* $\pi - k$ (*dove* k *ha un valore assegnato ad arbitrio*) (2), *stia necessariamente sopra almeno* $\binom{r-1}{2} - \delta$ *quadriche indipendenti*. Di una tale ricerca ci converrà ora occuparci.

Sarà condizione *sufficiente* per quanto si richiede che si abbia:

$$\pi - k > \chi' \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi' \frac{r-1}{2} \right\} - \left\{ \chi' - 1 \right\} \left\{ \delta + 1 \right\}$$

dove n è l'ordine della curva e χ' indica il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r-\delta-1}{r-1}$ (3).

È chiaro che, quando nessuno dei numeri

$$\frac{n-r-\delta-1}{r-1}, \quad \frac{n-r-\delta}{r-1}, \ldots \frac{n-r-1}{r-1}$$

sia intero, lo stesso χ' è anche il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$, e perciò la relazione scritta testè — sostituendo a π il suo valore — si riduce subito a quest'altra

$$\left\{ \chi' - 1 \right\} \left\{ \delta + 1 \right\} > k$$

ossia $\chi' > \frac{k}{\delta+1} + 1$. Se dunque indichiamo con l il resto della divisione di k per $\delta + 1$, basterà che sia $\chi' \geq \frac{k-l}{\delta+1} + 2$, e per questo è sufficiente (e anche necessario) $\frac{n-r}{r-1} > \frac{k-l}{+1} + 1$, ossia

$$n \geq \left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r - 1 \right\} + 2. \tag{1}$$

---

(1) Questa condizione la troveremo però, nella maggior parte dei casi, già di per sè soddisfatta (cfr. anche la nota seg.).

(2) Il genere di questa curva sarà dato dunque dall' espressione $\chi \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi \frac{r-1}{2} \right\} - k$ dove χ $(= \chi_0)$ indica il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$. Avvertiamo poi che la curva stessa sarebbe *certo* normale quando il suo ordine superasse un certo limite (che dipenderà dal valore di k, e sarebbe anche facile da determinare).

(3) Scriviamo per brevità χ' anzichè $\chi_{\delta+1}$ (cfr. § preced.).

Se dunque nessuno dei numeri $\frac{n-r-\delta-1}{r-1}$, ... $\frac{n-r-1}{r-1}$ è intero, basterà che l'ordine della curva considerata non sia inferiore a

$$\left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r-1 \right\} + 2.$$

4. Supponiamo ora che fra quegli stessi numeri ve ne sia uno ed uno solo intero (non ve ne sarà certo più di uno se $\delta < r-1$); e sia questo $\chi' = \frac{n-r-h-1}{r-1}$, dove $0 \leq h \leq \delta$ (1). Sarà quindi

$$n = (\chi'+1)(r-1) + h + 2;$$

e allora basterà che si abbia

$$\left\{ \chi'+1 \right\} \left\{ n - \frac{r+1}{2} - (\chi'+1)\frac{r-1}{2} \right\} - k > \chi' \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi' \frac{r-1}{2} \right\} - \left\{ \chi'-1 \right\} \left\{ \chi+1 \right\}$$

ossia

$$n - \frac{r+1}{2} - \left\{ 2\chi'+1 \right\} \frac{r-1}{2} - k > - \left\{ \chi'-1 \right\} \left\{ \delta+1 \right\},$$

ovvero ancora

$$n - r - (n-r-h-1) - k > - \left\{ \chi'-1 \right\} \left\{ \delta+1 \right\},$$

che si riduce a

$$\chi' > \frac{k-h-1}{\delta+1} + 1.$$

E questa condizione è certo soddisfatta se il numero χ' si prende uguale o superiore a $\frac{k-l}{\delta+1} + 2$ (2), e lo è anche per $\chi' = \frac{k-l}{\delta+1} + 1$, purchè però sia $h \geq l$. È dunque sempre soddisfatta per

$$(2) \qquad n \geq \left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r-1 \right\} + l + 2$$

nella qual disuguaglianza è contenuta anche la (1).

Concludiamo dunque che: *Una curva normale di ordine* n *e genere* $\pi - k$, *la quale appartenga allo spazio* S_r, *sta sempre sopra* $\binom{r-1}{2} - \delta$ *quadriche indipendenti* ($\delta < r-1$) *quando*

$$n \geq \left\{ \frac{k-l}{\delta+1} + 2 \right\} \left\{ r-1 \right\} + l + 2$$

dove l *è il resto della divisione di* k *per* $\delta + 1$ (3).

---

(1) Qui ancora dunque χ' è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r-\delta-1}{r-1}$.

(2) Con l indichiamo sempre il resto della divisione di k per $\delta+1$.

(3) Si potrebbe determinare un limite analogo per l'ordine n anche nel caso di $\delta \geq r-1$; ma il calcolo (pur non offrendo alcuna difficoltà) riuscirebbe alquanto più complicato, sicchè, per il momento, non ce ne occupiamo.

Come primo caso particolare molto notevole abbiamo:

Una curva $C^n_{\pi-k}$ *di* S_r *sta sempre sopra* $\binom{r-1}{2}$ *quadriche indipendenti — e quindi sopra una rigata razionale normale o una superficie di Veronese comune a queste quadriche — quando*

$$n \geq (k+2)(r-1)+2 \qquad (1)(2)(3).$$

E così pure: *Una* $C^n_{\pi-k}$ *normale di* S_r *sta sempre sopra non meno di* $\binom{r-1}{2}-1$ *quadriche indipendenti quando*

$$n \geq \frac{k+4}{2}(r-1)+2 \quad \text{oppure} \quad n \geq \frac{k+3}{2}(r-1)+3$$

secondo che k *è numero pari o dispari.*

Per $\delta = k-1$, abbiamo: *Nello spazio* S_r *una curva normale di genere* $\pi - k$ $(k < r)$ *e di ordine non inferiore a* $3r-1$ *sta sempre sopra almeno* $\binom{r-1}{2}-k+1$ *quadriche indipendenti.*

Ponendo infine $\delta = k$ si ha: *Per una curva normale* $C^n_{\pi-k}$ *di* S_r (*dove* $k < r-1$) *passano sempre almeno* $\binom{r-1}{2}-k$ *quadriche indipendenti, quando sia* $n \geq 2r+k$. Però un ragionamento quasi ovvio ci convince facilmente che una tal curva *sta sempre sopra non meno di* $\binom{r-1}{2}-k$ *quadriche indipendenti* (qualunque ne sia l'ordine). — L'ordine $2r+k$ è quello dal quale in su la curva $C^n_{\pi-k}$ è necessariamente *speciale.*

§ 3.

Alcune osservazioni sulle curve contenute in una rigata razionale normale.

5. Dalle poche cose esposte finora appare già come, fra tutte le curve di S_r, debbano avere una certa importanza quelle contenute in una rigata razionale normale R^{r-1} (perchè su di una tal superficie (4) stanno appunto le curve di S_r di genere $\pi - k$, da un certo ordine in poi). Mi sembra perciò opportuno di fare qui senz'altro su queste curve alcune osservazioni, per quanto semplici, delle quali avrò a valermi (e spesso) in seguito.

---

(1) La parte relativa alla superficie F^{r-1} cessa però di sussistere, per $k=0$, nel caso estremo $n=2r$.

(2) In questo caso il limite inferiore dato per l'ordine n è tale che la curva $C^n_{\pi-k}$ risulta già di per sè normale.

(3) In particolare una curva $C^n_{\pi-1}$ dello spazio S_3 starà certo sopra una quadrica quando $n \geq 8$ (se di genere $\pi-2$ invece, quando $n > 10$; ecc.). Questi risultati rientrano in quelli ottenuti dal sig. Alphen e già accennati da lui nei Compt. Rend.

(4) Colla sola eccezione, per $r=5$, della superficie di Veronese.

Sulla rigata razionale normale di S_r si abbia una curva di ordine n e genere $p = \pi - k$, la quale incontri ogni generatrice in m punti e sia priva di punti doppi (1). Allora, oltre alla relazione

$$p = \pi - k = \chi \left\{ n - \frac{r+1}{2} - \chi \frac{r-1}{2} \right\} - k$$

dove χ è il minimo intero non inferiore a $\frac{n-r}{r-1}$, avremo anche quest'altra:

$$p = (m-1)\left(n - \frac{r+1}{2} - (m-1)\frac{r-1}{2}\right) \text{ (2).}$$

Uguagliando fra loro queste due espressioni del genere p della nostra curva, si deduce facilmente

$$\text{(1)} \qquad \{\chi - m + 1\} \left\{ n - 1 - \{\chi + m\} \frac{r-1}{2} \right\} = k.$$

Questa relazione può sussistere qualunque sia n, se k è nullo, purchè si abbia $\chi = m - 1$ (ossia $m = \chi + 1$) (3). In casi particolari potrebbe annullarsi anche il secondo fattore, ma si vede subito che, fra le soluzioni che se ne ricaverebbero, la sola di cui si debba tener conto è quella che si avrebbe per $m = \chi + 2$ (e questo anche va d'accordo con quanto si è detto nella nota (4) a pag. 5). Ma se invece k è diverso da zero, l'ordine n della nostra curva dovrà soddisfare a certe condizioni che ora determineremo; e così pure, volendo che esista sulla rigata R^{r-1} una curva C_p^n priva di punti doppi, non potremo più dare ad arbitrio il numero k per cui $p + k = \pi$. Pongasi infatti

$$n = \chi \{r - 1\} + l + 1$$

(essendo perciò $0 < l \leq r - 1$). Allora la relazione (1) potrà anche scriversi:

$$k = \frac{\{\chi - m + 1\}\{\chi - m\}}{2}(r-1) + \{\chi - m + 1\} l$$

e ponendo ancora per brevità $\chi - m + 1 = h$, vediamo che il numero k dovrà sempre essere del tipo

$$\text{(2)} \qquad k = \frac{h(h-1)}{2}(r-1) + hl$$

---

(1) Sulla rigata razionale normale un punto che sia doppio per una curva tracciata su di essa conta sempre come due fra le intersezioni della stessa curva colla generatrice che lo contiene (e influisce quindi *direttamente* sul genere della curva). Ciò perchè la rigata razionale normale non può avere essa punti doppi (cfr. anche C. Segre: *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques;* II^e partie; " Math. Annalen ", XXXIV).

(2) Che si ottiene applicando una formola del sig. Segre già ricordata in una nota preced. (n° 1).

(3) E così appunto si ottengono, sulla rigata R^{r-1}, le curve di genere π appartenenti a S_r.

dove h è intero (e non nullo, se vogliamo sia $k > 0$). Dalla stessa relazione $n = \chi \{ r - 1 \} + l + 1$ si ricava poi

$$(3) \qquad n \equiv l + 1 \qquad (\text{mod. } r - 1).$$

Perchè possa dunque esistere sulla rigata R^{r-1} *di* S_r *una curva* $C^n_{\pi-k}$ $(k > 0)$ *priva di punti doppi è necessario che il numero* k *e l'ordine* n *siano nello stesso tempo l'uno del tipo* (2) *e l'altro del tipo* (3) (1). Questo stesso risultato può ritenersi valido anche nel caso di $k = 0$, perchè allora la relazione (2) è sempre soddisfatta per $h = 0$, e lascia anzi del tutto indeterminato il numero l, sicchè la (3) non impone più all'ordine n alcuna restrizione.

6. Ma se la relazione (2), per un dato valore k, è soddisfatta da una certa coppia di valori particolari di h e di l (2), essa rimarrà del pari soddisfatta quando le stesse h e l si mutino rispett. in $h' = -h$ e $l' = r - 1 - l$ (3); perciò, per un dato valore

$$k = \frac{h(h-1)}{2}(r-1) + hl$$

non saranno *possibili* (4) soltanto gli ordini n dati dalla (3), ma anche quelli per cui

$$(3') \qquad n \equiv -l + 1 \qquad (\text{mod. } r - 1).$$

Nelle relazioni (3) e (3') sono però compresi tutti i casi possibili.

Le curve $C^n_{\pi-k}$ delle quali è così prevista come possibile l'esistenza esistono anche effettivamente, almeno a partire da un certo ordine, da un certo multiplo cioè di $r - 1$ aumentato di $l + 1$ o diminuito di $l - 1$ (ordine e multiplo che dipenderanno naturalmente dal numero k). Le curve il cui ordine è del tipo (3') si possono tutte ottenere segando la rigata con una varietà M^x_{r-1} che non la contenga e non le sia tangente in alcun punto, ma passi per $h(r-1) + l - 1$ sue generatrici (5). L'ordine x della varietà sarebbe il numero dei punti in cui si vuole che la curva seghi ogni generatrice (6). — Invece le curve il cui ordine è del tipo (3) non si possono più segare con varietà di ordine eguale al numero dei punti in cui esse tagliano ogni generatrice, ma solo con varietà di un ordine alquanto più ele-

---

(1) Ed è chiaro che, dati ad arbitrio k e n (ed r), non esisteranno in generale due numeri interi h e l per cui queste condizioni siano soddisfatte. Dato n è determinato l, e dato k è determinato h (colla condizione $0 < l \leq r - 1$); ma nell'uno e nell'altro caso il valore di h o rispett. l che ci è dato poi dalla (2) non sarà in generale intero.

(2) Valori che, ove esistano, saranno sempre determinati e in modo unico, quando sia $k > 0$ e si voglia altresì $h > 0$; $0 < l \leq r - 1$.

(3) Nel caso limite $l = r - 1$ si potrebbe anche mutare h in $-(h+1)$ e ritenere $l' = r - 1$; allora anche per l' si avrebbero i limiti $0 < l' \leq r - 1$.

(4) *Possibili*, in quanto cioè possano esistere sulla rigata R^{r-1} curve di ordine n e genere $\pi - k$ prive di punti doppi.

(5) Essendo h e l definiti dal valore dato di k (cfr. anche la nota (2) qui sopra).

(6) Si può dimostrare anzi, più generalmente, che *ogni curva priva di punti doppi e tracciata su di una rigata razionale normale* R^{r-1} *in modo da incontrarne ogni generatrice in* x *punti può ottenersi come intersezione della stessa rigata con una varietà* M^x_{r-1} *quando il suo ordine non sia supe-*

vato (1); e l'intersezione residua deve essere precisamente una curva di ordine $h(r-1)-l-1$ incontrata da ogni generatrice in $2h-1$ punti, quando sia $l<r-2$; e una curva di ordine $(h+1)(r-1)$, o rispett. $(h+1)(r-1)-1$, incontrante ogni generatrice in $2h+1$ punti quando sia invece $l=r-2$ o $r-1$. Curve così fatte esistono sempre sulle rigate (o almeno su quelle di uno o più *gruppi*) (2); potranno però essere riduttibili, e anzi nella maggior parte dei casi dovranno essere tali.

In particolare, *noi potremo segare sulla rigata* R^{r-1} *delle curve di genere* $\pi-k$, *dove* $0\leq k<r-2$, *mediante varietà* M^x_{r-1} *condotte per* $r-2+k$ *generatrici di detta rigata, o per una direttrice di questa di ordine* $r-2-k$.

Se la varietà M^x_{r-1} si conduce invece per $2r-4$, $2r-3$, $2r-2$, $2r-1$, ecc. generatrici, la curva d'intersezione residua sarà del genere massimo (π) diminuito rispett. di $r-2$, $r-1$, $r+1$, $r+3$, ecc. unità.

Si vede facilmente che le due serie di ordini n date dalle relazioni (3) e (3′) non possono coincidere, se $r>3$, che per $l=r-1$; quando cioè k è del tipo $\frac{h(h+1)}{2}(r-1)$ (3). Invece per $r=3$ questa coincidenza ha luogo sempre (tanto se $l=1$, quanto se $l=2$). E nello spazio ordinario si trova precisamente che: *Il genere di una curva priva di punti doppi e giacente su di una quadrica è superato dal genere massimo corrispondente all'ordine di essa di un numero che è sempre quadrato perfetto o prodotto di due numeri naturali consecutivi, secondo che l'ordine anzidetto è pari o dispari* (4).

Osserviamo infine che le cose dette in questo § per curve prive di punti doppi valgono anche per curve di genere $\pi-k$ e con un certo numero k' di punti doppi, purchè al valore k dianzi considerato si sostituisca la differenza $k-k'$. Ciò segue immediatamente dalla formola cit. del sig. SEGRE (Rend. Lincei, 1887), dalla quale si deduce anche subito che la differenza $k-k'$ non può mai essere negativa (5).

---

riore a $x(r-1)$. — Il genere di una tal curva (supposta di ordine n) sarebbe infatti $=(x-1)n-\binom{x}{2}r+\binom{x-1}{2}$. Di più, se $n\leq x(r-1)$, la g_{xn} segata su di essa dal sistema di tutte le M^x_{r-1} di S_r è certo non speciale; la dimensione di questa serie sarà perciò $\leq n+\binom{x}{2}r-\binom{x-1}{2}$, e per la curva stessa dovranno passare almeno $\binom{r+x}{x}-n-\binom{x}{2}r+\binom{x-1}{2}-1$ varietà M^x_{r-1} indipendenti. Ma per la rigata non ne passano che $\binom{r+x}{x}-\binom{x+1}{2}r+\binom{x}{2}-1$ (cfr. anche l'ultima nota al n° 1); vi sarà quindi, nelle nostre ipotesi, un sistema lineare almeno $\infty^{x(r-1)-n}$ di varietà M^x_{r-1} passanti per la curva C^n e non per la rigata, — il che basta a provare il nostro asserto. Questa proposizione fu già dimostrata nel caso di $x=2$ (e in questo stesso modo) dal sig. SEGRE (*Recherches générales etc.*, I, 20; " Math. Ann. ,, XXX).

(1) E un ordine certo abbastanza elevato possiamo determinarlo facilmente in ogni caso, osservando che una curva priva di punti doppi e tracciata su di una rigata razionale normale in modo da incontrarne ogni generatrice in x punti può sempre ottenersi come intersezione della stessa rigata con una varietà $M^{x+x'}_{r-1}$, purchè il suo ordine sia inferiore a $\left\{x+\frac{x'}{2}\right\}\left\{r-1\right\}+1$. La dimostrazione si conduce in modo affatto analogo a quella della nota precedente.

(2) Per la distinzione delle rigate razionali in *gruppi*, v. C. SEGRE: *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque* (" Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ,, vol. XIX). — E si noti che questa diversità fra i varî gruppi si presenta già, come vedremo subito, per i valori più piccoli di k.

(3) Allora infatti la (3) e la (3′) si riducono entrambe a $n\equiv 1\ldots(\text{mod. } r-1)$.

(4) Questa proposizione si trova sostanzialmente già in HALPHEN (" Compt. Rend. ,, t. 70).

(5) Il sig. CASTELNUOVO nella Nota cit. dei Rend. di Palermo (n° 10) ha dimostrato anzi che questa stessa differenza $k-k'$ è sempre ≥ 0 per qualsiasi curva (irriduttibile) C^n di S_r (in altri termini, che il numero k' dei punti doppi di una C^n_p deve essere $\leq\pi-p$).

§ 4.

Varietà basi di un sistema lineare $\infty^{\binom{r-1}{2}-i}$ di quadriche. Dimostrazione di un teorema relativo a questi sistemi.

7. Fatte queste poche osservazioni sulle curve contenute in una rigata razionale normale R^{r-1} di S_r, e quindi in $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti (e non in un numero maggiore, se l'ordine loro supera $2r-2$), torniamo allo studio delle curve C_p^n di S_r contenute in sistemi di quadriche di dimensione soltanto $\binom{r-1}{2}-i$; $(i>1)$.

E proponiamoci anzitutto la questione analoga a quella di cui si occupa il sig. Castelnuovo al n° 30 delle sue *Ricerche:* la determinazione cioè delle possibili varietà basi di questi sistemi. Si vede facilmente che nello spazio S_r un sistema lineare di quadriche di dimensione $\binom{r-1}{2}-i$ non può avere (almeno per $i \leq r-2$) una varietà base appartenente a S_r stesso e di dimensione superiore a *due.* Supponiamo infatti che un tal sistema di quadriche abbia una M_3^x base (irriduttibile) appartenente a S_r. Segandolo con un S_{r-3} non contenuto in alcuna sua quadrica, — il che (come osserva anche il sig. Castelnuovo per il caso di $i=1$) è sempre possibile —, avremo in questo spazio un sistema lineare di quadriche (M_{r-4}^2) pure di dimensione $\binom{r-1}{2}-i$, e con x punti basi — in generale — dei quali possiamo anche supporre che mai $k+1$ $(k \leq r-3)$ stiano in uno stesso S_{k-1}. Se fosse dunque $x>i-1$, bisognerebbe che le M_{r-4}^2 passanti per $i-1$ (e forse anche meno) di quegli x punti passassero di conseguenza anche pei rimanenti, e ciò per $i \leq r-2$ ossia $i-1 \leq r-3$ (come qui supponiamo) non è certo possibile. Dovrà dunque essere $x \leq i-1$ e quindi, a fortiori, $\leq r-3$, mentre invece è noto che una M_3 appartenente a S_r deve essere di ordine almeno uguale a $r-2$. Concludiamo perciò:

Se un sistema lineare di quadriche di S_r *di dimensione* $\binom{r-1}{2}-i$ *ha infiniti punti basi, questi, finchè* $i \leq r-2$, *non possono costituire, di varietà appartenenti a* S_r, *che curve o superficie. Se vi è una varietà base di dimensione superiore a due, questa deve essere contenuta in uno spazio inferiore a* S_r (1).

8. Ciò posto, seghiamo la curva C_r^n (che supponiamo irriduttibile) con un iperpiano (S_{r-1}) tale che delle sue n intersezioni con essa r qualunque siano linearmente indipendenti. Il sistema di quadriche proposto verrà segato dallo stesso S_{r-1} in un nuovo sistema, pure di dimensione $\binom{r-1}{2}-i$, e con quelle n intersezioni per punti basi; e poichè le quadriche tutte di S_{r-1} formano un sistema di dimensione $\binom{r+1}{2}-1$, è chiaro che in questo nuovo sistema ogni quadrica passante per

$$\left\{\binom{r+1}{2}-1\right\}-\left\{\binom{r-1}{2}-i\right\}=2(r-1)+i$$

(1) Si può dimostrare anzi più generalmente (e in modo affatto analogo) che *un sistema lineare di quadriche (di S_r) di dimensione uguale o superiore a* $\binom{r-k+1}{2}$ *non può avere una varietà base di dimensione (uguale o superiore a)* k *e appartenente pure a* S_r.

di quegli stessi n punti dovrà (se $n > 2(r-1)+i$) contenere di conseguenza i rimanenti (1).

Si può prevedere fin d'ora che, se n supererà un certo limite, quelle quadriche di S_{r-1} dovranno avere, non solo questi n, ma infiniti punti (ossia tutta una curva) a comune (2); ciò perchè un sistema lineare di quadriche di data dimensione e con un numero finito di punti basi ammette necessariamente, per questo stesso numero, un *massimo* (3). Si tratterebbe ora di trovare appunto questo massimo per il nostro sistema, di dimensione $\binom{r-1}{2} - i$, in S_{r-1} (essendo pur sempre $i \leq r-2$).

La questione è piuttosto complicata, ma possiamo dare tuttavia un teorema che ci sembra notevole e dal quale potremo poi ricavare nei §§ seg. (almeno per i casi di $i = 2$ e $i = 3$) risultati della natura di quelli che testè andavamo cercando, e che si collegheranno anche con quelli già ottenuti nei §§ precedenti. Ragioneremo, per comodità, nello spazio S_r, e supporremo perciò il sistema di quadriche assoggettato a $2r+i$ (anzichè a $2(r-1)+i$) condizioni.

9. Il teorema del quale intendiamo parlare è il seguente:

Se nello spazio S_r *si ha un gruppo di* $2(r+i)+1$ *punti indipendenti* (4) *e tali che le quadriche passanti per* $2r+i$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza per i rimanenti* $i+1$, *questi punti staranno tutti sopra una varietà* $M_i^{r-i+1} \equiv \infty^1$ *razionale normale di* S_{i-1}, *che sarà anche segata in una* M_{i-1}^{r-i} *dall'* S_{r-2} *di* $r-1$ *qualunque fra quei punti* (5).

Consideriamo infatti l'S_{r-2} di $r-1$ qualunque fra i punti proposti ($A_1, A_2, \dots, A_{r-1}$), e chiamiamolo α. Costruiamo poi le curve razionali normali di ordine r che hanno α per spazio $(r-1)$-secante e passano per altri $r+1$ fra i punti dati ($B_1, B_2, \dots, B_{r+1}$) e rispett. per altri i ancora fra quegli stessi punti ($C_1, C_2, \dots, C_i$). Congiungendo i vari gruppi di punti di queste curve che stanno in un iperpiano variabile attorno

(1) Si può dire anzi che, se l'S_{r-1} di cui sopra è stato scelto in modo generale, ogni quadrica passante per $2(r-1)+i$ *qualunque* fra questi n punti dovrà passare di conseguenza anche pei rimanenti; impongano pure o non impongano quei primi $2(r-1)+i$ condizioni tutte distinte.

(2) E quindi le quadriche di S_r passanti per la curva C_p^n dovranno avere a comune tutta una superficie.

(3) La questione, trasportata sulla varietà $M_{r-1}^{(2^{r-1})}$ di $S_{\frac{(r-1)(r+2)}{2}}$ che rappresenta il sistema di tutte le quadriche di S_{r-1}, si tradurrebbe così: *Se la varietà* M *ha comune con uno spazio* S_k *un numero finito di punti, questo numero non potrà superare un certo limite;* e questo può ritenersi evidente. E alla stessa questione può anche darsi la forma seguente, pure notevole: *Sulla curva di ordine* 2^{r-2} *(e di genere* $(r-4)\,2^{r-3}+1$*) intersezione generale di* $r-2$ *quadriche in* S_{r-1} *l'ordine di una serie lineare di gruppi di punti di data dimensione non può scendere al di sotto di un certo limite* (che dipenderà naturalmente da questa dimensione).

(4) Anche per i punti, come già per le quadriche, ci permettiamo di dire semplicemente *indipendenti*, sottintendendo per brevità il *linearmente.* Avvertiamo poi che, per i punti, questa *indipendenza* dovrà sempre intendersi come *relativa* (per così dire) *allo spazio in cui si sa che i punti stessi sono contenuti.* Se siamo quindi in S_k, intenderemo (soltanto) che mai $k+1$ fra quei punti stiano in uno stesso S_{k-1}.

(5) Variando questi ultimi punti, potrà variare però la M_i^{r-i+1}; e questo apparirà anche dalla dimostrazione che ora daremo.

ad α mediante altrettanti S_{i-1}, otterremo una serie semplice razionale di spazi, il cui insieme costituirà una M_i^{r-i+1} normale (1). Lo spazio α incontrerà quei vari S_{i-1} secondo altrettanti S_{i-2}, quindi la varietà M_i secondo una M_{i-1} che risulterà di ordine $r-i$, e potrà anche scindersi in una M_{i-1}^{r-i-h} irriduttibile e in h spazi S_{i-1} (contenenti rispett. altrettanti S_{i-2} di questa M_{i-1}).

Ora, la varietà M_i^{r-i+1} è contenuta in $\binom{r-i+1}{2}$ quadriche indipendenti di S_r (2), e di queste si vede facilmente che, se $i \leq r-1$ (3), ve ne sono certo almeno ∞^{r-i-1} che contengono lo spazio α. Nel caso estremo $i = r-1$ la varietà M_i^{r-i+1} è essa stessa una quadrica passante per questo spazio; se invece $i \leq r-2$ (e così noi supporremo sempre in seguito), vi saranno certo infinite quadriche passanti per la varietà M_i^{r-i+1} e per lo spazio α, e queste non passeranno di conseguenza per nessun altro punto (e saranno *precisamente* ∞^{r-i-1}) (4). Ma queste quadriche passano già tutte per i $2r+i$ punti $A_1 \dots A_{r-1}$, $B_1 \dots B_{r+1}$, $C_1 \dots C_i$; dovranno dunque passare anche per gli altri $i+1$ punti proposti ($D_1, D_2, \dots, D_{i+1}$); e questi ultimi, non potendo alcuno di essi stare nello spazio α, saranno tutti contenuti nella varietà M_i^{r-i+1}. Faremo vedere ora che questa stessa varietà (ossia la M_{i-1}^{r-i} sua intersezione collo spazio α) deve contenere anche gli $r-1$ punti A.

Lo spazio α, come abbiamo già detto, sega infatti la varietà M_i^{r-i+1} in una M_{i-1}^{r-i} che può anche spezzarsi in una M_{i-1}^{r-i-h} irriduttibile e in h spazi S_{i-1}. È chiaro che fra gli S_{r-3} determinati dai punti A a $r-2$ per volta ve ne sarà certo (almeno) uno non contenente (per stare nel caso più generale) la M_{i-1}^{r-i-h} ($h \geq 0$); questo stesso spazio (che chiameremo α_1) potrà contenere tuttavia un certo numero h' degli h spazi S_{i-1}, e segherà allora i rimanenti $h-h'$ in altrettanti S_{i-2}, e la varietà M_{i-1}^{r-i-h} in una $M_{i-2}^{r-i-h-h'}$ dalla quale potrà ancora staccarsi qualche altro S_{i-2}; l'ordine complessivo però di questa M_{i-2}, compresivi tutti gli S_{i-2} (anche quei primi $h-h'$), sarà $r-i-2h'$. — Fra gli $r-2$ punti A con cui si è determinato lo spazio α_1 scegliamone ora $r-3$ il cui S_{r-4} (α_2) non contenga la M_{i-2} *irriduttibile* testè ottenuta; questo spazio α_2 potrà contenere della sezione precedente un certo numero h'' di S_{i-1} e un certo numero l' di S_{i-2} (oltre agli $h'-h''$ in cui sega i

---

(1) L'ordine di questa varietà si può stabilirlo con successive induzioni, partendo dai valori più semplici di i. Che se poi il gruppo delle i intersezioni variabili di cui sopra fosse sempre contenuto in un S_{i-2}, si giungerebbe a una varietà M_{i-1}^{r-i+2} per la quale potrebbero farsi passare infinite M_i^{r-i+1}, segate anche da α altrettanti una M_{i-1}.

(2) Ciò essendo vero per i valori più semplici di i ($i = 0, 1, 2$) ne segue facilmente che per la M_i^{r-i+1} non possono certo passare più di $\binom{r-i+1}{2}$ quadriche indipendenti. Osservato poi che, perchè una quadrica contenga la M_i^{r-i+1}, è certo *sufficiente* che ne contenga due *sezioni piane* e un punto fuori di queste, si può tosto concludere (ammessa sempre la proposizione per i valori più piccoli di i) che il numero di quelle quadriche non può nemmeno essere inferiore a $\binom{r-i+1}{2}$. La proposizione sussiste tanto se la M_i è irriduttibile, quanto se da essa si stacca un numero qualunque di S_i (passanti per altrettanti S_{i-1} della M_i residua irriduttibile).

(3) Restrizione che corrisponde alla $i \leq r-2$ del n° 7, perchè qui siamo passati da S_{r-1} a S_r.

(4) Se queste quadriche passassero infatti tutte per un altro punto qualsiasi di S_r, segando coll'S_{r-1} di questo punto e di α, si avrebbero nello stesso iperpiano almeno ∞^{r-i-1} quadriche contenenti un dato S_{r-2}, un dato S_{i-1} (intersezione residua dell'S_{r-1} colla varietà M_i) e un dato punto fuori di questi due spazi, il che è assurdo. Lo stesso ragionamento, astraendo da quest'ultimo punto, prova altresì che quelle quadriche sono precisamente ∞^{r-i-1} (e non di più).

rimanenti S_{i-1}), e l' incontrerà poi ancora in una $M_{i-3}^{r-i-2h'-h''-2l'}$ dalla quale potrà staccarsi un certo numero di S_{i-3}. Così continuando, giungeremo a un S_{r-i-1} (β) passante per $r - i$ punti A e incontrante la varietà M_i^{r-i+1} secondo un certo numero n_{i-1} di spazi S_{i-1}, un certo numero n_{i-2} di spazi S_{i-2}, ... un certo numero n_0 di punti.

Per la sezione determinata dallo spazio α_1 (h' spazi S_{i-1} e una $M_{i-2}^{r-i-2h'}$) si ha la relazione:

$$2 \, . \, h' + 1 \, . \, (r - i - 2h') = r - i.$$

Per quella successiva (h'' spazi S_{i-1}, $h' - h'' + l$ spazi S_{i-2} e una $M_{i-3}^{r-i-2h'-h''-2l'}$) si ha del pari

$$3 \, . \, h'' + 2 \, . \, (h' - h'' + l') + 1 \, . \, (r - i - 2h' - h'' - 2l') = r - i$$

e così via. Per l'ultima si avrebbe (e lo si potrebbe provare facilmente col solito metodo dell'induzione da un caso qualunque al successivo)

$$i \, . \, n_{i-1} + (i - 1) \, . \, n_{i-2} + \ldots.. + 2 \, . \, n_1 + 1 \, . \, n_0 = r - i \text{ (1)}.$$

Quest'ultima sezione potrebbe essere costituita in particolare da un gruppo di $r - i$ punti; ma le nostre considerazioni più generali sono egualmente necessarie, non potendosi asserire *a priori* che fra gli S_{r-i-1} determinati da $r - i$ fra i punti A ve ne debba sempre essere uno che incontri M in soli $r - i$ (e non in infiniti) punti.

D'altra parte, dal fatto che per la varietà M_i^{r-i+1} e per lo spazio α passano precisamente ∞^{r-i-1} quadriche segue tosto che si può scegliere (e in infiniti modi) un sistema lineare di dimensione $\binom{r-i}{2} - 1$ costituito da quadriche passanti tutte per la varietà M_i^{r-i+1} e non per α; e perciò *ogni* quadrica di quest'ultimo spazio passante per la M_{i-1}^{r-i} di cui sopra potrà ottenersi come sezione di una quadrica di S_r passante per la M_i stessa (e non per α). — Analogamente, fra le $\infty^{\binom{r-i}{2}-1}$ quadriche di α che passano per la sezione M_{i-1}^{r-i} ve ne sono $\infty^{h'-1}$ che contengono lo spazio α_1 (2); si potrà quindi dal loro sistema stralciarne uno, pure lineare, di dimensione $\binom{r-i}{2} - h' - 1$, nel quale nessuna quadrica contenga quest' ultimo spazio. E questo stesso (ossia $\infty^{\binom{r-i}{2}-h'-1}$) è anche il numero delle quadriche dello spazio α_1 che passano per la sezione determinata da esso nella varietà M_{i-1}^{r-i} (o nella M_i^{r-i+1}) (3); ciascuna di queste

(1) In termini meno esatti ma forse più espressivi si potrebbe dire (ed è, d' altronde, anche quasi evidente) che una retta contenuta in un S_{i-1} della M_i conta in questa sezione come *due* punti, un piano come *tre*, ecc.

(2) E sono quelle che si spezzano in α_1 stesso e in un S_{r-3} variabile attorno all'$S_{(r-i-h')+(i-1)-1} \equiv S_{r-h'-2}$ della $M_{i-1}^{r-i-h'}$ costituita dalla stessa M_{i-1}^{r-i} meno gli h' spazi S_{i-1} che sono già contenuti in α_1.

(3) Infatti le quadriche indipendenti che contengono la $M_{i-2}^{r-i-2h'}$ sono, nello spazio $S_{r-2h'-3}$ cui questa appartiene, $\binom{r-i-2h'}{2}$; e nello spazio $S_{r-3} \equiv \alpha_1$

$$\binom{r-i-2h'}{2} + (r - 2h' - 1) + (r - 2h') + \ldots.. + (r - 2) = \binom{r-i}{2} + 2h' \, (i - 1).$$

Queste ultime devono ancora assoggettarsi a contenere h' spazi S_{i-1}, di ciascuno dei quali conten-

ultime sarà dunque sezione di una delle prime, ossia di una quadrica di S_r passante per M_i^{r-i+1} e non per α_1. Fra quelle stesse quadriche dello spazio α_1 possiamo ora trovarne un sistema lineare di dimensione $\binom{r-i}{2} - h' - 2h'' - l' - 1$, nel quale nessuna varietà contenga lo spazio α_2 (1); e questo numero è anche quello delle quadriche di α_2 stesso che passano per la sezione determinata nella varietà M_i da quest'ultimo spazio (2). Così continuando, si conclude facilmente che le quadriche dello spazio β passanti per la sezione determinata da questo stesso spazio in M_i sono precisamente tante quante quelle di S_r che passano per M_i^{r-i+1} e non per β (3); e perciò una qualunque delle prime può sempre ottenersi come sezione di una di queste ultime. In particolare, se fra quelle prime quadriche ne consideriamo una passante per un certo numero, ad es. per $r-i-2$ fra gli $r-i$ punti A che stanno in β — supposta la cosa possibile —, la quadrica di S_r (passante per M_i) di cui quest'ultima quadrica può considerarsi come sezione dovrà pure contenere quegli stessi punti. Ma questa quadrica di S_r passerà allora per la varietà M_i^{r-i+1}, quindi per tutti i punti $B_1 \ldots\ldots C_1 \ldots\ldots D_1 \ldots\ldots$ (in numero di $r+2i+2$), e conterrà perciò complessivamente già $2r+i$ fra i punti proposti; essa dovrà dunque contenere anche i rimanenti $i+1$, e in particolare quegli altri due punti A che stanno in β. Questi ultimi staranno perciò anche sulla quadrica di β prima considerata, ossia:

" Le quadriche dello spazio β passanti per la sezione che questo spazio determina nella varietà M_i e per $r-i-2$ qualunque fra i punti A in esso spazio contenuti passano anche tutte per gli altri due fra questi stessi punti ".

---

gono già un S_{i-3} fisso, e ciò equivale a nuove $h'(2i-1)$ condizioni, che è facile anche riconoscere come tutte distinte. E si ha precisamente:

$$\binom{r-i}{2} + 2h'(i-1 - h'(2i-1) = \binom{r-i}{2} - h'.$$

(1) E ciò perchè quest'ultimo spazio è a sua volta contenuto in un sistema lineare di quelle stesse quadriche di dimensione $2h''+l'-1$. Questo numero deve essere infatti quello degli S_{r-4} di α_1 che passano per la sezione determinata da α_1 stesso in M, astrazion fatta dagli h'' spazi S_{i-1} e dagli l' spazi S_{i-2} già contenuti in α_2. Ora la M_{i-2} di α_1 (compresivi tutti gli S_{i-2}) è di ordine $r-i-2h'$; senza quegli l' spazi resterà dunque di ordine $r-i-2h'-l'$, e apparterrà perciò a un $[r-2h'-l'-3]$. E quest'ultimo spazio, insieme ai rimanenti $h'-h''$ spazi S_{i-1}, determina un $[r-2h''-l'-3]$ pel quale in α_1 passano appunto $\infty^{2h''+l'-1}$ S_{r-4}.

(2) Per la sola M_{i-3} di α_2 (che, compresivi tutti gli S_{i-3}, è di ordine $r-i-2h'-h''-2l'$) passano, nello spazio cui essa appartiene, $\binom{r-i-2h'-h''-2l'}{2}$ quadriche indipendenti; nello spazio α_2 ne passano invece $\binom{r-i}{2} + (2h'+h''+2l')(i-2)$. Queste ultime devono ancora obbligarsi a passare per $h'-h''+l'$ spazi S_{i-2} e per h'' spazi S_{i-1} (già segati in altrettanti S_{i-4} fissi); il che equivale complessivamente a $(h'-h''+l')(2i-3)+h''(3i-3)$ condizioni (e ancora tutte distinte). E il numero

$$\binom{r-i}{2} + (2h'+h''+2l')(i-2) - (h'-h''+l')(2i-3) - h''(3i-3)$$

si riduce precisamente a

$$\binom{r-i}{2} - h' - 2h'' - l'.$$

(3) Questa proposizione sarebbe evidente o quasi quando lo spazio β segasse M_i^{r-i+1} in soli $r-i$ punti; allora non vi sarebbe anzi in α nessuna quadrica passante per la M_{i-1}^{r-i} e per β. Ma, come già si è detto, non possiamo asserire di poterci sempre ridurre a questo caso.

Da ciò noi dedurremo subito che gli $r - i$ punti A dello spazio β devono stare tutti sulla sezione che questo spazio determina in M_i (e quindi su M_i stessa).

Abbiamo già veduto infatti come tale sezione sia costituita. Consideriamo pertanto uno qualunque S_μ degli spazi in essa contenuti ($o \leq \mu \leq i - 1$) (1), e poniamo per brevità $r - i - 1 = \rho$. Fra gli $r - i = \rho + 1$ punti A dello spazio $S_\rho \equiv \beta$ possiamo sempre trovarne uno non contenuto in S_μ (2); poi un altro non contenuto nell' $S_{\mu+1}$ di S_μ e di questo primo punto, un terzo non contenuto nell' $S_{\mu+2}$ di questo $S_{\mu+1}$ e del secondo punto, ecc. Possiamo infine, fra gli stessi $\rho + 1$, trovarne $\rho - \mu$ i quali insieme allo spazio S_μ costituiscano un gruppo appartenente a S_ρ. Chiameremo questi punti $A^{(1)}_1, A^{(1)}_2, \ldots, A^{(1)}_{\rho-\mu}$; i rimanenti, $A^{(2)}_0, A^{(2)}_1, \ldots, A^{(2)}_\mu$.

Dalla relazione $i \cdot n_{i-1} + \ldots + n_0 = r - i = \rho + 1$ segue altresì che, tolto lo spazio S_μ, i rimanenti che con esso concorrono a formare la sezione di β colla varietà M_i staranno certo in un $S_{\rho-\mu-1}$. Considero ora lo spazio $S_{\rho-1} \equiv \gamma$ determinato da questo $S_{\rho-\mu-1}$ e da μ qualunque fra i punti $A^{(2)}$ (escludendone perciò uno qualsiasi $A^{(2)}_s$) (3), e poi un altro $S_{\rho-1}$, che chiamo δ, determinato dall' S_μ di cui sopra e da $\rho - \mu - 1$ qualunque fra i punti $A^{(1)}$ (tutti ad es. meno $A^{(1)}_t$). Questa coppia di $S_{\rho-1}$ è una quadrica di S_ρ contenente già l'intera sezione $\beta . M_i$ e $\rho - 1$ fra i punti A (tutti meno $A^{(1)}_t$ e $A^{(2)}_s$); la stessa quadrica dovrà dunque passare anche per questi ultimi due punti. Ma $A^{(1)}_t$ non può stare in δ (perchè l'insieme di S_μ e dei punti $A^{(1)}$ appartiene a S_ρ); starà dunque in γ, e ciò qualunque sia l'indice t scelto fra i numeri $1, 2, \ldots, \rho - \mu$; in altri termini, lo spazio γ dovrà contenere tutti quanti i punti $A^{(1)}$; e contenendo perciò complessivamente già ρ punti A, non potrà più contenere $A^{(2)}_s$. Quest'ultimo punto starà dunque in δ, e ciò ancora qualunque sia fra gli indici $0 . 1 . 2 \ldots \mu$ quello designato con s; in altri termini, tutti i $\mu + 1$ punti $A^{(2)}$ dovranno stare nello spazio δ — e anzi in ciascuno dei $\rho - \mu$ spazi $S_{\rho-1}$ che congiungono l' S_μ considerato da principio a $\rho - \mu - 1$ qualunque dei punti $A^{(1)}$—; essi staranno perciò anche nell' S_μ stesso che è precisamente l'intersezione di tutti questi spazi.

Segue da ciò che uno spazio qualunque S_μ appartenente alla sezione $\beta . M_i$ deve contenere $\mu + 1$ fra i punti A dello spazio β; e questi punti varieranno anche tutti da uno di quegli spazi all'altro, perchè due qualunque di questi ultimi non si incontrano (4). Avendosi poi la relazione $\Sigma (\mu + 1) n_\mu = \rho + 1$, è chiaro che i $\rho + 1$ punti A verranno tutti assorbiti dai vari spazi S_μ e staranno perciò tutti sulla sezione $\beta . M_i$.

---

(1) Se detta sezione si componesse di (soli) $r - i$ punti, non potrebbe essere, naturalmente, che $\mu = 0$. Il nostro ragionamento vale però (come si vedrà subito) anche per questo caso.

(2) Farebbe eccezione il solo caso in cui fosse $\mu = \rho$; ma allora lo spazio $S_\rho \equiv \beta$ sarebbe tutto contenuto in M_i, e su questa varietà starebbero perciò senz'altro tutti i $\rho + 1$ punti A.

(3) Per il momento, non si potrebbe ancora asserire che lo spazio γ rimanga con ciò individuato; certo però che vi è qualche $S_{\rho-1}$ passante per quell' $S_{\rho-\mu-1}$ e per questi μ punti. Dal seguito del ragionamento apparirà poi che non può esservene che uno.

(4) I vari spazi S_μ sono contenuti infatti rispett. in altrettanti S_{i-1} di M_i^{r-i+1}; e due qualunque di questi S_{i-1} non si incontrano, a meno che la varietà stessa non sia un cono — nel qual caso ci converrà (e basterà) prendere lo spazio β non incidente all'asse (al più S_{i-2}) di questo cono.

La varietà M_i^{r-i+1} di S_r contiene dunque certo $(r-i)+(r+1)+i+(i+1)$ ossia $2r+i+2$ fra i punti proposti; conterrà perciò anche i rimanenti $i-1$ (perchè le quadriche passanti per essa non passano, di conseguenza, per nessun altro punto); e la proposizione enunciata al principio di questo n° rimane così dimostrata.

Il teorema si estende manifestamente al caso di un numero di punti anche superiore a $2(r+i)+1$, purchè sempre le quadriche passanti per $2r+i$ qualunque fra questi passino di conseguenza anche pei rimanenti. — Nel caso di $i=1$ questo teorema coincide con quello già dato dal sig. Castelnuovo nelle sue *Ricerche* (n° 30); veniamo quindi addirittura a svilupparne le conseguenze più importanti per il caso di $i=2$.

§ 5.

Sistemi lineari $\infty^{\binom{r-1}{2}-2}$ di quadriche e loro varietà basi. Superficie di ordine r a sezioni ellittiche.

10. Facendo nel teorema del n° 9 $i=2$, troviamo la proposizione seguente:

Se nello spazio S_r $(r \geq 4)$ si ha un gruppo di $2r+2+x$ punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per $2r+2$ qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti x, questi punti, se $x \geq 3$, staranno tutti su di una rigata razionale normale R^{r-1} (che sarà anche segata in una curva di ordine $r-2$ dall'S_{r-2} di $r-1$ fra quei punti).

Dico ora che, nella stessa ipotesi $x \geq 3$, le quadriche passanti per quei primi $2r+2$ punti devono avere non solo x, ma infiniti altri punti a comune. Infatti, se così non fosse, fra le quadriche passanti per quegli stessi punti se ne potrebbe certo trovare qualcuna che incontrasse la rigata R^{r-1} secondo una curva *irriduttibile* (di ordine $2r-2$ e genere $r-2$) (1). Su questa curva le quadriche di S_r segherebbe una g_{4r-4}^{3r-2} (2); imponendo loro perciò di passare per $2r+2$ fra i punti proposti (3), rimarrebbe una g_{2r-6}^{r-4} con x punti fissi; cosa che è evidentemente assurda per $x>2$.

Concludiamo pertanto:

Se nello spazio S_r $(r \geq 4)$ si ha un gruppo di $2r+5$ o più punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per $2r+2$ qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti, queste quadriche avranno a comune infiniti punti (e quindi tutta una linea, passante per una parte almeno di quegli stessi punti).

---

(1) Se questa curva dovesse necessariamente spezzarsi, se ne concluderebbe tosto ch'essa deve contenere una parte fissa comune a tutte le quadriche passanti per i $2r+2+x$ punti proposti (e passante a sua volta per una parte almeno di questi punti). Non sarà forse inutile l'osservare che per questi stessi punti passa un sistema lineare (almeno) ∞^{r-3} di quadriche non contenenti la rigata R^{r-1}.

(2) Infatti la curva C_{r-2}^{2r-2} sta precisamente su $\binom{r-1}{2}+1$ quadriche indipendenti.

(3) Punti che possiamo supporre impongano condizioni tutte distinte (se no si cadrebbe nel caso di $i=1$).

Ovvero anche: *Se un sistema lineare di quadriche in* S_r *ha un certo numero* k $(\geq 2r+3)$ *di punti basi indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r+2$ *qualunque fra essi contengano sempre di conseguenza anche i rimanenti (ma non contengano altri punti fissi) sarà certo* $k \leq 2r+4$.

11. Da questi risultati, riuniti alle considerazioni di cui al n° 8, deduciamo ancora:

Se per una curva (irriduttibile) appartenente a S_r $(r \geq 5)$ *e di ordine* $n > 2r+2$ *passano* $\binom{r-1}{2}-1$ *quadriche indipendenti, queste quadriche avranno a comune tutta una superficie passante a sua volta per quella curva.* È facile anzi riconoscere che questa superficie non potrà essere di ordine superiore a r (1); ciò perchè un sistema lineare di quadriche (M^2_{r-3}) di S_{r-2} di dimensione $\binom{r-1}{2}-2$ non può avere più di r punti basi indipendenti, a meno di non averne infiniti. Dunque:

Se per una curva (irriduttibile) appartenente a S_r $(r \geq 5)$ *e di ordine superiore a* $2r+2$ *passano* $\binom{r-1}{2}-1$ *quadriche indipendenti, la stessa curva dovrà stare su di una superficie di ordine* $\leq r$ *(e quindi di ordine* r *o* $r-1$*) comune a queste quadriche.*

O in altri termini: *Se nello spazio* S_r $(r \geq 5)$ *un sistema lineare di quadriche di dimensione* $\binom{r-1}{2}-2$ *ha infiniti punti basi, questi punti non potranno costituire (di varietà appartenenti ad* S_r*) che una curva di ordine* $\leq 2r+2$ *o una superficie di ordine* $\leq r$ (2).

Tenuto conto infine di quanto si è detto nel § 2 sull'ordine di una curva di genere $\pi - k$ per la quale si vuole che passino (almeno) $\binom{r-1}{2}-1$ quadriche indipendenti, abbiamo:

Una curva normale, la quale appartenga ad S_r $(r \geq 5)$ *e sia di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore a*

$$\frac{k+4}{2}(r-1)+2 \quad \text{oppure} \quad \frac{k+3}{2}(r-1)+3$$

secondo che k *pari o dispari, sta sempre su di una superficie di ordine* r *o* $r-1$ *(comune a tutte le quadriche che la contengono)* (3). Se non sta dunque sulla rigata R^{r-1} o sulla superficie di Veronese (nel caso di $r=5$), sarà certo contenuta in una superficie di ordine r. Supposto $k>0$, *fa eccezione il solo caso di* $k=1$ *nel quale, anzichè* $n > 2r+1$, *bisogna supporre* $n > 2r+2$.

12. Ora, una superficie di ordine r appartenente a S_r può avere le sezioni razionali od ellittiche. Nel primo caso si hanno le rigate razionali ma non normali, bensì proiezioni di quelle di ugual ordine appartenenti a S_{r+1}; e di più, per $r=4$,

---

(1) E la linea di cui è fatta parola nel penultimo enunciato del n° 10 non potrà quindi riescire di ordine superiore a $r+1$.

(2) Con questo non intendiamo però escludere che, almeno se quegli ordini massimi non sono raggiunti, vi possa essere anche qualche ulteriore punto base (isolato), oppure, nel secondo caso, oltre la superficie, anche una curva base non contenuta in questa.

(3) Sappiamo anzi che questa superficie può essere di ordine r solo quando l'ordine della curva sia $\leq (k+2)(r-1)+1$.

una superficie non rigata contenente una ∞^2 di coniche, proiezione precisamente della superficie di Veronese da un punto esterno ad essa (1). Ma per le rigate razionali di ordine r e appartenenti a S_r passano in generale solo $\binom{r-1}{2}-3$ quadriche indipendenti se $r>4$, e ne passa una sola se $r=4$; e per la superficie di quart'ordine non rigata non ne passa, in generale, alcuna (2). Non sarà dunque sopra queste superficie che potranno stare le curve C_p^n considerate di sopra; esse saranno invece contenute (quando non stiano sopra F^{r-1}) in *superficie di ordine* r *a sezioni ellittiche.* E queste saranno anche le sole superficie di S_r che possano essere varietà basi per sistemi di quadriche di dimensione $\binom{r-1}{2}-2$ (3).

D' altra parte è pur noto (cfr. Del Pezzo, loc. cit.) che una superficie d'ordine r (F^r) appartenente a S_r e colle sezioni ellittiche *è sempre rigata per* $r>9$; e, se rigata, *è necessariamente un cono* (4). Per $r\leq 9$ esistono invece in S_r delle superficie di ordine r a sezioni ellittiche e non rigate, che sono razionali e, se di ordine inferiore a 9, si possono anche ottenere (con una sola eccezione, per $r=8$) come proiezioni della F^9 di S_9. Queste superficie, studiate per la prima volta dal sig. Del Pezzo, sono quelle appunto che rappresentano i sistemi lineari di cubiche piane con $9-r$ punti basi; e in quel caso speciale accennato per $r=8$ (superficie F^8 *di seconda specie*) il sistema delle quartiche piane con due punti doppi fissi. Dunque:

Se nello spazio S_r *un sistema lineare di quadriche di dimensione* $\binom{r-1}{2}-2$ *ha infiniti punti basi, questi punti, per* $r>9$, *non potranno costituire (di varietà appartenenti ad* S_r*) che una curva di ordine non superiore a* $2r+2$ (5), *oppure un cono*

---

(1) Per queste superficie, e per le altre (non rigate) pure di ordine r e appartenenti a S_r, cfr. ad es. Del Pezzo: *Sulle superficie del n° ordine immerse nello spazio di* n *dimensioni* (" Rend. Circolo Mat. di Palermo ", I).

(2) Infatti, se una superficie di S_r si può ottenere come proiezione di altra appartenente a S_{r+1}, è chiaro che le quadriche di S_r passanti per la prima saranno tante quanti i coni quadrici di S_{r+1} che passano per la seconda e hanno il vertice nel centro di proiezione. Nel nostro caso si tratta di superficie di ordine r che appartengono ad S_r e sono proiezioni di altre di egual ordine appartenenti a S_{r+1}; e fra le $\binom{r}{2}$ quadriche indipendenti (di S_{r+1}) che passano per una di queste ultime superficie non vi sono in generale (come si vede subito) che soli $\binom{r-1}{2}-3$ coni col vertice nel centro di proiezione (che è un punto assolutamente arbitrario in S_{r+1}, purchè esterno alla F_r considerata). Però, se $r=4$ e quindi $r+1=5$ — e in questo solo caso —, *ogni* punto dello spazio $S_{r+1}\equiv S_5$ sta sopra una corda della rigata normale $R_r\equiv R^4$, corda che è asse di un cono quadrico di 2ª specie (S_1 - cono) passante per la rigata medesima; sicchè la R^4 di S_4 viene ad avere un punto doppio e a stare a sua volta in un cono quadrico col vertice in questo punto. — Questa stessa eccezione non si presenta invece per la F^4 non rigata, che non ha, in generale, punti doppi. Solo quando il centro di proiezione si sia preso nel piano di una conica della superficie normale (di Veronese), essa viene ad avere tutta una retta doppia (come può succedere anche per la rigata) e a stare perciò sopra un intero fascio di quadriche (in questo caso, di coni quadrici); ma allora essa può considerarsi (e così intenderemo che sia) come un caso particolare della F^4 a sezioni *in generale* ellittiche, che è intersezione generale di due quadriche di S_4.

(3) Intendiamo naturalmente (qui ed in seguito) che per queste superficie non passino altre quadriche all'infuori di quelle contenute nel sistema accennato.

(4) Cfr. C. Segre: *Sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* (" Atti R. Acc. di Torino ", XXI) oppure la Mem. cit. nei " Math. Ann. ", XXXIV; n° 14.

(5) V. la nota (2) a pag. prec.

normale ellittico (e in questo caso anzi tutte le quadriche del sistema saranno coni, e collo stesso vertice del cono base) (1). *Per* $r \leq 9$ *la varietà base potrà anche essere una superficie razionale di ordine* r *a sezioni ellittiche* (2).

Una curva appartenente ad S_r *e di ordine* $n > 2r + 2$ *per la quale passino precisamente* $\binom{r-1}{2} - 1$ *quadriche indipendenti sta sempre sopra un cono normale ellittico, se* $r > 9$; (e quelle quadriche saranno tutte coni, ecc.). *Se* $r \leq 9$, *la curva potrà anche stare su di una* F^r *razionale a sezioni ellittiche.*

E in particolare: *Una curva normale di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore a* $\frac{k+4}{2}(r-1)+1$ *o* $\frac{k+3}{2}(r-1)+2$ *secondo che* k *è pari o dispari* ($2r+2$, se $k=1$) *starà sempre su di una rigata razionale normale o su di un cono normale ellittico se lo spazio* (S_r) *cui essa appartiene è superiore a* S_9.

Se però $r \leq 9$, *la curva potrà stare anche su di una* F^r *razionale a sezioni ellittiche; e anche sulla superficie di Veronese, se* $r = 5$.

13. — Una curva tracciata su di un cono normale ellittico di S_r, in modo da avere un punto s^{plo} nel vertice di questo cono e da incontrarne ancora ogni generatrice in altri m punti, è di ordine

$$n = mr + s$$

e di genere

$$p = \binom{m}{2} r + 1 + s(m-1) - z$$

se con z indichiamo il numero dei suoi punti doppi (astrazion fatta dall'accennato punto s^{plo}) (3). Perchè dunque una curva di S_r di dato ordine n e dato genere $p = \pi - k$ possa stare su di un cono normale ellittico, è necessario che le due equazioni scritte siano soddisfatte da una medesima terna di valori interi e positivi di m, s e z (inclusovi per s e z anche lo zero). *A priori* si può dunque aspettarsi la cosa come non sempre possibile; si può aspettarsi cioè che qualche curva della quale siano assegnati ad arbitrio l'ordine ed il genere possa — qualunque siano gli altri suoi caratteri — non stare mai sopra un cono normale ellittico dello spazio a cui appartiene. Vedremo in seguito, esaminando alcuni casi particolari, che così è effettivamente; e che le curve giacenti su di un tal cono devono avere appunto certi ordini e certi generi particolari, o almeno particolarmente legati fra di loro.

---

(1) Ciò perchè i coni quadrici che necessariamente fanno parte del sistema bastano ad esaurirlo. Del resto, se il vertice del cono ellittico non fosse punto doppio per una quadrica qualsiasi di questo sistema, questa dovrebbe ammettere in quello stesso punto un S_{r-1} tangente ben determinato e contenente tutte le generatrici di quel cono; cosa che sarebbe assurda, perchè queste generatrici non stanno in un medesimo iperpiano.

(2) Questo si è dimostrato per $r \geq 5$. Per $r = 4$ poi il sistema di quadriche in discorso si ridurrebbe a un fascio, e avrebbe quindi per varietà base appunto una superficie F^4 a sezioni (in generale) ellittiche. Per $r < 4$ la dimensione $\binom{r-1}{2} - 2$ diventerebbe < 0.

(3) Ciò per la nota formola del sig. Segre, già più volte applicata. Per il caso in cui (come qui) la rigata è un cono, la formola era stata data anche dallo Sturm (" Math. Ann. ", XIX, p. 487).

Il caso di una curva per la quale si possa condurre un cono normale ellittico ci appare dunque, quasi direi, come eccezione. E si potrebbe anche asserire (e ciò apparirà meglio in seguito) che *per* $r > 9$ *una curva di* S_r *di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore ai limiti già più volte ricordati sta* IN GENERALE *sulla rigata razionale normale* R^{r-1}, *e quindi sulle* $\infty^{\binom{r-1}{2}-1}$ *quadriche che contengono quest' ultima superficie.*

§ 6.

Sulle curve di genere $\pi - 1$.

14. — I risultati ottenuti nel paragrafo precedente si applicano a lor volta alle curve di genere $\pi - 1$, per le quali (com'è noto) passano sempre almeno $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti; e non riuscirà forse privo d'interesse l'esaminare un po' più da vicino i vari casi che queste curve possono presentare. Basterà naturalmente che ci occupiamo di quelle di ordine $n < 3r - 1$ (1); e potremo anche limitarci alle curve *speciali,* supporre cioè altresì $n > 2r$. Posto pertanto $n = 2r + i$ dove $0 < i < r - 1$, ed osservato che all'ordine $2r + i$ deve corrispondere il genere massimo $\pi = r + 2i + 1$, è chiaro che le curve da considerarsi saranno del tipo C^{2r+i}_{r+2i} (2).

E anzitutto: quali fra queste curve possono stare sul cono normale ellittico? È chiaro che una C^{2r+i}_{r+2i} contenuta in questo cono dovrebbe avere un punto i^{plo} nel vertice, e incontrare ancora ogni generatrice in *due* altri punti. Supposto pertanto che una tal curva abbia (all'infuori del vertice) r punti doppi, potremo scrivere

$$r + 2i = 1 . r + 1 + i . 1 - z$$

ossia $i = 1 - z$; relazione che (dovendo essere $i > 0$, $z \geq 0$) è soddisfatta solo per $i = 1$, $z = 0$. L'unica delle nostre curve che possa stare sul cono ellittico è dunque la C^{2r+1}_{r+2}; questa dovrà passare (semplicemente) pel vertice del cono, e non avrà punti doppi.

Ciò posto, osserviamo che la curva C^{2r+i}, essendo di genere $r + 2i$, conterrà come serie *canonica* una $g^{r+2i-1}_{2r+4i-2}$; e siccome su di essa gli iperpiani (S_{r-1}) segano una g^r_{2r+i}, così vi sarà pure, come *residua* di quest'ultima, una g^{i-1}_{3i-2} (3). La considerazione di questa serie residua sarà, come vedremo, fondamentale per lo studio che ci siamo proposti.

---

(1) Se l'ordine fosse più elevato ($n \geq 3r - 1$) la curva starebbe certo su di una superficie di ordine $r - 1$ (v. § 2).

(2) E queste curve sono anche tutte normali, perchè una C^{2r+i} di S_{r+1} non può essere di genere superiore a $(r + 1) + 2(i - 2) + 1 = r + 2i - 2$ (quando sia $i > 0$ e $\leq r + 1$).

(3) È nota la proprietà caratteristica di queste *serie* (reciprocamente) *residue;* che cioè un gruppo dell'una e un gruppo dell' altra, presi pur comunque, formano sempre insieme un gruppo della serie canonica $\left(g^{p-1}_{2p-2}\right)$.

15. E cominciamo col supporre $i = 1$ (1). Avremo curve C^{2r+1}_{r+2} di S_r, nelle quali la serie lineare segata dagli iperpiani ha per residua una g^0_1. *Queste curve si possono dunque tutte ottenere come proiezioni delle* C^{2r+2}_{r+2} *(canoniche) di* S_{r+1} *rispett. da loro punti* (2). Sono in generale prive di punti doppi; ne acquistano uno soltanto quando contengono una g^1_3, il che non si verifica, in generale almeno, se $r + 1 > 3$, ossia $r > 2$ (3).

16. Poniamo $i = 2$, quindi $r > 3$ (4); avremo curve del tipo C^{2r+2}_{r+4}, e queste contengono una g^1_4. Potrebbe questa g^1_4 avere un punto fisso (5), e la nostra curva sarebbe allora proiezione di una C^{2r+3}_{π} di S_{r+1}, starebbe sopra una rigata razionale normale, e ne segherebbe ogni generatrice in *tre* punti; avrebbe anche sempre un punto doppio.

Escludiamo questo caso, e supponiamo quindi la g^1_4 priva di punti fissi. Si può domandare se e quando i suoi gruppi possano essere collineari. Supposto che lo siano, e applicando alla serie la formola più volte cit. del sig. Segre (Rend. Lincei, 1887), si vede che la cosa risulta possibile in due soli casi, cioè per una C^{10}_8 di S_4 con punto doppio e per una C^{12}_9 di S_5 priva di punti doppi; curve che stanno rispett. sulle rigate R^3 e R^4 e ne tagliano ogni generatrice in *quattro* punti (6).

Se poi i gruppi della g^1_4 non sono collineari, essi staranno però certo in altrettanti piani (cfr. Castelnuovo, *Ricerche* ecc., 14); e questi piani costituiranno una serie ∞^1 razionale, normale (perchè è tale la nostra curva), e quindi di ordine $r - 2$ (7); una varietà M^{r-2}_3 dunque, che conterrà la C^{2r+2}_{r+4}. E poichè le quadriche di S_r passanti per questa varietà formano un sistema lineare di dimensione $\binom{r-2}{2} - 1$, vi sarà certo un altro sistema, pure lineare, di dimensione

$$\left\{ \binom{r-1}{2} - 2 \right\} - \left\{ \binom{r-2}{2} - 1 \right\} - 1 = r - 4$$

e costituito da quadriche passanti tutte per la curva C^{2r+2}, ma non per la varietà M^{r-2}_3. Queste quadriche segheranno già ogni piano di M^{r-2}_3 in quattro punti fissi (formanti un gruppo della g^1_4); imporre dunque ad una di esse di contenere uno di

---

(1) Le proposizioni generali trovate precedentemente non sono applicabili ai casi di $i = 1$ e $i = 2$, nei quali la curva in discorso risulta di ordine $\leq 2r + 2$. La trattazione di questi casi è però ugualmente interessante, e servirà nel tempo stesso a render più completo il nostro studio.

(2) In generale, una curva *speciale* C^n di S_r si può ottenere come proiezione di una C^{n+1} di S_{r+1} quando la serie residua (rispetto alla serie canonica) della g^r_n da essa rappresentata ha qualche punto fisso. È questa la traduzione (per le curve degli iperspazi) del teorema inverso del *Reductionssatz* di Noether.

(3) Se la C^{2r+2}_{r+2} di S_{r+1} sta (come può effettivamente stare) sul cono normale ellittico di ordine $r + 1$ — epperò contiene (condizione *necessaria* e *sufficiente* a ciò) una serie ∞^1 ellittica di coppie di punti — la sua proiezione in S_r starà sul cono ellittico di ordine r; è così che si ottiene quell'unico caso già considerato di curva di genere $\pi - 1$ giacente su di un tal cono.

(4) Essendosi supposto $i < r - 1$, i risultati che otterremo per un dato valore di i varranno solo per $r > i + 1$ (ossia per gli spazi superiori a S_{i+1}).

(5) Più di uno, si vede subito che non può averne.

(6) Queste curve si possono ottenere come intersezioni delle rigate che le contengono con varietà del quarto ordine condotte per *due* o rispett. *quattro* loro generatrici. Nel primo caso la varietà M^4_3 dovrebbe anche toccare la rigata R^3 in un suo punto.

(7) Da ciò segue altresì che mai tre punti di uno stesso gruppo della g^1_4 potranno essere collineari.

questi piani equivarrà ad imporle *due* (nuove) condizioni; e noi potremo perciò sempre trovare nell'ultimo sistema una quadrica la quale contenga almeno $\frac{r-4}{2}$ o $\frac{r-5}{2}$ (secondo che r è pari o dispari) fra quegli stessi piani. L'intersezione residua di questa quadrica colla varietà M_3^{r-2} sarà una superficie F di ordine (non superiore a) $\frac{3r-4}{2}$ rispett. $\frac{3r-3}{2}$; e su questa dovrà stare la curva proposta. La superficie stessa conterrà pure una ∞^1 razionale di coniche, e sarà perciò (a meno che la conica generica non si spezzi) *razionale, a sezioni iperellittiche;* sarà anche normale, perchè tali sono le sue sezioni (1). Il genere di queste sarà uguale all'ordine della superficie F diminuito di $r-1$; non potrà quindi essere superiore a $\frac{r-2}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$; ma, in generale, avrà precisamente l'uno o l'altro di questi valori. La curva C^{2r+2} (che dicemmo stare su F) si potrà ottenere come intersezione (completa o parziale) di F stessa è di una quadrica (altra del sistema ∞^{r-4}, e non contenente la superficie F (2)); e se di queste essa è intersezione solo parziale, l'intersezione residua sarà costituita da un certo numero $\left(\text{nel caso più generale } \frac{r-6}{2} \text{ o } \frac{r-5}{2}\right)$ di coniche. Infatti ogni quadrica passante per la curva C^{2r+2} e non per F sega ciascuna delle coniche di questa già in *quattro* punti fissi, posti su quella curva; sicchè la conica di F passante per un nuovo punto eventualmente comune a F stessa e a quella quadrica avrebbe comuni con quest'ultima già *cinque* punti, e starebbe perciò tutta su di essa (3).

L'ordine della superficie F potrà però qualche volta abbassarsi, — e altrettanto avverrà allora del genere delle sue sezioni —. Così, p. es., se la M_3^{r-2} fosse un cono — se cioè quegli ∞^1 piani passassero tutti per un medesimo punto — vi sarebbe certo nel sistema ∞^{r-4} una quadrica contenente anche $r-5$ fra quegli stessi piani; la superficie F risulterebbe allora di ordine $r+1$ e colle sezioni di genere *due,* e le sue ∞^1 coniche passerebbero tutte per un medesimo punto (4). La curva C^{2r+2} sarebbe allora intersezione completa di questa superficie con una quadrica.

Più particolarmente ancora può darsi che quelle ∞^1 coniche (passando pur sempre per uno stesso punto) si scindano tutte in coppie di rette (concorrenti in questo punto); allora la superficie F sarebbe un cono di ordine $r+1$ e genere *due,* e la C^{2r+2} sarebbe intersezione (completa) di questo cono con una quadrica non passante pel suo vertice. Questa curva conterrebbe allora una serie ∞^1 (di genere 2) di coppie di punti, e la g_4^1 sarebbe, in un certo senso, *composta* mediante quella serie (sarebbe cioè la g_2^1 entro la stessa ∞^1 di coppie di punti) (5).

---

(1) Sono infatti curve iperellittiche, ottenibili come intersezioni di una rigata razionale normale con una quadrica condotta per un certo numero di sue generatrici.

(2) E di quadriche così fatte ne esisteranno certo, se $r>4$.

(3) Abbiamo così anche un modo, e abbastanza semplice, per trovare delle curve piane atte a rappresentare queste C_{r+4}^{2r+2}, partendo cioè dalle note rappresentazioni delle superficie a sezioni iperellitiche (Cfr. alcuni lavori del Castelnuovo che verranno cit. più particolarmente in seguito).

(4) Questa superficie si rappresenterebbe precisamente con un sistema di sestiche piane aventi a comune un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo.

(5) Il ragionamento fatto è, come si vede, assai semplice; ma si può anche applicarlo (con poche e lievissime modificazioni) in molti casi analoghi, alcuni dei quali saranno pure accennati in seguito. Per questo appunto ho voluto esporlo qui per disteso.

Questo ragionamento non è più applicabile (tutto almeno) al caso di $r = 4$. Dal fatto però che per la C_8^{10} di S_4 passano sempre ∞^1 quadriche (tutte quelle cioè di un fascio) segue senz'altro che questa curva dovrà stare sulla superficie F^4 comune a quelle stesse quadriche (e uno dei coni del fascio sarà precisamente costituito dai piani che contengono i singoli gruppi della g_4^1).

Riassumendo dunque, abbiamo: *Una curva* C_{r+4}^{2r+2} *di* S_r $(r > 4)$ *la quale non stia sulla rigata* R^{r-1} *sta in generale su di una superficie razionale normale di ordine* $\frac{3r-4}{2}$ *o* $\frac{3r-3}{2}$ *(secondo che* r *è numero pari o dispari) a sezioni iperellittiche di genere* $\frac{r-2}{2}$ *o rispett.* $\frac{r-1}{2}$; *e può ottenersi precisamente come intersezione di questa superficie con una quadrica passante per* $\frac{r-6}{2}$ *o* $\frac{r-5}{2}$ *sue coniche. L'ordine della superficie, e corrispondentemente il genere delle sue sezioni e il numero di queste coniche, possono però abbassarsi e ridursi rispett. fino ai valori limiti* $r+1$, 2, 0; *in quest'ultimo caso la superficie può anche essere un cono di ordine* $r+1$ *e genere due. — Infine per* $r \leq 8$ *la curva* C_{r+4}^{2r+2} *può anche stare su di una* F^r *razionale a sezioni ellittiche comune a tutte le quadriche che la contengono (e ciò si verifica anzi sempre per* $r = 4$) (1); *e per* $r = 5$ *esiste anche una* C_9^{12} *contenuta in una* F_2^4 *di Veronese.*

Queste curve sono tutte prive di punti doppi, meno l'ultima (C_9^{12} di S_5) che ne ha uno (2).

17. Per $i \geq 3$ lo studio delle curve C_{r+2i}^{2r+i} di S_r rimane assai facilitato, potendo noi già asserire *a priori* (in forza di teoremi precedenti) che ciascuna di queste curve dovrà stare su di una superficie normale a sezioni razionali od ellittiche. Sappiamo anzi che questo secondo caso potrà presentarsi solo per $r \leq 9$ (e anzi solo per $r \leq 8$ se l'ordine $2r + i = 18 + i$ della curva in S_9 non è un multiplo di 3); ma possiamo anche ritrovare la stessa cosa per altra via.

---

(1) Questo ci è confermato (almeno in parte) anche dall'enumerazione delle costanti, la quale ci dice appunto che la C_{r+4}^{2r+2} generale non sta certo sulla F^r razionale a sezioni ellittiche se $r > 4$, ma può forse starvi per $r = 4$. Infatti le curve C_{r+4}^{2r+2} di S_r formano, tutte insieme, un sistema di dimensione *almeno* uguale a $(r+1)(2r+2) - (r+3)(r-3)$ ossia $r^2 + 4r + 11$ (cfr. Castelnuovo: *Numero delle involuzioni razionali etc.;* " Rend. Acc. dei Lincei „; serie II, 1889). Quelle invece che stanno sopra una F^r a sezioni ellittiche (esclusa almeno la F^8 di seconda specie) ne formano uno di dimensione $(r^2+10) + (3r+5) = r^2 + 3r + 15$. (Infatti le F^r di S_r a sezioni ellittiche sono ∞^{r^2+10} $(r \leq 9)$, e su ciascuna di queste le C_{r+4}^{2r+2} — che si rappresentano con C^7 piane aventi nei $9 - r$ punti fondamentali rispett. *un* punto triplo e $8 - r$ punti doppi — formano (per $r \leq 8$) $9 - r$ sistemi lineari di dimensione appunto $35 - 6 - 3(8 - r) = 3r + 5$). E questo secondo numero $(r^2 + 3r + 15)$, inferiore al primo per $r \geq 5$, diventa invece eguale ad esso per $r = 4$.

(2) Volendo fare a parte la ricerca delle C_{r+4}^{2r+2} con punto doppio, si potrebbe osservare che queste ultime contengono una g_{2r}^{r-1}, quindi (come residua), una g_6^2; e questa può essere *composta* mediante una g_3^1 (ma non altrimenti) — e allora si hanno le curve esistenti sulla rigata R^{r-1} e considerate da principio —, oppure *non composta* (e senza punti fissi). In tal caso la C^{2r+2} deve potersi riferire a una sestica piana, il che esige $r + 4 \leq 10$, quindi $r \leq 6$, e anzi $r \leq 5$ perchè la sestica piana generale non contiene alcuna g_4^1. Per $r = 4$ si ha allora la C_8^{10} di S_4 coi gruppi della g_4^1 collineari; per $r = 5$, la C_9^{12} di S_5 posta sulla superficie di Veronese.

Abbiamo già osservato che la curva C^{2r+i}_{r+2i} contiene una serie lineare g^{i-1}_{3i-2}. Perciò, se questa serie non è composta e non ha punti fissi, quella curva sarà certo riferibile a una C^{3i-2}_{r+2i} (semplice) di S_{i-1}, sulla quale la g^{i-1}_{3i-2} verrà segata dagli S_{i-2} contenuti nel suo S_{i-1}.

La serie g^{i-1}_{3i-2} *non può essere composta.* Infatti, essendo $\frac{3i-2}{i-1} < 4$ (se $i > 2$), essa potrebbe tutt'al più essere composta con una serie ∞^1 di coppie o di terne di punti. Quest'ultimo caso si esclude subito, perchè l'ordine $3i - 2$ non è certo multiplo di 3. Quanto al primo, esso potrebbe presentarsi soltanto quando i fosse pari; e, supposto allora $i = 2k$, il genere della serie di coppie di punti non potrebbe superare il limite $(3k - 1) - (2k - 1) = k$ (1). E questo ci porterebbe a concludere che le congiungenti di quelle stesse coppie di punti formerebbero una rigata di ordine $\leq r - 1$, risultato che è manifestamente incompatibile colle nostre ipotesi (anche nel caso estremo dell'ordine $= r - 1$).

La serie g^{i-1}_{3i-2} *può avere un punto fisso.* Allora la curva C^{2r+i}_{r+2i} è proiezione di una C^{2r+i+1}_{π} di S_{r+1}; sta quindi sulla rigata razionale normale e ha un punto doppio. Le generatrici di questa rigata determinano su di essa una g^1_3, e la g^{i-1}_{3i-3} che si ottiene dalla g^{i-1}_{3i-2} col fare astrazione dal punto fisso è precisamente composta con quest'ultima serie. — E possiamo anche dire, inversamente, che *ogni* C^{2r+i}_{r+2i} *di* S_r $(i < r - 1)$ *tracciata sulla rigata* R^{r-1} *in modo da incontrarne ogni generatrice in tre punti deve avere un punto doppio e può ottenersi come proiezione di una* C^{2r+i+1} *di* S_{r+1}. — Più di un punto fisso la g^{i-1}_{3i-2} non può avere.

Escluse pertanto queste curve contenenti una g^1_3, non resteranno che quelle riferibili a una C^{3i-2} di S_{i-1}; e siccome d'altra parte il genere di questa C^{3i-2} non può essere superiore a 15, se $i = 3$; a 16, se $i = 4$; e a $3(i + 1)$, se $i > 4$, potremo concludere che, fuori della rigata R^{r-1},

le curve C^{2r+3}_{r+6} possono esistere soltanto per $r + 6 \leq 15$ ossia per $r \leq 9$ (dunque per $r = 5, 6, 7, 8, 9$);

le curve C^{2r+4}_{r+8} solo per $r + 8 \leq 16$ ossia per $r \leq 8$ (dunque per $r = 6, 7, 8$);

le curve C^{2r+i}_{r+2i} $(i > 4)$ solo per $r + 2i \leq 3(i + 1)$ ossia per $r \leq i + 3$ (dunque per $r = i + 2, i + 3$);

e anzi queste ultime (come si vede facilmente) se $r > 9$ dovranno stare anch'esse sulla rigata R^{r-1}, ma ne taglieranno ogni generatrice in *quattro* (anzichè in *tre*) punti (2).

---

(1) La serie g^{i-1}_{3i-2} si riduce infatti, su questa ∞^1 di coppie di punti, a una g^{2k-1}_{3k-1}; e quest'ultima serie è certo *non speciale* se $3k - 1 < 2(2k - 1)$ ossia se $k > 1$.

(2) Per $r \leq 9$ potranno invece essere contenute ancora in superficie di ordine r; ciò proviene dal fatto che la curva C^{3i-2} di S_{i-1}, pur essendo in generale contenuta in una rigata R^{i-2} e incontrando le generatrici di questa in *quattro* punti, può tuttavia, per valori particolari di i, incontrare queste stesse generatrici in *cinque* punti, o anche stare sulla superficie di Veronese. — E questo limite 9 (e anzi 8 quando l'ordine della curva, per $r = 9$, non risulterebbe multiplo di 3) mi sembra veramente notevole. Certo che non ne abbiamo una nuova dimostrazione dei risultati già ottenuti dal sig. Del Pezzo per le superficie razionali a sezioni ellittiche (in quanto specialmente queste non

18. Possiamo riassumere i risultati ottenuti sulle curve di genere $\pi - 1$ e di ordine compreso fra $2r + 1$ e $3r - 2$ (limiti inclusi) — curve quindi del tipo C^{2r+i}_{r+2i} $(0 < i < r - 1)$ — nel modo seguente:

Per ogni valore di r *e di* i esiste:

Una C^{2r+i}_{r+2i} con punto doppio e contenuta in una rigata razionale normale R^{r-1} della quale essa incontra ogni generatrice in *tre* punti;

Per ogni valore di r abbiamo ancora:

Una C^{2r+1}_{r+2}, in generale priva di punti doppi, che è sempre proiezione di una C^{2r+2}_{r+2} canonica di S_{r+1}. Può contenere una serie ellittica di coppie di punti, e allora sta sul cono normale ellittico di ordine r (e passa semplicemente pel vertice di questo cono);

Una C^{2r+2}_{r+4}, che contiene una g^1_4 (lineare) e sta (in generale) su di una superficie razionale normale a sezioni iperellittiche di genere $\leq \frac{r-1}{2}$. Questa stessa curva può contenere una serie ∞^1 di genere *due* di coppie di punti, ed è allora intersezione del cono normale di genere due (e ordine $r+1$) con una quadrica non passante pel vertice di questo cono. Anch'essa non ha, in generale, punti doppi;

Una C^{3r-3}_{3r-6}, anche priva di punti doppi, contenuta in una rigata R^{r-1} e incontrata da ogni generatrice di questa in *quattro* punti. Essa è riferibile (in generale) se r è pari, a una C^{r+1} piana con punto $(r-3)^{plo}$; se r è dispari, a una C^{r+2} piana con un punto $(r-2)^{plo}$ e un punto *triplo* (contiene dunque in questo caso una g^1_{r-1});

Una C^{3r-2}_{3r-4} con punto doppio, e contenuta pure in una rigata R^{r-1} di cui incontra ogni generatrice in *quattro* punti. Essa può riferirsi (in generale) a una C^{r+2} piana con un punto $(r-2)^{plo}$ e un punto doppio.

Per $r \leq 9$ si hanno poi ancora le curve seguenti:

---

possono esistere per $r > 9$); ma ne abbiamo però una conferma, notevole sopratutto per il modo in cui vi siamo giunti, partendo cioè da un ordine di idee affatto diverso da quello in cui era lo stesso sig. Del Pezzo. La stessa via, considerando le curve di genere $\pi - 2$, $\pi - 3$, ..., conduce ai limiti analoghi 11, 14, ...

	Indicazione della curva	Numero dei punti doppi	Superficie in cui le curve sono contenute	Curve piane cui sono riferibili (1)
Nello spazio S_4	C^{10}_8	—	Superficie F^4 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2)$
Nello spazio S_5	C^{12}_9	1	Superficie F^4 di *Veronese*	C^6 piana (A^2)
	C^{12}_9	—	» F^5 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2)$
	C^{13}_{11}	—	» » »	» $(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2)$
Nello spazio S_6	C^{14}_{10}	—	Superficie F^6 a sezioni ellittiche	» $(A^3 B_1^2 B_2^2)$
	C^{15}_{12}	—	» » »	» $(A_1^2 A_2^2 A_3^2)$
	C^{16}_{14}	—	» » »	C^8 piana $(A_1^3 A_2^3 B^2)$
Nello spazio S_7	C^{16}_{11}	—	Superficie F^7 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B^2)$
	C^{17}_{13}	—	» » »	» $(A_1^2 A_2^2)$
	C^{18}_{15}	—	» » »	C^8 piana $(A_1^3 A_2^3)$
	C^{19}_{17}	—	» » »	» $(A^3 B^2)$
Nello spazio S_8	C^{18}_{12}	—	Superficie F^8 di prima specie	C^7 piana (A^3)
	C^{19}_{14}	—	» » »	» (A^2)
	C^{21}_{18}	—	» » »	C^8 piana (A^3)
	C^{22}_{20}	—	» » »	» (A^2)
	C^{18}_{12}	—	» di seconda specie	» $(A^4 B^3)$
	C^{20}_{16}	—	» » »	C^9 piana $(A_1^4 A_2^4)$
	C^{22}_{20}	—	» » »	C^{10} piana $(A^5 B^4)$
Nello spazio S_9	C^{21}_{15}	—	Superficie F^9 a sezioni ellittiche	C^7 piana generale
	C^{24}_{21}	—	» » »	C^8 piana »

(1) Le parentesi $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2)$ ecc. di quest'ultima colonna — e così pure quelle dell'analoga tabella alla fine del § 8 — indicano i punti multipli delle varie curve piane. La prima C^7 avrebbe quindi un punto triplo (A^3) e quattro punti doppi $(B_1^2 \dots B_4^2)$ — la multiplicità essendo sempre data dall'indice superiore —. E da questo si deduce anche facilmente quali serie notevoli di gruppi di punti contengano le varie curve.

§ 7.

Sistemi lineari di quadriche di dimensione $\binom{r-1}{2} - 3$. Loro varietà basi. — Superficie di ordine $r+1$.

19. — Lo stesso teorema del n° 9 ci dà ancora, per $i = 3$:
Se nello spazio S_r $(r \geq 5)$ *si ha un gruppo di* $2r + 3 + x$ $(x \geq 4)$ *punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r + 3$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti, questi punti staranno tutti su di una* $M_3^{r-2} \equiv \infty^1$ *razionale normale di piani (che sarà anche segata in una rigata* R^{r-3} *dall'*S_{r-2} *di* $r-1$ *fra quei punti).*

Si può mostrare anche qui che le quadriche passanti per quei primi $2r+3$ punti dovranno averne comuni di conseguenza non solo x, ma infiniti altri. — Supponiamo infatti che il loro sistema lineare abbia soltanto un numero finito $2r+3+x$ di punti basi. Per questi punti passano certo $\binom{r+2}{2} - 2r - 3$ ossia $\binom{r}{2} - 2$ quadriche indipendenti, mentre per la varietà M_3^{r-2} non ne passano che $\binom{r-2}{2}$; vi sarà dunque un sistema lineare (almeno) ∞^{2r-6} (e quindi, se $r \geq 5$, di dimensione certo > 0) di quadriche passanti per i punti proposti e non per la varietà M_3^{r-2}. Fra queste prendiamone, possibilmente, una che seghi la M_3^{r-2} stessa in una superficie irriduttibile; superficie che risulterà di ordine $2r-4$ e colle sezioni iperellittiche di genere $r-3$, e passerà per quei certi punti. Si seghi ancora questa superficie con una quadrica che non la contenga, ma passi per questi stessi punti; si avrà così una curva di ordine $4r-8$, per la quale passeranno $\binom{r-2}{2} + 2$ quadriche indipendenti. Su questa le quadriche di S_r segheranno una g^{4r-5}_{8r-16}; e obbligando queste stesse quadriche a passare per quei primi $2r+3$ punti, rimarrà una g^{2r-8}_{6r-19} che dovrà avere x punti fissi. Se noi dimostreremo che questa serie (supposta almeno la C^{4r-8} irriduttibile) non può avere più di *tre* punti fissi, potremo dunque concluderne che, nel nostro caso, la superficie o la curva di cui sopra saranno necessariamente riduttibili, e che perciò le quadriche passanti per i punti proposti avranno certo infiniti punti a comune (1). Supposto pertanto che la g^{2r-8}_{6r-19} possa avere anche *tre* punti fissi, basterà mostrare che la g^{2r-8}_{6r-22} ottenuta astraendo da questi ultimi non può averne più alcuno. È questo appunto che ora faremo.

La superficie considerata di ordine $2r-4$ si può infatti rappresentare sul piano col sistema delle curve di un certo ordine $r-1+\mu$ $(\mu \leq r-3)$ aventi a comune un punto $(r-3+\mu)^{plo}$ — che chiameremo P — e poi ancora μ punti doppi infi-

(1) Infatti, se la superficie F^{2r-4} fosse *necessariamente* riduttibile, la cosa sarebbe quasi evidente, perchè in ogni iperpiano — e precisamente sulla sezione determinata da questo nella M_3^{r-2} — vi sarebbe qualche punto comune a tutte quelle quadriche. Che se poi la superficie potesse prendersi irriduttibile, ma non così la curva sua sezione con una quadrica, le sezioni così ottenute (non potendo, come si vede facilmente, spezzarsi in curve di un fascio) avrebbero certo tutta una parte a comune (parte che passerebbe per alcuni almeno fra i punti proposti).

nitamente vicini a questo e $2r-4$ punti semplici (1). La sezione determinata da una quadrica in quella superficie — in particolare dunque la curva considerata di ordine $4r-8$ — si rappresenterà allora con una curva piana di ordine $2r-2+2\mu$ avente il punto P per $(2r-6+2\mu)^{plo}$ e poi ancora μ punti quadrupli (A) infinitamente vicini a questo e $2r-4$ punti doppi (B). Questa curva — che chiameremo C — è di genere $4r-11$, e contiene perciò come serie canonica una g_{8r-24}^{4r-12}; ad ogni g_{6r-22}^{2r-8} su di essa corrisponderà dunque come residua una g_{2r-2}^{2}. Fissato pertanto un gruppo arbitrario G_{2r-2} di quest'ultima serie, potremo segare su C la g_{6r-22}^{2r-8} col sistema lineare delle curve di ordine $2r-5+2\mu$ che passano per il gruppo G_{2r-2} e sono aggiunte a C stessa, hanno cioè il punto P per $(2r-7+2\mu)^{plo}$, i μ punti A per tripli, e passano ancora semplicemente per i $2r-4$ punti B (2). Da una qualunque di queste curve si staccheranno però le μ rette che congiungono P ai singoli punti A; e, facendo astrazione da queste, rimarrà una curva generica Γ di ordine $2r-5+\mu$ avente il punto P per $(2r-7+\mu)^{plo}$, i μ punti A per doppi, e passante ancora semplicemente per i $2r-4$ punti B. E qui possono darsi due casi:

1° La curva generica Γ è irriduttibile;

2° La curva stessa si spezza; e in tal caso, non potendo spezzarsi in curve di un determinato fascio (3), essa conterrà necessariamente una parte fissa. E questa parte può essere costituita soltanto:

a) Da un certo numero di rette uscenti dal punto P;

b) Da una curva di un certo ordine h avente in P la multiplicità $h-1$ (4).

Esaminando separatamente questi diversi casi — cosa che non presenta d'altronde alcuna difficoltà — si trova che ciascuno di essi conduce effettivamente a determinare sulla curva C delle serie g_{6r-22}^{2r-8}, ma prive tutte di punti fissi. Per non dilungarci troppo, ci limitiamo ad accennare in nota il ragionamento (5). — La

---

(1) Il numero μ è la differenza da $r-3$ dell'ordine della *direttrice minima* della superficie in discorso (ordine che è appuuto $\leq r-3$). Cfr. ad es. CASTELNUOVO: *Sulle superficie algebriche ecc.* (" Rend. di Palermo ", IV).

(2) La serie g_{6r-22}^{2r-8} è certo completa, essendo tale la g_{8r-16}^{4r-5} e quindi la g_{8r-19}^{2r-8} (v. pag. prec.).

(3) Perchè se no la g_{6r-22}^{2r-8} risulterebbe composta mediante una serie *lineare*, di ordine ≤ 3 se $r>5$ e ≤ 4 se $r=5$; e di serie così fatte sulla curva C non ne esistono. (Per $r=5$ sarebbe anche una g_4^1 diversa da quella che è segata dalle rette uscenti da P).

(4) Non da una curva di ordine h avente in P la multiplicità $h-2$, perchè se no la g_{6r-22}^{2r-8} dovrebbe risultare composta mediante la g_4^1 segata dal fascio P.

(5) Cominciamo col supporre che la curva generica Γ passante pel gruppo G_{2r-2} sia irriduttibile. — È facile riconoscere che un sistema lineare ∞^d di curve di un ordine qualunque n avente un punto $(n-2)^{plo}$ e μ punti doppi basi non può avere ancora, se $d \geq n-\mu-1$, più di $3(n-\mu)-(d+1)$ punti basi semplici, e non più di $4(n-\mu)-2(d+1)$ se invece $d<n-\mu-1$; ciò segue immediatamente dal fatto che la *serie caratteristica* del sistema (ossia la serie lineare segata sopra una curva generica di questo stesso sistema dalle rimanenti curve di esso) è non speciale nel primo caso, e speciale nel secondo (e quindi — fatta astrazione dai punti fissi — composta mediante la g_2^1). Nel nostro caso si ha $n=2r-5+\mu$, $d=2r-8$; sicchè i punti basi semplici non potranno essere in numero superiore a

$$4(2r-5)-2(2r-7)=4r-6,$$

e siccome tanti appunto ci sono già dati dai $2r-4$ punti B e dal gruppo G_{2r-2}, così è chiaro che la g_{6r-22}^{2r-8} non potrà avere in questo caso nessun punto fisso.

Supponiamo ora che le curve Γ passanti pel gruppo G_{2r-2} contengano tutte una certa retta a

serie g_{6r-19}^{2r-8} sulla curva C^{4r-8} (supposta irriduttibile) non può avere dunque più di *tre* punti fissi, e questo ci permette di concludere:

Se nello spazio S_r $(r \geq 5)$ *si ha un gruppo di* $2r + 7$ *o più punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r + 3$ *qualunque fra essi passino sempre di conseguenza pei rimanenti, queste quadriche avranno certo a comune infiniti punti (e quindi tutta una linea, passante per una parte almeno di quei primi punti).*

Ovvero anche: *Se nello spazio* S_r $(r \geq 5)$ *si hanno* k $(\geq 2r + 4)$ *punti indipendenti e tali che le quadriche passanti per* $2r + 3$ *qualunque fra essi passino sempre pei rimanenti — ma non per altri punti fissi — dovrà essere altresì* $k \leq 2r + 6$ (1).

20. Questi stessi risultati, uniti ad osservazioni precedenti, ci dànno ancora:

Una curva (irriduttibile) appartenente a S_r *e di ordine superiore a* $2r + 4$ *per la quale passino* $\binom{r-1}{2} - 2$ *quadriche indipendenti è sempre contenuta in una superficie comune a queste stesse quadriche.* Si può anche riconoscere facilmente che questa superficie sarà di ordine $\leq r + 1$ (2); e sarà anzi (in generale) di ordine precisamente

---

passante per P. Astraendo da questa, la curva residua variabile (che supponiamo irriduttibile) dovrà essere di ordine $2r - 6 + \mu$, colla multiplicità $2r - 8 + \mu$ nel punto P, e coi soliti μ punti doppi (A) e $2r - 4$ punti semplici (B) basi. Ma il sistema di queste curve non può avere (v. sopra) più di $4r - 10$ punti basi semplici, e d' altra parte i punti B e il gruppo G_{2r-2} ne dànno già complessivamente $4r - 6$; quattro di questi punti (e precisamente del gruppo G_{2r-2}) dovranno dunque stare sulla retta a (ossia il gruppo G_{2r-2} dovrà contenere tutto un gruppo della g_4^1); ma con tutto ciò la serie g_{6r-22}^{2r-8} non potrà avere ancora punti fissi. — Questo ragionamento suppone implicitamente che la retta a non passi per nessuno dei punti A e B; ma se passasse anche per uno di questi, le considerazioni stesse già esposte, con poche modificazioni, si potrebbero ancora ripetere e condurrebbero all'identica conclusione. E un ragionamento analogo si potrebbe anche fare quando dalla curva generica Γ si staccasse un numero maggiore qualsiasi di rette uscenti da P.

Se infine la curva generica Γ contiene una parte fissa di un certo ordine h e colla multiplicità $h - 1$ nel punto P (parte che potrà essere irriduttibile, o anche contenere a sua volta qualche retta uscente da questo stesso punto) è chiaro che, astraendo da tutta questa parte, rimarrà un sistema lineare di curve γ di un certo ordine $k = 2r - 5 + \mu - h$ e colla multiplicità $k - 1$ nel punto P. Questo sistema sarà di dimensione $2r - 8$ e avrà (fuori di P) precisamente

$$\frac{k(k+3)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - 2r + 8 = 2k - 2r + 8$$

punti basi semplici. Ma fra le intersezioni della sua curva generica γ^k colla C ne cadono nel punto P sole $(k-1)(2r - 6 + 2\mu)$; fuori di P dovranno dunque esservene

$$k(2r - 2 + 2\mu) - (k - 1)(2r - 6 + 2\mu) = 4k + 2r - 6 + 2\mu$$

Ammesso perciò (ed è il caso più sfavorevole) che fra quei $2k - 2r + 8$ punti vi siano tutti μ i punti A e che i rimanenti siano anche tutti punti B, è chiaro che da questi stessi punti potranno essere assorbite soltanto

$$4\mu + 2(2k - 2r + 8 - \mu) = 4k - 4r + 16 - 2\mu$$

di quelle intersezioni, e perciò certo $6r - 22$ fra esse cadranno fuori dei punti basi del sistema delle γ^k e saranno quindi *tutte variabili.* Questo caso *più sfavorevole* è anzi il solo che possa presentarsi (quando si voglia ottenere una g_{6r-22}^{2r-8}); ma esso ci conduce ancora a una serie priva di punti fissi.

(1) Il valore massimo $k = 2r + 6$ può essere però raggiunto; e se ne ha un esempio nel gruppo generale delle intersezioni di una quadrica con una curva (normale) di ordine $r + 3$ e genere 3. Così pure, nell'ultimo enunciato del n° 10, può essere anche $k = 2r + 4$.

(2) E quindi di ordine $\leq r + 2$ la linea considerata nel penultimo enunciato del n°. preced.

$= r + 1$, se per la curva proposta non passa un numero di quadriche superiore a quello indicato. — Avvertiamo però che in questo enunciato (e così pure in seguito) si dovrà sempre ritenere $r \geq 6$ —. Possiamo anche aggiungere:

Se un sistema lineare di quadriche di S_r *è di dimensione* $\binom{r-1}{2} - 3$ *e ha infiniti punti basi, questi punti non potranno costituire* (colle stesse riserve del teorema analogo dato al n° 11) *che una curva di ordine* $\leq 2r + 4$ *o una superficie di ordine* $\leq r + 1$.

La prima di queste due proposizioni si applica in particolare (cfr. § 2) alle curve (normali) di genere $\pi - k$ e di ordine superiore a

$$\left\{ \frac{k-l}{3} + 2 \right\} \left\{ r - 1 \right\} + l + 1$$

dove l è il resto della divisione di k per 3.

21. Si vede subito però che dalle superficie di ordine $r + 1$ testè comparse nel nostro studio possiamo escludere senz' altro tutte quelle non normali (per le quali passano appunto, in generale, meno di $\binom{r-1}{2} - 2$ quadriche indipendenti). E, fra quelle normali, si devono anche escludere le rigate ellittiche, per le quali ne passano soltanto $\binom{r-1}{2} - 3$. Non rimangono perciò che le superficie (normali) a sezioni di genere due, cioè:

a) i coni normali di genere due:

b) le superficie non rigate, che sono razionali, ma esistono soltanto per $r \leq 11$ (1).

Nel caso estremo $r = 11$ queste superficie possono rappresentare:

il sistema delle quartiche piane con un punto doppio base;

„ delle quintiche con un punto triplo e un punto doppio;

„ delle sestiche con un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo.

Per $r < 11$ rappresentano invece i sistemi ottenuti da questi coll' aggiunta di uno o più punti basi semplici.

Quindi: *Una curva appartenente a* S_r *e di ordine superiore a* $2r + 4$ *per la quale passino precisamente* $\binom{r-1}{2} - 2$ *quadriche indipendenti — in particolare dunque una curva normale di genere* $\pi - k$ *e di ordine superiore al limite ricordato poc'anzi —, sta sempre sopra un cono normale di genere due, o (se* $r \leq 11$*) su di una superficie razionale normale a sezioni di genere due comune a tutte quelle quadriche.*

Per il cono di genere due possiamo ripetere le stesse considerazioni già fatte per il cono ellittico (n° 13), e dedurne che il caso di una curva giacente su di esso si presenta solo, per così dire, come eccezione. Ne seguirà che le curve di genere $\pi - k$ e di ordine $n \geq \left\{ \frac{k-l}{3} + 2 \right\} \left\{ r - 1 \right\} + l + 2$ dove l ha il noto signi-

---

(1) Più generalmente anzi, una superficie razionale colle sezioni di genere $p > 1$ non può appartenere a uno spazio superiore a S_{3p+5} (e se appartiene a un S_{3p+5} le sue sezioni devono essere curve iperellittiche). Questi risultati — e le loro traduzioni per i sistemi lineari di curve piane — si trovano in diversi lavori del sig. Castelnuovo; cfr. ad es.: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche* („ Rend. di Palermo „, IV); *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* („ Ann. di Mat. „, serie II, t. XVIII); e *Ricerche generali sui sistemi lineari di curve piane* („ Mem. Acc. di Torino „, serie II, vol. XLII).

ficato staranno *in generale,* se $r > 11$, sopra almeno $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti, e anzi precisamente sopra $\binom{r-1}{2}$ tali, ancorchè non abbiano l' ordine superiore a $(k+2)(r-1)+1$.

§ 8.

Sulle curve di genere $\pi - 2$.

22. I risultati ottenuti nel § precedente si applicano in particolare alle curve di genere $\pi - 2$, per le quali, come sappiamo, passano sempre almeno $\binom{r-1}{2} - 2$ quadriche indipendenti (e ne passano anzi *certo* almeno $\binom{r-1}{2} - 1$ se l'ordine è superiore a $3r-2$, e $\binom{r-1}{2}$ se è superiore a $4r-3$; condizioni queste, s' intende, solo *sufficienti*). — Daremo ora un cenno su queste curve di genere $\pi - 2$ (come già si è fatto per quelle di genere $\pi - 1$); ma proponendoci di tenere, nei limiti del possibile, la massima brevità.

E cominciamo colle curve di ordine inferiore a $3r-1$, quindi del tipo C^{2r+i}_{r+2i-1} (supposto anche qui $0 < i < r-1$) (1). Esse contengono per $i \geq 2$ — come residua della g^r_{2r+i} segata dagli iperpiani — una g^{i-2}_{3i-4}, e di ciò avremo a valerci in seguito. Fra queste curve, come si vede facilmente, possono stare sul cono normale ellittico soltanto quelle di ordine $2r+1$ ($m=2$, $s=z=1$) e $2r+2$ ($m=s=2$, $z=0$); e sul cono normale di genere due soltanto quelle di ordine $2r+3$($m=2$, $s=1$, $z=0$)(2).

23. Facendo $i=1$, abbiamo curve del tipo C^{2r+1}_{r+1}, e queste sono certo *non speciali.* Possono stare, come abbiamo veduto or ora, sul cono normale ellittico (3).

Per $i=2$ ($r>3$) abbiamo delle C^{2r+2}_{r+3}, che si possono tutte ottenere come proiezioni delle curve canoniche C^{2r+4}_{r+3} di S_{r+2} rispett. da loro corde. Non hanno in generale punti doppi, perchè se no dovrebbero contenere almeno una g^1_4, il che, in generale appunto, per $r+3>6$ ossia $r>3$ non si verifica.

Per $i=3$ ($r>4$) abbiamo curve C^{2r+3}_{r+5} contenenti una g^1_5. E qui ci converrà distinguere vari casi: (4)

a) Curve con due punti doppi: Stanno tutte sulla rigata R^{r-1} e ne incontrano ogni generatrice in *tre* punti. Solo la C^{13}_{10} di S_5 può incontrare queste stesse rette in *quattro* (anzichè in *tre*) punti.

---

(1) Anche queste curve (come quelle di genere $\pi - 1$ considerate nel § 6) sono tutte normali.

(2) Per il significato di queste varie lettere cfr. n° 13.

(3) Sono di questo tipo anche le curve di ordine $2r+1$ che stanno sul cono razionale normale di ordine $r-1$ e hanno nel suo vertice un punto triplo (v. C. Segre: *Recherches générales etc.*, I; " Math. Ann. ", XXX).

(4) Possiamo supporre che la g^1_5 non abbia punti fissi, perchè se no la C^{2r+3}_{r+5} si potrebbe ottenere come proiezione di una C^{2r+4}_{r+5} di S_{r+1} (che è di genere $\pi - 1$, e quindi da noi già studiata). Questo caso si presenta anche quando la C^{2r+3} sta sul cono normale di genere due.

b) Curve con un (solo) punto doppio: Per ciascuno dei valori $r = 5, 6, 7, 8, 9$, abbiamo una C^{2r+3}_{r+5} contenuta in una F^r razionale a sezioni ellittiche (di prima specie, per $r = 8$); e di più, per $r = 6$, una C^{15}_{11} che sta sulla rigata R^5 e ne incontra ogni generatrice in 4 punti (1).

c) Curve prive di punti doppi: In queste curve i gruppi della g^1_5 non sono mai collineari; possono però stare in piani per $r \leq 11$ (e in questo caso vi sono precisamente $11 - r$ gruppi con una terna di punti collineari). La nostra curva è allora contenuta in una superficie di ordine $r + 1$ comune a tutte le quadriche passanti per essa; e la stessa superficie sarà anche luogo delle coniche determinate dai singoli gruppi della g^1_5, delle quali $11 - r$ si spezzeranno (naturalmente) in coppie di rette (2). — Infine i singoli gruppi della serie g^1_5 possono appartenere a spazi S_3 (non però a S_4). Applicando a questo caso un ragionamento analogo a quello già tenuto in altra occasione (v. n° 16), si trova che queste curve stanno allora (in generale) in una superficie contenente una ∞^1 razionale di quartiche ellittiche, e di ordine non superiore a $\frac{12(r-1)}{5}$.

24. Sia ora $i = 4$; $r > 5$. Avremo curve del tipo C^{2r+4}_{r+7}; e queste contengono una g^2_8, che possiamo anche supporre priva di punti fissi.

a) Questa serie g^2_8 può essere composta:

α) *Con una serie ∞^1 di coppie di punti di genere* $k \leq 3$. Questo è possibile solo per $k = 3$; e si ha così una curva di ordine $2r + 4$ (priva di punti doppi) che è l' intersezione generale di un cono normale di ordine $r + 2$ e genere 3 con una quadrica (non passante pel suo vertice);

β) *Con una serie lineare* g^1_4. I gruppi di questa possono essere collineari nei tre casi di $r = 6, 7, 8$; e troviamo così delle curve contenute rispett. nelle rigate razionali normali R^5, R^6, R^7. In ogni altro caso i gruppi della g^1_4 dovranno appartenere ad altrettanti piani; e la curva C^{2r+4}_{r+7} starà su di una superficie razionale normale di ordine (in generale) $\frac{3r-2}{2}$ o $\frac{3r-3}{2}$, a sezioni iperellittiche di genere $\frac{r}{2}$ o $\frac{r-1}{2}$; e si potrà segare su questa stessa superficie con una quadrica condotta per $\frac{r-6}{2}$ o $\frac{r-7}{2}$ sue coniche. L'ordine della superficie, il genere delle sue sezioni, e il numero di queste coniche possono però abbassarsi fino ai limiti rispettivi $r + 2$, 3, 0, e in quest'ultimo caso la superficie può anche essere un cono (iperellittico) — il che rientra nel caso α) —. Per $r \leq 11$ l'ordine della superficie può anche ridursi a $r + 1$, e può ridursi anche ad r per $r \leq 9$, e a *quattro* per $r = 5$; in questi casi però la superficie stessa risulta comune a tutte le quadriche passanti per la curva proposta.

---

(1) Quest'ultima curva — e così pure la C^{13}_{10} di S_5 di cui all'al. *a)* — contengono evidentemente una g^1_4 e quindi infinite g^1_5 con un punto fisso; ma contengono pure rispett. *due* ed *una* g^1_5 prive di punti così fatti.

(2) E questo va d'accordo perfettamente con un risultato già ottenuto dal Castelnuovo (*Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche*, n° 5).

b) Se la g_8^2 *non è composta (e non ha punti fissi) la* C_{r+7}^{2r+4} *sarà riferibile a una* C^8 *piana*. Questo esige naturalmente $r+7 \leq 21$, ossia $r \leq 14$; e si hanno così vari casi semplicissimi, che saranno poi enumerati, alla fine di questo §, nella relativa tabella.

25. Per $4 < i < r-1$, sappiamo già che la curva C_{r+2i-1}^{2r+i} deve stare su di una superficie (razionale) di ordine $r-1$, r, o $r+1$ e colle sezioni di genere rispett. 0, 1, 2, comune a tutte le quadriche che la contengono. Si potrebbe però ritrovare questo per altra via e fare nel tempo stesso un'enumerazione dei vari casi che queste curve possono presentare, partendo dalla considerazione della serie g_{3i-4}^{i-2} su di esse. Basterebbe perciò osservare che questa serie non può essere in alcun modo composta (e ciò per ragioni analoghe a quelle già esposte al n° 17 per la serie g_{3i-2}^{i-1}); ma può essere costituita da una g_{3i-6}^{i-2}, composta con una g_3^1, più due punti fissi, o anche da una g_{3i-5}^{i-2} non composta e alla quale si sia aggiunto un punto fisso. Esclusi questi due casi che dànno luogo a curve proiezioni di altre già studiate, la C_{r+2i-1}^{2r+i} dovrà sempre essere riferibile a una C^{3i-4} (semplice) di S_{i-2}. E questo per $i=5$ o $i=6$ richiede $r \leq 11$; per $i>6$, $r \leq i+4$. — Lo studio ulteriore di queste curve non presenta del resto alcuna difficoltà, e perciò appunto ci limitiamo ad enumerarle alla fine di questo §.

26. Le curve di S_r di genere $\pi-2$ e di ordine $n \geq 3r-1$ stanno, come già si è detto, sopra almeno $\binom{r-1}{2}-1$ quadriche indipendenti, e quindi su di una superficie (normale) di ordine r o $r-1$ comune a tutte queste quadriche (almeno se $r>3$). E questo varrà in particolare per le curve di ordine $=3r-1$. Del resto, se anche non lo sapessimo, basterebbe osservare che queste curve contengono tutte (come residua della g_{3r-1}^r segata dagli iperpiani) una g_{3r-5}^{r-2} che non può essere in alcun modo composta. Prescindendo perciò dal caso in cui questa serie abbia un punto fisso — e la nostra curva sia quindi proiezione di una C_{3r-2}^{3r} di S_{r+1} (di genere π) — è chiaro che la C_{3r-2}^{3r-1} dovrà sempre essere riferibile a una C^{3r-5} (semplice) di S_{r-2}. Questa curva (che è pure di genere $\pi-2$, e corrisponde precisamente al tipo C_{3k+4}^{3k+1} di S_k) sta sempre sulla rigata razionale normale (R^{r-3}) del suo spazio, — o anche, per $r=7$, sulla superficie di Veronese (1) —. Da questo e dalle note proprietà delle curve tracciate sulle rigate razionali normali (v. § 3) si può dedurre senza alcuna difficoltà che:

In ogni spazio S_r esiste una C_{3r}^{3r-1} che sta (per $r>3$) sulla rigata R^{r-1}, e ne incontra ogni generatrice in *tre* o in *quattro* punti (o, in casi particolari, anche in *cinque*);

Nello spazio S_5 esiste anche una C_{13}^{14} (con *due* punti doppi) contenuta in una superficie di Veronese;

E infine, per tutti i valori di r inferiori a 9, si hanno ancora delle curve C_{3r-2}^{3r-1} giacenti sulle superficie razionali di ordine r a sezioni ellittiche (di 1ª specie per $r=8$).

---

(1) Questo, per ora, lo ammettiamo, riservandoci di dimostrarlo fra poco (v. nⁱ 28 e 29).

27. Veniamo ora alle curve del tipo C^{3r}_{3r+1}. Quelle fra esse che stanno sopra $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti saranno pur contenute (se $r>2$) in una rigata R^{r-1}, della quale potranno incontrare ogni generatrice in *tre* o in *quattro* punti (e nei casi di $r=4$ e $r=5$ anche in *cinque* punti). Per altri particolari rimandiamo al quadro posto alla fine del §. Sulla superficie di Veronese invece la C^{3r}_{3r+1} (C^{15}_{16} per $r=5$) non può stare.

La stessa curva può stare però sul cono normale ellittico, incontrandone ogni generatrice in *tre* punti (distinti dal vertice). Una tal curva sarà sempre priva di punti doppi, e si potrà ottenere (e lo si vede facilmente) come intersezione di questo cono con una varietà cubica (M^3_{r-1}) non tangente ad esso in alcun punto e non passante pel suo vertice.

Infine, per $r \leq 9$, le curve C^{3r}_{3r+1} possono anche stare su di una superficie razionale normale a sezioni ellittiche (di prima e seconda specie per $r=8$), e sono allora precisamente l'intersezione (generale) di questa stessa superficie con una varietà cubica (M^3_{r-1}) di S_r (cfr. anche la tabella in fine del §) (1).

---

(1) La serie lineare g^r_{3r} segata dagli iperpiani sopra una C^{3r}_{3r+1} di S_r ha per residua rispetto alla serie canonica (g^{3r}_{6r}) un'altra g^r_{3r}, — che può in particolare coincidere con essa —. Si dice in tal caso che questa serie è *autoresidua*, e l'insieme di due suoi gruppi qualunque è allora sempre un gruppo della serie canonica. Questa particolarità si presenta certo per tutte le C^{3r}_{3r+1} che stanno sopra sole $\binom{r-1}{2}-1$ quadriche indipendenti, perchè su queste curve la g^{3r}_{6r} canonica si può appunto ritenere segata dal sistema di tutte le quadriche di S_r. Invece sulle C^{3r}_{3r+1} che stanno sopra $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti esistono due g^r_{3r} distinte e residue l'una dell'altra (come si vede subito ricorrendo p. e. alle rappresentazioni piane che dalle curve stesse si possono ottenere con successive proiezioni); e la g^{3r-1}_{6r} segata dalle quadriche è quindi una serie non speciale (completa). — Il signor Castelnuovo, nella Nota (II): *Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie algebrica* (" Rendiconti Ist. Lombardo ", serie II, vol. XXIV) ha determinato *quali sono le curve di genere* 3r *che contengono una* g^r_{3r-1} *autoresidua*. Questo corrispondeva al caso limite inferiore, dovendo l'ordine n di ogni g^r_n autoresidua essere $\geq 3r-1$ (e quindi il genere ($=n+1$) della curva $\geq 3r$). Noi possiamo ora fare la determinazione analoga per il caso successivo ($n=3r$); e, tenuto conto altresì del fatto che una g^r_{3r} autoresidua non può essere in alcun modo composta (non con una g^1_3 lineare, se no la curva starebbe sulla rigata R^{r-1}; non con una serie di coppie di punti, perchè la formola del Segre condurrebbe a un risultato assurdo) e non può nemmeno avere punti fissi, concluderemo:

Qualsiasi curva di genere $3r+1$ *che contenga una* g^r_{3r} *autoresidua è riferibile:*

Per $r=2$: *A una sestica piana con tre punti doppi posti in linea retta* (poichè due rette qualunque del piano devono poter far parte, insieme, di una cubica aggiunta a questa sestica, è chiaro che non sono qui possibili altri casi);

Per $r>2$: *All'intersezione generale di una superficie normale di ordine* r *a sezioni ellittiche con una varietà cubica di dimensione* $r-1$. E questa superficie sappiamo pure che è certo un cono se $r>9$; e solo per $r \leq 9$ può essere non rigata e razionale.

In particolare quindi: *Ogni* g^r_{3r} *autoresidua in cui sia* $r>9$ *deve contenere una* g^{r-1}_{3r} *composta con una serie* ∞^1 *ellittica di terne di punti*, e perciò ogni curva contenente una tal g^r_{3r} deve potersi rappresentare con una curva ellittica C^r di S_{r-1} *tripla* (da contarsi cioè tre volte). Il fatto che quest'ultima curva ammette r^2 spazi S_{r-2} iperosculatori si traduce p. e. in quest'altro: *Nella serie* g^{r-1}_{3r} *vi sono* r^2 *gruppi costituiti rispett. da altrettanti gruppi della* g^1_3 *ellittica contati ciascuno* r *volte.*

28. Dimostreremo ora che le curve di genere $\pi - 2$ appartenenti a S_r, quando l'ordine loro n è superiore a $3r$ stanno sempre sulla rigata R^{r-1} o sulla superficie di Veronese.

Queste curve, per $n > 3r$, non possono stare infatti sul cono ellittico; già la curva di ordine $3r + 1$ (passante semplicemente pel vertice di tale cono) è di genere soltanto $\pi - 3$, e le successive sarebbero di genere ancora inferiore a $\pi - 3$. Rimane dunque solo da verificare se, per $r \leq 9$, queste stesse curve possano stare sulle superficie razionali normali di ordine r.

E si vede facilmente di no. Infatti, indicando con m l'ordine della curva piana cui verrebbe riferita la C^n nella solita rappresentazione della superficie, e supposto che questa γ^m abbia negli $i = 9 - r$ punti fondamentali (escludiamo la F^8 di seconda specie) rispett. le multiplicità $v_1, v_2, \ldots, v_i$, sarà $n = 3m - \Sigma v$; e perciò, se vogliamo che il genere p della curva C^n sia precisamente uguale a $\pi - k$, dovrà essere

$$p \geq \frac{(3m - \Sigma v - r)\ (3m - \Sigma v - 1)}{2(r-1)} - k \ (1).$$

Ma d'altra parte abbiamo pure

$$p \leq \frac{(m-1)\ (m-2)}{2} - \Sigma \binom{v}{2}.$$

Quindi, *a fortiori:*

$$\frac{(3m - \Sigma v - r)\ (3m - \Sigma v - 1)}{2(r-1)} - k \leq \binom{m-1}{2} - \Sigma \binom{v}{2}.$$

Risolvendo ora questa disuguaglianza rispetto a m, e determinando (il che non offre difficoltà) il limite superiore del secondo membro, si trova alla fine

$$m \leq 3 + 4\sqrt{k+1}.$$

Ossia: *Se sopra una superficie razionale normale a sezioni ellittiche (esclusa la* F^8 *di* 2^a *specie) si ha una curva di genere* $\pi - k$, *l'ordine* m *della sua rappresentante piana nella solita rappresentazione della superficie non può superare il limite* $3 + 4\sqrt{k+1}$.

In particolare, *le curve di genere* $\pi - 2$ *devono avere rappresentanti piane di ordine non superiore a* 9 (2).

Ciò posto, ne segue senz'altro la verità del nostro asserto, perchè già le curve C^{3r+1}_{3r+4} (ad es. la C^{25}_{28} di S_8) — e *a fortiori* le successive — dovrebbero avere le rappresentanti piane di ordine ≥ 10.

---

(1) La frazione che compare al secondo membro è infatti il valor *minimo* che può avere il genere π corrispondente all'ordine $n = 3m - \Sigma v$ (e questo valore lo si ha appunto quando $\frac{n-r}{r-1}$ è intero e quindi $= \chi$).

(2) Per le curve di genere $\pi - 1$ si avrebbe $m \leq 8$; e questo è confermato dai risultati ottenuti nel § 6.

Un ragionamento affatto analogo si potrebbe applicare alla F^8 di 2ª specie; ma per brevità lo omettiamo.

29. Possiamo però anche giungere allo stesso risultato per altra via, mediante considerazioni sopra serie lineari. Supponiamo infatti che per una curva $C^{3r+i}_{3(r+i)+1}$ (e sono di questo tipo appunto — per $0 < i < r-2$ — quelle che ora dobbiamo considerare) (1) passino soltanto $\binom{r-1}{2} - 1$ quadriche indipendenti. Il sistema di tutte le quadriche di S_r segherà allora sopra questa curva una g^{3r}_{6r+2i}; e siccome la serie canonica è in questo caso una $g^{3(r+i)}_{6(r+i)}$, è chiaro che la stessa curva dovrà anche contenere, come residua di quella prima serie, una g^i_{4i}. Faremo vedere che una tal serie essa non può contenerla, a meno di non stare sulla rigata R^{r-1}, — il che sarebbe contrario alle nostre ipotesi —.

La curva proposta non potrà infatti riferirsi a una C^{4i} di S_i, perchè quest'ultima avrebbe per genere massimo 21 se $i=2$, 25 se $i=3$, e $6(i+1)$ se $i \geq 4$; dovrebbero dunque verificarsi in questi casi rispett. le relazioni

$$\begin{aligned} 3r+7 &\leq 21 \quad \text{ossia} \quad r \leq 4, \quad \text{se } i=2; \\ 3r+10 &\leq 25 \quad \text{„} \quad r \leq 5, \quad \text{se } i=3; \\ 3r+3i+1 &\leq 6i+6 \quad \text{„} \quad r \leq i+1, \quad \text{se } i \geq 4; \end{aligned}$$

le quali sono invece tutte incompatibili coll'ipotesi fatta $i < r-2$ ossia $r > i+2$.

La g^i_{4i} non può nemmeno essere composta mediante una serie ∞^1 di coppie di punti (di genere $\leq i+1$), nè mediante una serie di terne di punti (se i è multiplo di tre), nè infine con una g^1_4 (lineare) i cui gruppi appartengano ad altrettanti piani, perchè sempre l'applicazione della formola del sig. Segre condurrebbe ad un risultato assurdo (si troverebbe cioè che la nostra curva, che abbiamo supposta appartenere ad S_r, dovrebbe stare sopra una rigata di ordine $< r-1$, o su di una M_3 di ordine $< r-2$). Nè la g^i_{4i} può avere qualche punto fisso, perchè, se ne avesse ad es. un certo numero k, astraendo da questi, rimarrebbe una g^i_{4i-k}, che dovrebbe essere rappresentabile mediante una C^{4i-k} di S_i, oppure composta mediante una serie ∞^1 di coppie o terne di punti; ipotesi tutte che conducono agli stessi risultati assurdi di prima.

Rimane dunque la sola ipotesi che la g^i_{4i} sia composta mediante una g^1_4 coi gruppi collineari. Ma allora le rette contenenti questi singoli gruppi dovrebbero formare una rigata razionale normale (di ordine $r-1$), e perciò la curva dovrebbe stare sopra $\binom{r-1}{2}$ quadriche indipendenti, mentre abbiamo supposto che stesse sopra sole $\binom{r-1}{2} - 1$. È dunque in ogni caso assurda quest'ultima ipotesi; e possiamo perciò asserire che:

Ogni curva appartenente a S_r $(r > 2)$ *la quale sia di genere* $\pi - 2$ *e di ordine* $n > 3r$ *sta su di una superficie razionale normale di ordine* $r-1$ (comune a tutte le quadriche che la contengono).

---

(1) Se fosse $i \geq r-2$, l'ordine della nostra curva risulterebbe $\geq 4r-2$, e in questo caso sappiamo già che la proposizione che qui vogliamo dimostrare è vera.

30. I risultati ottenuti sulle curve (di S_r) di genere $\pi - 2$ e di ordine $\geq 2r + 1$ ma $\leq 3r$, su quelle curve cioè di genere $\pi - 2$ e ordine $> 2r$ che non stanno *necessariamente* su di una F^{r-1}, possono riassumersi così:

a) Curve del tipo C^{2r+i}_{r+2i-1} $(0 < i < r - 1)$:

Per ogni valore di r *e di* i *esiste:*

Una C^{2r+i}_{r+2i-1} con *due* punti doppi, che sta sulla rigata R^{r-1} e ne incontra ogni generatrice in *tre* punti;

Per ogni valore di r *abbiamo ancora:*

Una C^{2r+1}_{r+1} (non speciale) che può presentare diversi casi, e può anche in particolare esser contenuta in un cono ellittico di ordine r. In questo caso avrebbe un punto doppio (non però nel vertice del cono);

Una C^{2r+2}_{r+3}, che è sempre proiezione di una C^{2r+4} canonica di S_{r+2}, e può anche stare sul cono ellittico di ordine r (pel cui vertice deve allora passare doppiamente);

Una C^{2r+3}_{r+5} priva di punti doppi e contenente una g^1_5. Questa curva può essere contenuta in un cono normale di genere *due;*

Una C^{2r+4}_{r+7} anche priva di punti doppi e contenente una g^1_4. Quest'ultima curva sta su di una superficie razionale normale a sezioni iperellittiche di genere $\leq \frac{r}{2}$; superficie che può anche essere sostituita da un cono normale iperellittico di genere *tre* (e ordine $r + 1$);

Una C^{3r-4}_{3r-9} priva di punti doppi
Una C^{3r-3}_{3r-7} con *un* punto doppio
Una C^{3r-2}_{3r-5} con *due* punti doppi
} e contenuta in una rigata R^{r-1} di cui incontra ogni generatrice in *quattro* punti.

La prima di queste curve è riferibile (in generale) a una C^r piana con punto $(r - 4)^{plo}$ se r è pari, e a una C^{r+1} con punto $(r - 3)^{plo}$ e un punto triplo se r è dispari; la seconda pure a una C^{r+1} con punto $(r - 3)^{plo}$ e un punto doppio; la terza a una C^{r+2} con punto $(r - 2)^{plo}$ e due punti doppi.

Infine *per* r ≤ 11 *si hanno ancora le curve seguenti:*

Indicazione delle curve		Numero dei punti doppi	Superficie in cui le curve sono contenute	Curve piane cui sono riferibili
Nello spazio S_5	C^{13}_{10}	—	Superficie F^5 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B_1^2 B_2^2)$
	C^{13}_{10}	1	„ „ „ „	„ „ $(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2 A_5^2)$
	C^{13}_{10}	—	„ F^6 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5 A_2^5 B_1^2 B_2^2 \ldots B_6^2)$ (1)
Nello spazio S_6	C^{15}_{11}	—	Superficie F^6 a sezioni ellittiche	C^7 piana $(A^3 B^2)$
	C^{15}_{11}	1	„ „ „ „	„ „ $(A_1^2 A_2^2 A_3^2 A_4^2)$
	C^{15}_{11}	—	„ F^7 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5 A_2^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2 B_5^2)$
	C^{16}_{13}	—	„ F^6 „ ellittiche	C^7 „ $(A_1^2 A_2^2)$
	C^{16}_{13}	1	„ „ „ „	C^8 „ $(A_1^3 A_2^3 B_1^2 B_2^2)$
	C^{16}_{13}	—	„ F^7 „ di genere *due*	„ „ $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2 B_5^2)$
	C^{16}_{13}	—	„ F^8 „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2 A_2^2 \ldots A_8^2)$
Nello spazio S_7	C^{17}_{12}	—	Superficie F^7 a sezioni ellittiche	C^7 piana (A^3)
	C^{17}_{12}	—	„ „ „ „	C^8 „ $(A^4 B^3)$
	C^{17}_{12}	1	„ „ „ „	C^7 „ $(A_1^2 A_2^2 A_3^2)$
	C^{17}_{12}	—	„ F^8 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5 A_2^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2)$
	C^{18}_{14}	—	„ F^7 „ ellittiche	C^7 „ (A^2)
	C^{18}_{14}	1	„ „ „ „	C^8 „ $(A_1^3 A_2^3 B^2)$
	C^{18}_{14}	—	„ F^8 „ di genere *due*	„ „ $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2)$
	C^{18}_{14}	—	„ F^9 „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2 A_2^2 \ldots A_7^2)$
	C^{19}_{16}	—	„ F^7 „ ellittiche	C^9 „ $(A_1^4 A_2^4)$
	C^{19}_{16}	1	„ „ „ „	C^8 „ $(A^3 B_1^2 B_2^2)$
	C^{19}_{14}	—	„ F^8 „ di genere *due*	C^9 „ $(A^4 B^3 C_1^2 C_2^2 C_3^2)$
Nello spazio S_8	C^{19}_{13}	1	Superficie F^8 a sez. ell. di 1ª specie	C^7 piana $(A_1^2 A_2^2)$
	C^{19}_{13}	—	„ F^9 „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5 A_2^5 B_1^2 B_2^2 B_3^2)$
	C^{20}_{15}	—	„ F^8 „ ell. di 1ª specie	C^7 „ generale
	C^{20}_{15}	1	„ F^8 „ „ 2ª „	C^8 „ $(A_1^3 A_2^3)$
	C^{20}_{15}	—	„ F^9 „ di genere *due*	„ „ $(A^3 B_1^2 B_2^2 B_3^2)$
	C^{20}_{15}	—	„ F^{10} „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2 A_2^2 \ldots A_6^2)$
	C^{21}_{17}	1	„ F^8 „ ell. di 1ª specie	„ „ $(A^3 B^2)$
	C^{21}_{17}	—	„ F^9 „ di genere *due*	C^9 „ $(A^4 B^3 C_1^2 C_2^2)$
	C^{22}_{19}	1	„ F^8 „ ell. di 1ª specie	C^8 „ $(A_1^2 A_2^2)$
	C^{22}_{19}	1	„ „ „ „ 2ª „	C^9 „ $(A^4 B^3)$
	C^{22}_{19}	—	„ F^9 „ di genere *due*	„ „ $(A^4 B_1^2 B_2^2 B_3^2)$

(1) Si noti (per questa curva, e per le analoghe che si troveranno più avanti) che i due punti quintupli potrebbero essere (in particolare) infinitamente vicini. Se non lo sono, l'ordine di questa rappresentante piana si può abbassare (per $r \leq 10$) con una trasformazione Cremoniana (e la superficie F^{r+1} (qui F^6) si potrà certo rappresentare con un sistema di quartiche piane).

Indicazione delle curve		Numero dei punti doppi	Superficie in cui le curve sono contenute	Curve piane cui sono riferibili
Nello spazio S_9	C^{21}_{14}	1	Superficie F^9 a sezioni ellittiche	C^7 piana (A^2)
	C^{21}_{14}	—	„ F^{10} „ di genere *due*	C^{10} „ $(A_1^5\, A_2^5\, B_1^2\, B_2^2)$
	C^{22}_{16}	—	„ „ „ „ „	C^8 „ $(A^3\, B_1^2\, B_2^2)$
	C^{22}_{16}	—	„ F^{11} „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2 \ldots A_5^2)$
	C^{23}_{18}	—	„ F^{10} „ „ *due*	C^9 „ $(A^4\, B^3\, C^2)$
	C^{24}_{20}	1	„ F^9 „ ellittiche	C^8 „ (A^2)
	C^{24}_{20}	—	„ F^{10} „ di genere *due*	C^9 „ $(A^4\, B_1^2\, B_2^2)$
	C^{25}_{22}	—	„ „ „ „	C^{10} „ $(A^5\, B^3\, C^2)$
Nello spazio S_{10}	C^{23}_{15}	—	Superficie F^{11} a sezioni di gen. *due*	C^{10} piana $(A_1^5\, A_2^5\, B^2)$
	C^{24}_{17}	—	„ „ „ „ „	C^8 „ $(A^3\, B^2)$
	C^{24}_{17}	—	„ F^{12} „ „ *tre*	„ „ $(A_1^2\, A_2^2\, A_3^2\, A_4^2)$
	C^{25}_{19}	—	„ F^{11} „ „ *due*	C^9 „ $(A^4\, B^3)$
	C^{26}_{21}	—	„ „ „ „ „	„ „ $(A^4\, B^2)$
	C^{27}_{23}	—	„ „ „ „ „	C^{10} „ $(A^5\, B^3)$
	C^{28}_{25}	—	„ „ „ „ „	C^{10} „ $(A^5\, B^2)$
Nello spazio S_{11}	C^{23}_{16}	—	Superficie F^{12} a sez. di gen. *due* di 1ª o 2ª specie (1)	C^{10} „ $(A_1^5\, A_2^5)$
	C^{26}_{18}	—	„ „ „ „ 2ª „	C^8 „ (A^3)
	C^{26}_{18}	—	„ F^{13} „ gen. *tre*	„ „ $(A_1^2\, A_2^2\, A_3^2)$
	C^{27}_{20}	—	„ F^{12} „ „ *due* 1ª specie	C^{10} „ $(A^5\, B^4)$
	C^{28}_{22}	—	„ „ „ „ „ 2ª „	C^9 „ (A^4)
	C^{29}_{24}	—	„ „ „ „ „ 1ª „	C^{11} „ $(A^6\, B^4)$
	C^{30}_{26}	—	„ „ „ „ „ 2ª „	C^{10} „ (A^5)
	C^{31}_{28}	—	„ „ „ „ „ 1ª „	C^{12} „ $(A^7\, B^4)$

e negli spazi S_{12}, S_{13} e S_{14} esistono ancora rispett. una C^{28}_{19}, una C^{30}_{20} e una C^{32}_{21} contenute in superficie razionali normali (di ordini 14, 15, 16) a sezioni di genere tre (di *prima* specie) (2) e riferibili a una C^8 piana con 2, 1 e 0 punti doppi.

---

(1) Per la distinzione delle superficie a sezioni di genere due (e, più generalmente, a sezioni iperellittiche) in *specie*, cfr. il lav. cit. del Castelnuovo (“ Rend. di Palermo ”, IV). La nostra superficie F^{12} si dirà di *prima specie* se non ammette direttrici di ordine < 3 (ma di direttrici cubiche ne ammetterà allora un fascio); e di *seconda specie* se ammette una direttrice conica o rettilinea, o se le sue ∞^1 coniche passano tutte per uno stesso punto (che sarà triplo per essa). In questo primo caso la F^{12} può essere tanto di prima quanto di seconda specie (con direttrice rettilinea); in seguito, dove è detto di *seconda specie*, deve intendersi *con direttrice conica.*

(2) Cfr. Castelnuovo: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere tre* (“ Atti di Torino ”, XXV).

b) Curve di ordine 3r — 1 *e genere* 3r — 2:

Queste curve, per ogni valore di r, possono stare sulla rigata R^{r-1}, incontrandone ogni generatrice in *quattro* punti. Hanno in tal caso *due* punti doppi, e sono riferibili a una C^{r+3} piana con un punto $(r-1)^{plo}$ e *due* punti doppi. Della rigata R^{r-1} esse possono però incontrare ogni generatrice anche in soli *tre* punti; hanno allora *un* punto doppio, e sono proiezioni di una C^{3r} di S_{r+1} — intersezione della rigata R^r di questo stesso spazio con una varietà cubica (M_r^3).

Abbiamo poi ancora:

1. Una C_{10}^{11} di S_4 contenuta in una rigata R^3 e incontrata dalle generatrici di questa in 5 punti. Non ha punti doppi ed è riferibile a una sestica piana generale;
2. Una C_{13}^{14} di S_5 con *due* punti doppi e contenuta in una F^4 di Veronese. È riferibile a una C^7 piana con *due* punti doppi;
3. Infine, per $r \leq 8$, una C_{3r-2}^{3r-1} contenuta in una F^r a sezioni ellittiche (di prima specie per $r = 8$) e riferibile a una C^9 piana con punto quadruplo e $8 - r$ punti tripli (1).

c) Curve di ordine 3r *e genere* 3r + 1:

Queste curve, *per ogni valore di* r, possono essere contenute:

1. In una rigata R^{r-1}, della quale incontrino ogni generatrice in *quattro* punti. Hanno allora *due* punti doppi e sono riferibili a una C^{r+4} piana con un punto r^{plo} e *due* punti doppi (2). Della stessa rigata R^{r-1} esse possono anche incontrare le varie generatrici in soli *tre* punti; non hanno allora punti doppi, e si possono ottenere (per $r \geq 6$) come intersezioni di questa rigata con una varietà di quarto ordine (M_{r-1}^4) passante per una sua direttrice di ordine $r - 4$;
2. In un cono (normale) ellittico di ordine r; e sono allora l'intersezione di questo cono con una M_{r-1}^3 non passante pel suo vertice.

Per $r \leq 9$ le stesse curve possono anche essere intersezioni di una F^r a sezioni ellittiche con una M_{r-1}^3. Questa proprietà ne dà anche immediatamente le rappresentazioni piane (per questo caso).

E infine per $r = 4$ e $r = 5$ le curve C_{13}^{12} e C_{16}^{15} contenute rispett. in una rigata R^3 o R^4 possono anche incontrare ogni generatrice di questa stessa rigata in 5 punti. La C_{13}^{12} di S^4 ha allora *un* (solo) punto doppio, e la C_{16}^{15} di S_5 non ne ha alcuno (3) (4).

---

(1) Nel caso di $r = 7$ questa rappresentazione non è però sempre possibile; quando non lo sia, la curva C_{19}^{20} si potrà invece riferire a una C^8 piana con *due* punti doppi. E anche per $r < 7$ potrebbe la C_{3r-2}^{3r-1} riferirsi a una C^8 piana con $7 - r$ punti tripli e due punti doppi; ma questa rappresentazione non differirebbe allora sostanzialmente dalla precedente.

(2) Per $r = 3$ si avrebbe una C_{10}^{9} contenuta in una quadrica, e che dalle generatrici di uno dei due sistemi di questa sarebbe incontrata effettivamente in *quattro* punti. Da quelle dell'altro sistema essa sarebbe però incontrata in *cinque* punti.

(3) Questa C_{16}^{15} di S_5 è riferibile alla curva di 10° ordine intersezione generale di una quadrica del nostro spazio con una superficie di quinto ordine (e anzi da una generatrice qualunque della rigata R^4 che la contiene essa si proietta precisamente in una curva così fatta).

(4) I risultati ottenuti in questo § risolvono completamente, nel loro insieme, la questione

Applicazione dei risultati precedenti alle rigate e congruenze di rette.

31. I risultati ottenuti in questo lavoro si riferiscono, in gran parte almeno, a curve e a superficie per le quali passa un sistema lineare di quadriche (in generale non tutte degeneri) di nota dimensione; le proprietà da noi stabilite potranno dunque tradursi facilmente in risultati di *Geometria della retta* (1). Rappresentandoci infatti — nel caso di $r = 5$ — una qualsiasi Q (purchè non degenere) fra quelle quadriche coll'insieme delle rette dello spazio S_3, è chiaro che ogni altra quadrica del sistema considerato determinerà nella prima una sezione rappresentata a sua volta da un *complesso quadratico;* e alla nostra curva o superficie corrisponderà (nella quadrica delle rette) una rigata o una congruenza di rette comune a tutti questi complessi (2).

---

della *determinazione di tutte le curve di genere* $\pi - 2$ (*e di ordine* $> 2r$) *dei vari spazi* (almeno per $r \geq 3$); — e l'analoga determinazione per le curve di genere $\pi - 1$ era a sua volta contenuta nei risultati che abbiamo esposti nel § 6. — Si potrebbe ora domandare di estendere queste ricerche alle curve di genere $\pi - 3$, o (più generalmente) di genere $\pi - k$ (almeno per k non superiore a un qualche limite). Premesso che non è mia intenzione di occuparmi per ora di questo argomento, voglio però aggiungere che l'unica difficoltà forse che così facendo si incontrerebbe sarebbe quella di dare per i sistemi lineari di quadriche di dimensione $\leq \binom{r-1}{2} - 4$ (in S_r) un teorema analogo a quelli che ai n[i] 11 e 20 si sono dati rispett. per i sistemi di dimensione $\binom{r-1}{2} - 2$ e $\binom{r-1}{2} - 3$. Questo teorema dovrebbe scaturire probabilmente da quello (più generale) del § 4; ma dalle considerazioni di cui abbiamo dovuto valerci in sul principio dei §§ 5 e 7 non appare ancora (è un fatto) nessun concetto che si possa generalizzare e applicare ai casi successivi. Molte ragioni mi indurrebbero a credere che quel massimo valore di n a cui ho accennato nel § 4 (n° 8) sia eguale precisamente a $2(r - 1 + i)$ — almeno per $i \leq r - 3$ —, e questo è ormai assodato per i casi di $i = 1, 2, 3$; per i casi successivi, è una questione che merita di essere studiata.

Quello stesso teorema non sarebbe però applicabile alle curve di genere $\pi - k$ che quando l'ordine loro fosse $> 2(r + k)$. Per le curve di ordine $\leq 2(r + k)$ si potrebbero fare delle ricerche analoghe a quelle accennate nei casi di $k = 1$ (n[i] 15 e 16) e $k = 2$ (n[i] 23-25), partendo cioè dalla considerazione di qualche serie lineare sopra le curve stesse. È notevole forse in particolar modo la curva $C^{2(r+k)}_{r+3k+1}$ (che è appunto di genere $\pi - k$ per $2k < r - 1$, ossia $k \leq \frac{r-2}{2}$). Essa contiene una g^k_{4k}, che può essere composta con una serie ∞^1 di coppie di punti di genere $k + 1$, o con una g^1_4 lineare (o anche con una serie ∞^1 di terne di punti, di genere $\leq \frac{k}{3}$, se k è multiplo di 3), e può anche non essere in alcun modo composta, se $r \leq 3k + 5$ ($k \geq 2$). In ciascuno di questi casi si può determinare facilmente in che superficie la curva deve essere contenuta.

(1) Cfr. ad es. la Mem. del sig. Klein già cit. nella prefazione. Alcuni fra i concetti contenuti in questa Memoria furono già applicati da me in un lavoro precedente (" Ann. di Mat. ", ser. II, t. XXI) allo *Studio di alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni.*

(2) La rigata avrà anzi lo stesso ordine e lo stesso genere della curva che rappresenta. Quanto poi alla congruenza, il suo ordine m e la sua classe n saranno dati rispett. dal numero dei punti in cui la superficie corrispondente è incontrata dai piani dei due sistemi della quadrica Q (sarà quindi $m + n$ l'ordine della stessa superficie); e il suo rango sarà dato dalla differenza $(m - 1)(n - 1) - (p + d)$, dove p è il genere delle sezioni di quella superficie e d l'ordine della sua linea doppia (se una tal linea esiste; se no, si dovrà ritenere $d = 0$).

Noi potremo quindi ricavare dai teoremi già ottenuti proprietà delle rigate e delle congruenze di rette per cui passa un dato numero (un sistema lineare cioè di data dimensione) di complessi quadratici; e precisamente le proprietà relative ad enti contenuti (per $r = 5$) in ∞^k quadriche si applicheranno alle rigate e congruenze contenute a lor volta in ∞^{k-1} complessi quadratici.

Cogliamo l'occasione per dare l'analoga interpretazione anche dei risultati già ottenuti dal sig. Castelnuovo e qui ricordati al n° 1.

32. *Il genere massimo di una rigata algebrica di ordine* n *e non contenuta in un complesso lineare* (1) *è dato dal prodotto* $\chi \{ n - 2\chi - 3 \}$ *dove* χ *è il minimo intero non inferiore a* $\frac{n-5}{4}$ (2).

Per una rigata algebrica di genere massimo (di genere cioè precisamente $= \chi \{ n - 2\chi - 3 \}$*) passano sempre almeno* ∞^4 *complessi quadratici di rette,* e ne passano precisamente tanti (e non di più) quando l'ordine di questa rigata non è inferiore a 10.

Ogni rigata algebrica di ordine superiore a 10 *e per cui passino* ∞^4 *complessi quadratici (in particolare quindi ogni rigata di genere massimo e di ordine sempre* > 10) *è contenuta in una congruenza di rette comune a tutti questi complessi* (3). Una tale congruenza può presentare due casi distinti:

a) Congruenza (2, 2) costituita da una serie ∞^1 di fasci di raggi coi centri su di una conica e i piani tutti tangenti a un medesimo cono quadrico (4). Questa

---

(1) È in questa restrizione appunto che si traduce quella che imporrebbe alla curva C^n di *appartenere* allo spazio S_5; essa è perciò indispensabile. Se la rigata stessa in *un* (solo) complesso lineare, il suo genere massimo sarebbe $\frac{\chi'}{2}(2n - 3\chi' - 5)$; e se stesse in infiniti (∞^1) complessi e quindi in *una* congruenza lineare, $\chi''(n - \chi'' - 2)$; — essendo χ' e χ'' i minimi interi non inferiori rispett. a $\frac{n-4}{3}$ e $\frac{n-3}{2}$ —.

(2) Da questo risultato e da quelli contenuti nella nota precedente segue ancora che, nello spazio ordinario, una rigata di ordine n e di genere superiore a $\frac{(n-3)^2}{8}$ sta sempre in un complesso lineare, e anzi in una congruenza lineare se il suo genere è superiore anche a $\frac{(n-2)(n-3)}{6}$. Infine, *una rigata di ordine* n *e di genere* $> \frac{(n-2)^2}{4}$ *è necessariamente un cono (o un inviluppo piano).* Di quest'ultima proposizione è fatto cenno anche in una Nota del sig. Küpper (" Math. Ann. ", XXXI); ma le considerazioni che hanno condotto l'A. a questo risultato sono affatto estranee alla geometria della retta; tant'è vero che per dedurre questo stesso risultato dalla proprietà corrispondente delle curve di ordine n egli ha ricorso ancora a un ragionamento semplice sì, ma affatto inutile, visto che non si trattava d'altro che di applicare a un caso (e precisamente *a uno spazio*) particolare un risultato generale già ottenuto.

(3) Per la rigata di genere massimo e di ordine $= 10$ (quindi di genere 6) il teorema non sarebbe più vero. Questa rigata può invece ottenersi in generale come intersezione di un complesso quadratico e di una congruenza (2, 3) o (3, 2) di genere *uno* (cfr. il mio lavoro cit., n° 6). Infatti la curva canonica generale di genere 6 (C_6^{10} di S_5) — che è riferibile a una sestica piana con quattro punti doppi — è contenuta in una superficie F^5 razionale a sezioni ellittiche, ed è precisamente intersezione di questa superficie con una quadrica non passante per essa.

(4) Quella conica non deve però passare pel vertice di questo cono —. L'insieme di tutte le tangenti a questo stesso cono che si appoggiano a quella curva si spezza precisamente in due congruenze (2, 2) così fatte; cfr. ad es. Kummer: *Ueber die alg. Strahlensysteme ecc.* (" Abhand. der Berl. Ak. ", 1866) e Sturm: *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie ecc.*; vol. II (Leipzig, 1892).

congruenza corrisponde alla rigata razionale normale del quarto ordine di S_5, del *primo* o del *secondo gruppo* (con una direttrice rettilinea cioè, oppure con una semplice infinità di coniche direttrici) secondo che il vertice di quel cono cade nel piano stesso della conica, oppure è esterno ad esso. In quest' ultimo caso la congruenza contiene una serie razionale ∞^1 (di indici $\{2, 2\}$) di rigate quadriche, passanti tutte per quella conica e tutte tangenti ai singoli piani di quell'inviluppo (ossia di quel cono) quadrico. L'una e l'altra di queste congruenze corrisponde per dualità a sè stessa;

b) Congruenza (1, 3) delle corde di una cubica sghemba, — oppure il sistema reciproco di questo, una congruenza cioè (3, 1) le cui rette siano le intersezioni a due a due dei piani osculatori a una tal cubica (siano quindi, in altri termini, le congiungenti delle coppie di punti omologhi di due piani collineari in posizione generale) —. Questi due sistemi (reciproci) sono ben distinti fra loro, ma corrispondono entrambi alla superficie di Veronese (1). L'uno e l'altro di essi contiene una serie ∞^2 di rigate quadriche (corrispondenti alle ∞^2 coniche della F_2^4 di Veronese); e il sistema di queste quadriche (considerate rispett. nei due casi come luoghi e come inviluppi) è anzi *lineare* (2) (3).

---

(1) Cfr. C. Segre, *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano ecc.* (" Atti della R. Acc. di Torino ,, XX).

(2) Le rigate contenute in una congruenza di questo secondo tipo conterranno dunque a lor volta una cubica sghemba, incontrata da ogni loro generatrice in *due* punti, oppure saranno tali che per ciascuna di queste generatrici si possano condurre due piani osculatori a una determinata cubica. Possiamo anche dire che una qualsiasi di queste due proprietà dovrà sempre verificarsi per la rigata proposta o per una qualunque sua trasformata reciproca. *Questo caso non può presentarsi però che per rigate di ordine pari;* la metà di quest' ordine darebbe precisamente la multiplicità (per la rigata) della cubica dianzi considerata.

Invece le rigate contenute in congruenze del tipo *a*) avranno tutte indistintamente una conica direttrice; e anzi, se la rigata è di genere massimo, il numero χ (che sappiamo essere $\geq \frac{n-5}{4}$, ma $< \frac{n-1}{4}$) aumentato di un'unità ci darà, in generale, la multiplicità di questa stessa direttrice. Se però l'ordine della rigata fosse del tipo $4m+1$ (m essendo intero) la stessa multiplicità potrebbe anche essere uguale a $m+1$ (ossia a $\chi+2$).

(3) Per una rigata contenuta in *un* complesso lineare si può dire che, se è di ordine $n>8$ e di genere massimo $\left(\text{quindi} = \frac{(n-4)(n-1)}{6} \text{ o } \frac{(n-3)(n-2)}{6}\right)$, dovrà stare in una congruenza (1, 2) o (2, 1) — costituita nel primo caso dalle rette che si appoggiano a una retta data e a una conica pure data e avente con quella retta un punto comune, nel secondo caso dalle tangenti a un cono quadrico che si appoggiano a una data tangente di questo stesso cono (quel complesso lineare sarà quindi in ogni caso *speciale,* e le rigate in discorso avranno sempre una direttrice rettilinea dotata di una certa multiplicità) —. Infine una rigata contenuta in una congruenza lineare e di genere massimo (quindi, se di ordine n, di genere $\frac{(n-2)^2}{4}$ o $\frac{(n-1)(n-3)}{4}$, secondo che n è pari o dispari) avrà due direttrici rettilinee (in generale distinte) e multiple entrambe secondo $\frac{n}{2}$ se n è pari, secondo $\frac{n-1}{2}$ l'una e secondo $\frac{n+1}{2}$ l'altra se n è dispari. Questa proprietà si trova già nella Nota cit. del sig. Küpper; ad essa possiamo aggiungere che quelle stesse rigate si potranno sempre ottenere come intersezioni della congruenza lineare che le contiene con un complesso di grado $\frac{n}{2}$ o $\frac{n+1}{2}$ (e in quest' ultimo caso vi sarà, naturalmente, un fascio di rette come intersezione residua).

33. *Una rigata algebrica per la quale passino non più di* $\infty^{4-\delta}$ (1) *complessi quadratici non può essere di genere superiore a*

$$\chi_\delta \{ n - 2\chi_\delta - 3 \} - \{ \chi_\delta - 1 \} \delta$$

dove χ_δ *è il minimo intero non inferiore* $\frac{n-5-\delta}{4}$.

Da questo si deduce che per una rigata di genere uguale al massimo corrispondente al suo ordine (π) diminuito di k unità (dunque di genere $\pi - k$) passano sempre (almeno) ∞^4 complessi quadratici quando il suo ordine n è superiore o eguale a $4k + 10$; almeno ∞^3 se $n \geq 2k + 10$ o $n \geq 2k + 9$ secondo che k è pari o dispari; almeno ∞^2 quando $n \geq 4\frac{k-l}{3} + l + 10$ dove l è il resto della divisione di k per 3; almeno ∞^1 quando $n \geq k + 10$.

In particolare, per una rigata di ordine n e genere $\pi - 1$ passano sempre almeno ∞^3 complessi quadratici; e ne passano certo ∞^4 per $n \geq 14$. Quando ne passino soltanto ∞^3, essi potranno avere a comune la sola rigata R^n finchè $n \leq 12$; per $n = 13$ avranno a comune tutta una congruenza (2, 3) o (3, 2) di genere *uno*, contenente la rigata in discorso (qui $R^{13}_{(11)}$) — che non avrà in questo caso generatrici doppie —. Però la rigata $R^{13}_{(11)}$ può anche stare in ∞^4 complessi quadratici; allora ha sempre una generatrice doppia, e una conica direttrice tripla o quadrupla.

Anche la rigata $R^{12}_{(9)}$ può esser contenuta in ∞^4 complessi quadratici, e avere una conica direttrice tripla o quadrupla; in quest'ultimo caso però non avrà generatrici doppie. Esiste anche una rigata $R^{12}_{(9)}$ con una cubica sestupla incontrata da ogni sua generatrice in due punti, e con una generatrice doppia. — Se questa stessa rigata è contenuta in soli ∞^3 complessi quadratici, potrà ancora stare in una congruenza (2, 3) o (3, 2) — sempre di genere uno — comune a questi complessi; se no, sarà intersezione di un complesso quadratico con una congruenza (3, 3) di genere *due* (congruenza di ROCCELLA) (2). — Non avremo invece una rigata $R^{11}_{(7)}$ corrispondente alla curva C^{11}_7 di S_5 che sta sul cono normale ellittico (di quinto ordine) perchè le quadriche passanti per questa curva sono tutte degeneri.

34. Similmente, per una rigata di genere $\pi - 2$ passano sempre almeno ∞^2 complessi quadratici; e anzi almeno ∞^3 se l'ordine di essa è superiore a 13, e certo ∞^4 se è superiore a 15. La rigata di 15° ordine (e genere 16) contenuta in soli ∞^3 complessi quadratici è intersezione generale di una congruenza (2, 3) o (3, 2) di genere uno con un complesso cubico. — Gli altri casi che queste rigate possono presentare si deducono anche facilmente dal quadro che abbiamo dato alla fine del § 8, sicchè crediamo inutile insistervi sopra più a lungo.

---

(1) Questa proposizione vale per $0 \leq \delta \leq 4$; e anche, se vogliamo, per $\delta = 5$, intendendo però allora che per la rigata non passi più nessun complesso quadratico. L'ipotesi che qui vien fatta esclude implicitamente che la congruenza possa stare in un complesso lineare.

(2) V. ROCCELLA: *Sugli enti geometrici dello spazio di rette ecc.* (Piazza Armerina, 1882). Cfr. anche il mio lavoro cit., n° 9.

UN METODO

PER LA

TRATTAZIONE DEI VETTORI ROTANTI

OD ALTERNATIVI

ED UNA APPLICAZIONE DI ESSO

AI

MOTORI ELETTRICI A CORRENTI ALTERNATE

MEMORIA

DEL SOCIO

Prof. GALILEO FERRARIS

Approvata nell'Adunanza del 3 Dicembre 1893.

Lo studio di alcuni apparecchi elettrotecnici moderni, e segnatamente quello di alcune specie di motori elettrici, porta a considerare grandezze alternative vettoriali. Per la trattazione di tali grandezze può giovare ricorrere a qualche modo di rappresentazione grafica, il quale dia di esse non solo l'ampiezza e la fase, ma anche la direzione.

Io qui presento un metodo, che nella interpretazione e nella esposizione elementare di molti fenomeni può riuscire assai semplice e perspicuo. Per mostrare poi l'uso e l'utilità del nuovo metodo, lo applico ai campi magnetici ed espongo per mezzo di esso una teoria elementare de'principali motori elettrici a correnti alternative.

I.

Vettori rotanti e vettori alternativi.

1. Definizione. — Denominiamo *vettore rotante* una grandezza vettoriale della quale il valore scalare è costante, mentre la direzione ruota attorno ad un asse con velocità uniforme.

Qui ci limitiamo a considerare vettori rotanti in un dato piano. In questo caso a definire un vettore rotante ci bastano i seguenti elementi: *la grandezza, il verso, la frequenza,* ossia il numero di giri fatti in una unità di tempo, e la *fase,* ossia la frazione di giro compiuta all'origine del tempo.

Data la frequenza, possiamo rappresentare il vettore rotante per mezzo di un segmento di retta od, od os (fig. 1) facendo semplicemente queste convenzioni: che la lunghezza del segmento rappresenti la grandezza del vettore, che la direzione di esso sia quella che ha il vettore nell'origine del tempo, e che la lettera d od s indichi il verso, *destro* o *sinistro*, della rotazione. Se oX è la retta a partire dalla quale si vogliono misurare gli angoli descritti dal vettore, l'angolo Xod od Xos è quello percorso dal vettore all'origine del tempo e si dice valore angolare della fase. Il rapporto $\frac{Xod}{2\pi}$, oppure $\frac{Xos}{2\pi}$ è la fase.

Fig. 1.

Per nominare i vettori così rappresentati potremo servirci semplicemente delle lettere d ed s.

2. Composizione di due vettori di eguale frequenza rotanti nel medesimo piano.

Primo caso: Vettori rotanti nel medesimo verso. — Si abbiano due vettori rotanti nel medesimo verso e colla medesima frequenza; e sieno questi, per esempio, d e d' (fig. 2). In ogni istante la loro somma vettoriale, ossia la loro risultante, è il vettore rappresentato dalla diagonale oD del parallelogrammo fatto su di essi, o, ciò che val lo stesso, dalla retta oD che chiude il triangolo odD od il triangolo $od'D$. Ora siccome d e d' girano nel medesimo verso e colla medesima velocità angolare, così l'angolo dod' rimane costante. Rimane quindi costante anche la diagonale oD. Essa intanto gira attorno ad o colla stessa velocità angolare delle componenti. Dunque la risultante di due vettori di uguale frequenza, rotanti nel medesimo piano e nel medesimo verso, è anch'essa un vettore rotante nel medesimo verso e colla stessa frequenza.

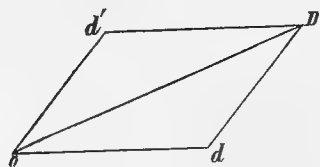



Fig. 2.

Se l'angolo dod' è uguale a due retti, se cioè le fasi di d e di d' differiscono di 180°, noi diciamo che d e d' hanno fasi opposte. Se i due vettori componenti hanno grandezze uguali e fasi opposte, la loro risultante è nulla.

È inutile dire come dal caso di due soli vettori si passi al caso di un numero qualunque di vettori rotanti nel medesimo piano e nel medesimo verso, e come si dimostri che il vettore risultante è anch'esso un vettore rotante nel medesimo piano e nel medesimo verso, ed è rappresentato dalla retta che chiude il poligono fatto coi vettori componenti.

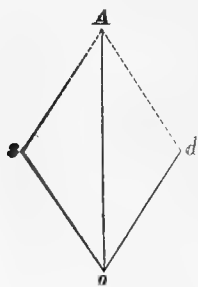



Fig. 3.

Secondo caso: Vettori rotanti in versi opposti. — Se (fig. 3) i due vettori componenti od, os rotano in versi opposti, l'angolo sod varia; quindi la diagonale oA varia inevitabilmente di grandezza. Essa intanto può variare, ed in generale varia, anche di direzione.

Ma si hanno a considerare due casi:

a) Il caso in cui le grandezze od ed os dei due vettori componenti sono uguali tra di loro;

b) Quello in cui tali grandezze sono disuguali.

3. *a)* **Caso in cui i due vettori componenti hanno grandezze uguali.** — In questo caso la risultante ha una direzione fissa. Infatti la diagonale oA (fig. 3) è allora in ogni istante la bisettrice dell'angolo sod, e siccome od ed os ruotano colla stessa velocità angolare l'uno verso la destra e l'altro verso la sinistra, così essa rimane fissa nello spazio.

Varia invece il *valore* della risultante, il quale è legato all'angolo variabile Aod dalla relazione

$$o\mathrm{A} = 2od \cos \widehat{\mathrm{A}od}.$$

Ponendo $o\mathrm{A} = a$ e $2od = \mathrm{A}$, rappresentando con n la frequenza, con t il tempo e con α il valore dell'angolo Aod per $t = o$, questa relazione si scrive:

$$a = \mathrm{A} \cos (2\pi nt + \alpha).$$

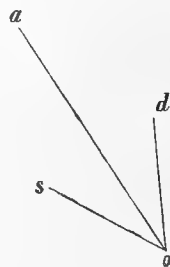
Una grandezza variante secondo questa legge è ciò che comunemente dicesi una grandezza *alternativa* od *alternante armonica* o *sinusoidale.* La costante A è l'*ampiezza*, n la *frequenza*, l'angolo α il *valore angolare della fase*, quando si prende come origine del tempo l'istante in cui a è massima.

Noi dunque diciamo oA: un *vettore alternativo*, e concludiamo: due vettori uguali, rotanti in un medesimo piano, colla stessa frequenza ed in versi opposti dànno per risultante un vettore di direzione fissa, alternativo, della stessa frequenza. La direzione di questo vettore alternativo è quella della bisettrice dell'angolo che in un istante qualunque è compreso fra i due vettori componenti, e perciò anche quella della bisettrice dell'angolo che i due vettori componenti comprendono nell'istante in cui $t = 0$ ossia quella dei due segmenti di rette coi quali si rappresentano, secondo la nostra convenzione, i due vettori componenti.

L'ampiezza del vettore alternativo risultante è uguale al doppio della grandezza di uno dei vettori componenti.

Viceversa un vettore alternativo sinusoidale si può sempre scomporre in due vettori rotanti di ugual valore e di versi opposti. Qualunque vettore alternativo sinusoidale si può considerare come risultante di due vettori rotanti nel modo detto.

Fig. 4.

Ora questo modo di considerare un vettore alternativo conduce a rappresentazioni grafiche semplicissime, atte ad indicare di un vettore alternativo la direzione fissa, l'ampiezza e la fase. L'artifizio consiste nel rappresentare con un segmento di retta la direzione e l'ampiezza del vettore alternativo e con altri segmenti di rette i vettori rotanti di cui quello si compone. Disegnando tutti tre questi segmenti, si ha la rappresentazione indicata nella fig. 4. In questa figura il segmento oa indica la direzione e dà l'ampiezza del vettore alternativo, mentre i segmenti od ed os rappresentano i vettori rotanti, destro e sinistro, in cui oa si può scomporre. L'angolo aod, od il suo uguale aos, rappresenta il valore angolare della fase. Ma siccome $oa = 2os = 2od$ ed è sulla bisettrice dell'angolo sod, così uno qualunque dei segmenti oa, os, od si può trovare quando sono dati gli altri due. Quindi si ha una rappresentazione completa anche disegnando solamente questi due. Per tal modo possiamo rappresentare il vettore alternativo semplicemente con oad, o con oas, o con osd.

4. *b)* **Caso in cui i due vettori componenti hanno grandezze diverse. —**

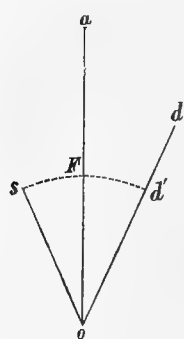



Fig. 5.

Se i vettori rotanti componenti, *od* ed *os* (fig. 5), non sono uguali, è variabile non solo l'ampiezza, ma anche la direzione del vettore risultante. Col centro in *o* e con un raggio uguale al più piccolo dei vettori componenti, uguale ad *os* nel caso della figura, si descriva l'arco di circolo sFd'. Si può considerare *od* come risultante di due vettori od' e $d'd$ rotanti nel medesimo verso. Ora i due vettori rotanti od' ed *os* dànno per risultante un vettore alternativo *oa* di direzione fissa bisettrice dell'angolo $\widehat{sod}$ e di ampiezza $oa = 2od' = 2os$. Dunque i due vettori rotanti *od* ed *os* di versi opposti e di valori diversi equivalgono ad un vettore alternativo *oa* di direzione fissa e ad un vettore rotatorio $d'd$.

5. Composizione di due o più vettori alternativi di direzioni fisse. — Valendoci delle considerazioni precedenti possiamo ridurre la composizione di vettori alternativi a quella di vettori rotanti. Se per esempio abbiamo due vettori alternativi di direzione fissa *oasd* ed $o'a's'd'$ (fig. 6), noi possiamo comporre *d* con d'

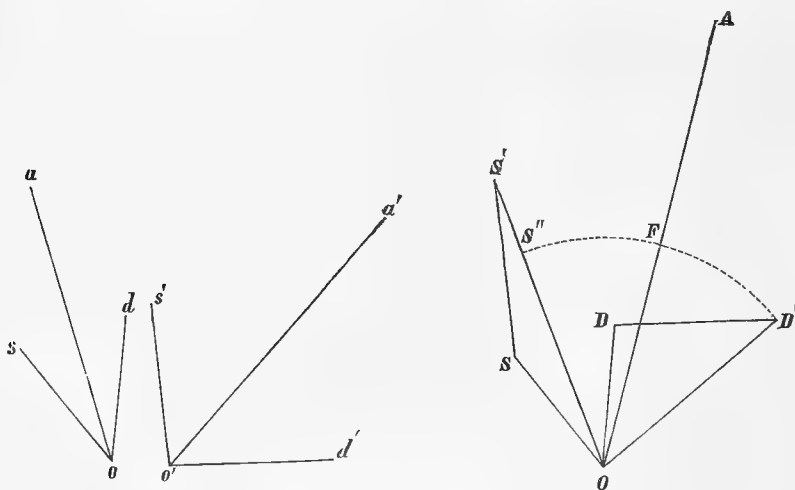



Fig. 6.

ed *s* con s' e poi comporre insieme, nel modo or ora indicato, le due risultanti. Per comporre *d* con d' tiriamo da un punto O un segmento OD uguale e parallelo a *d* e da D un segmento DD′ uguale e parallelo a d'; troviamo così la risultante OD′. Per comporre similmente *s* con s', tiriamo OS ed SS′ rispettivamente uguali e paralleli ad *s* e ad s' e tiriamo OS′. Dopo ciò noi possiamo dire che il sistema dei due vettori alternativi *a* ed a' dati è equivalente al sistema dei due vettori rotanti OD′ ed OS′. Ora ai due vettori rotanti OD′ ed OS′ possiamo applicare la costruzione precedente: Se OD′ è il minore dei due, noi prendiamo $OS'' = OD'$ e sulla bisettrice OF dell'angolo S′OD′ prendiamo $OA = 2OD' = 2OS''$. I due vettori rotanti OD′ ed OS′, e quindi anche i due vettori alternativi dati *a* ed a', equivalgono al vettore alternativo OA ed al vettore rotante S″S′.

La proposizione si può estendere senz'altro al caso di un numero qualunque di vettori alternativi: qualsivoglia sistema di vettori alternativi di uguale frequenza,

situati in un medesimo piano, si può ridurre ad un sistema semplice di un vettore alternativo fisso combinato con un vettore rotante. L'operazione da farsi è ancora quella indicata nella fig. 6 con questa sola differenza, che in luogo dei triangoli ODD′, OSS′ si hanno a fare i poligoni di tutte le componenti d e di tutte le componenti s dei vettori dati.

Importa applicare la proposizione a casi particolari.

6. Casi particolari:

a) **Vettori alternativi aventi la medesima direzione.** — Se a' è parallelo ad a (fig. 7), gli angoli OSS′, ODD′ sono uguali tra di loro, quindi i triangoli OSS′,

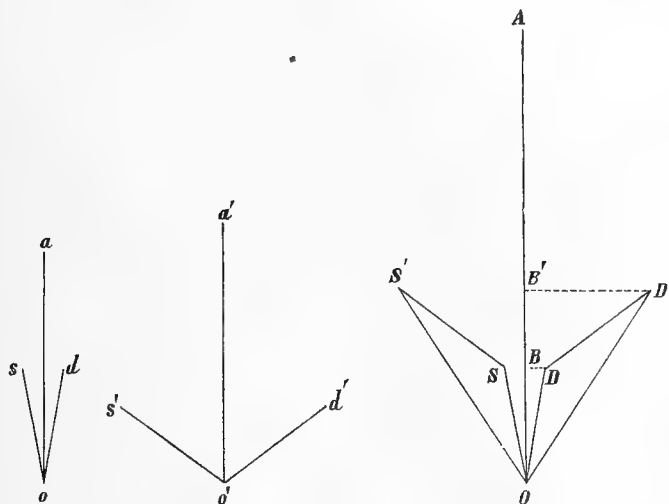



Fig. 7.

ODD′ sono uguali, e per conseguenza OS′ = OD′. Inoltre la bisettrice OA dell'angolo S′OD′ è anche bisettrice degli angoli SOD ed S′S,DD′, ed è perciò parallela alle oa ed $o'a'$. Dunque la risultante OA dei due vettori alternativi paralleli a ed a' è anch'essa un vettore alternativo fisso ed è parallela ai componenti.

Per trovare questa risultante non è necessario eseguire tutta la costruzione indicata nella fig. 7: basta evidentemente fare una metà di essa, per esempio la parte ODD′. Secondo l'interpretazione finora data alla figura, i segmenti OD e DD′ rappresentano la metà delle ampiezze dei vettori alternativi componenti, ed il segmento OD′ rappresenta la metà dell'ampiezza del vettore alternativo risultante. Se si abbassano le perpendicolari DB, D′B′ su OA, le *proiezioni* OB, BB′ ed OB′ rappresentano similmente le metà dei valori istantanei che i due vettori componenti ed il risultante hanno per $t = 0$; e se si suppone che la figura ODD′ giri attorno ad O colla frequenza n, le proiezioni di OD, DD′, OD′ sulla retta fissa OA rappresentano in ogni istante le metà dei valori istantanei dei vettori medesimi. Ma noi possiamo ora rappresentare con OD e con DD′ non le metà, ma le intiere ampiezze dei vettori componenti; e con ciò abbiamo subito in OD′ la rappresentazione dell'ampiezza della risultante e nelle proiezioni su OA le rappresentazioni dei valori istantanei delle grandezze dei tre vettori considerati. Così noi ritroviamo la nota e solita costruzione di cui si fa uso nello studio delle grandezze alternative. Essa è un caso particolare della costruzione più generale da noi indicata.

Le fatte considerazioni si estendono senz'altro al caso di un numero qualunque di vettori alternativi paralleli.

7. *b)* **Vettori alternativi di direzioni diverse.** — Se i due vettori alternativi dati, a ed a', non sono paralleli, la costruzione generale esposta all'art. 5, e rappresentata nella figura 6, conduce a trovare che i due vettori dati equivalgono a due vettori uno alternativo di direzione fissa rappresentato da OA e l'altro rotante di valore costante, rappresentato da S″S′. Ma vi hanno casi particolari nei quali di questi due vettori esiste soltanto l'uno o soltanto l'altro.

Esiste solamente il vettore alternativo di direzione fissa quando i due vettori alternativi componenti hanno la medesima fase.

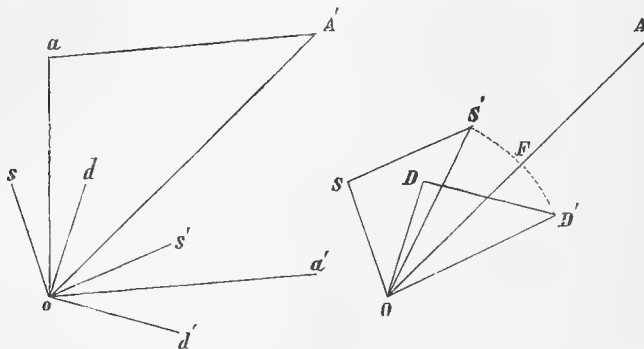



Fig. 8.

In questo caso infatti gli angoli OSS′, ODD′ (fig. 8) sono uguali entrambi al supplemento dell'angolo aoa' e perciò sono uguali tra di loro. Quindi i triangoli SOS′, DOD′ sono uguali l'uno all'altro, e per conseguenza si ha $OS' = OD'$. Dunque si hanno a comporre due vettori rotanti OD′ ed OS′ uguali e di versi opposti i quali, come si è dimostrato [3], dànno per risultante un semplice vettore alternativo di direzione fissa.

Questa risultante è rappresentata dal segmento OA uguale a 2OS′ ed a 2OD′ e giacente sulla bisettrice OF dell'angolo S′OD′. La sua fase ha il valore angolare $S'OA = \frac{1}{2} S'OD' = \frac{1}{2} sod = \frac{1}{2} s'od'$: essa è uguale alla fase dei vettori alternativi componenti.

Se si tira aA' uguale e parallela ad oa' e se si tira oA', si ha il triangolo oaA', il quale è simile al triangolo OSS′ perchè l'angolo a è uguale all'angolo S ed i lati oa, aA' sono uguali al doppio dei lati OS, SS′. Dunque si ha $oA = 2OS' = OA$. Inoltre dalle eguaglianze

$$\widehat{aoA'} = \widehat{SOS'}, \quad \widehat{S'OA} = \frac{1}{2}\, \widehat{S'OD'} = \frac{1}{2}\, \widehat{sod} = \widehat{soa}$$

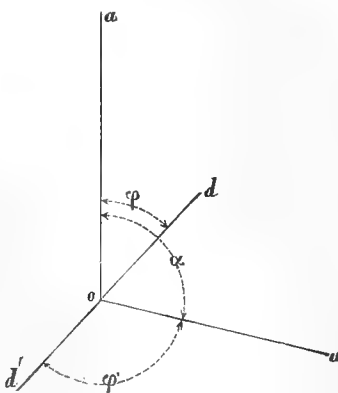
si deduce $\widehat{soA'} = SOA$; il che significa che oA' è parallelo ad OA. Per conseguenza oA' è uguale e parallelo al vettore risultante OA. Diremo adunque: Due vettori alternativi di uguale fase si compongono in un unico vettore alternativo di ugual fase, del quale l'ampiezza e la direzione sono rappresentate dalla diagonale del parallelogrammo fatto sulle rette che rappresentano per ampiezza e per direzione i due vettori componenti.

8. — La composizione di due vettori alternativi dà inveve come risultante un semplice vettore rotante quando l'uno o l'altro dei vettori rotanti OD', OS' (fig. 6, art. 5), è uguale a zero.

Questo caso si verifica quando os ed $o's'$ (fig. 6) oppure od ed $o'd'$ hanno grandezze uguali e direzioni opposte; allora infatti il punto S', oppure il punto D' coincide con O.

La condizione $os = o's'$, oppure $od = o'd'$, implica quella che sia $oa = o'a'$, ossia che le ampiezze dei due vettori alternativi dati sieno fra di loro uguali.

Fig. 9.

La condizione poi, che os ed $o's'$, oppure od ed $o'd'$ abbiano direzioni opposte, implica una relazione tra le direzioni dei due vettori alternativi oa ed $o'a'$ e le fasi dei medesimi. È facile vedere quale sia questa relazione. Supponiamo infatti (fig. 9) che sia od' opposto ad od, diciamo α l'angolo aoa' tra le direzioni dei due vettori alternativi componenti, e rappresentiamo con φ e con φ' i valori angolari aod, $a'od'$ delle fasi dei vettori medesimi; abbiamo:

$$\alpha + \varphi' - \varphi = \pi, \quad \text{ossia} \quad \varphi' - \varphi = \pi - \alpha.$$

Dunque due vettori alternativi di direzioni fisse dànno per risultante un semplice vettore rotante quando hanno ampiezze uguali e presentano una differenza di fase, il valore angolare della quale è uguale al supplemento dell'angolo compreso fra le loro direzioni.

9. *Esempi.* — Come primo esempio consideriamo il caso di due vettori alternativi, mutuamente perpendicolari oa, $o'a'$ (fig. 10).

Il teorema dice che acciocchè essi si compongano in un semplice vettore rotante dev'essere in primo luogo $o'a' = oa$. In secondo luogo deve essere $\varphi' - \varphi = \pi - \alpha$ e quindi, essendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$\varphi' - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

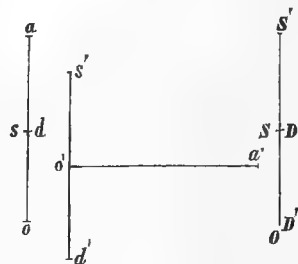



Fig. 10.

Se per esempio prendiamo $\varphi = 0$, ossia: angolo $aod = 0$, dev' essere $\varphi' = \frac{\pi}{2}$, ossia angolo $a'o'd' = \frac{\pi}{2}$.

Ora che veramente, date queste condizioni, i due vettori a ed a' producano come risultante un vettore rotante, si riconosce subito applicando ad essi la costruzione dell'art. 5, fig. 6. Infatti per comporre d con d' si deve tirare $OD = od$ e poi $DD' = o'd'$, col che si ricade sul punto O; per comporre invece s con s' si hanno a tirare OS ed SS' uguali e paralleli ad os e ad $o's'$, col che si trova la risultante OS', che è una rotazione sinistra di grandezza uguale ad $s + s'$, ossia a $2s$, ossia ad a e ad a'. I due vettori alternativi dati producono adunque come risultante un semplice vettore rotante della medesima frequenza e di grandezza uguale alle loro ampiezze.

Come secondo esempio consideriamo il caso di due vettori alternativi uguali oa ed $o'a'$ (fig. 11), le direzioni dei quali comprendono un angolo $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

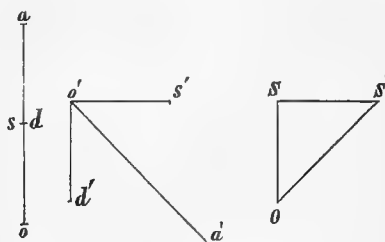



Fig. 11.

In questo caso la condizione espressa dal teorema dimostrato è che si abbia $\varphi' - \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Se per esempio: $\varphi = \widehat{aod} = 0$, dev'essere $\varphi' = \widehat{a'o'd'} = \frac{\pi}{4}$. E veramente, se si applica a questo caso la costruzione della fig. 6, si trova che D' si confonde con O. La risultante si riduce al vettore rotante OS'. La sua grandezza è rappresentata dall'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele OSS'; essa è perciò uguale ad $s\sqrt{2}$ ossia ad $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

10. — Dal caso ora considerato di due soli vettori alternativi componenti si passa subito al caso generale di un numero qualunque di vettori: un sistema qualunque di vettori alternativi può equivalere ad un semplice vettore rotante. La condizione necessaria perchè ciò avvenga è semplicemente questa; che il poligono delle componenti d oppure quello delle componenti s sia chiuso.

Un caso particolare importante è quello nel quale i vettori componenti sono uguali e fanno gli uni cogli altri angoli uguali. Sieno dati in un piano N vettori alternativi uguali, ciascuno dei quali faccia col precedente un angolo α che non sia nè π nè un multiplo di π, ed abbia rispetto al medesimo una precedenza di fase di valore angolare uguale anch'essa ad α. Allora ciascuno dei vettori rotanti s fa col precedente un angolo $\alpha - \alpha$, ossia zero: il poligono delle s ha tutti i suoi lati su di una medesima retta, la risultante S di tutte le s è uguale alla loro somma, ossia $S = Ns$. Il poligono delle d è invece un poligono regolare del quale gli angoli esterni hanno il valore 2α; acciocchè esso sia chiuso, è necessario e sufficiente che N di tali angoli facciano un multiplo di quattro angoli retti, ossia che si abbia

$$2\alpha N = 2k\pi,$$

od

$$\alpha = \frac{k\pi}{N},$$

ove k è un numero intiero qualunque non divisibile per N. Se è soddisfatta questa condizione, gli N vettori rotanti d hanno una risultante nulla; e ciò vuol dire che gli N vettori alternativi dati hanno per risultante il semplice vettore rotante S. Se

diciamo a l'ampiezza comune dei vettori alternativi dati, il valore del vettore rotante risulta

$$S = Ns = \frac{N}{2} a.$$

Se invece di supporre, come abbiamo fatto, che ciascuno dei vettori dati abbia una precedenza di fase α rispetto a quello che lo precede, avessimo supposto che esso abbia un ritardo di fase, avremmo trovato che il poligono delle d giace su di una retta e dà $D = nd$, e che il poligono delle s è chiuso, e dà $S = 0$; in questo caso la risultante degli N vettori alternativi dati sarebbe un semplice vettore D rotante verso la destra.

Abbiamo escluso il caso di α uguale a π, o ad un multiplo di π, e per conseguenza abbiamo detto che il numero intero k non deve essere divisibile per N. Se si facesse $\alpha = \pi$ o ad un multiplo di π, ossia se si prendesse k uguale ad N, o ad un multiplo di N, gli angoli esterni del poligono delle d sarebbero uguali a 2π o ad un multiplo di 2π, ed il poligono si ridurrebbe, come quello delle s, ad una linea retta. Allora si avrebbero due vettori rotanti S e D uguali entrambi ad $\frac{N}{2} a$ e di versi opposti, i quali darebbero come risultante un vettore alternativo di direzione fissa e di ampiezza uguale ad Na. Ciò è quanto si sapeva di già, perchè supporre $\alpha = \pi$ o multiplo di π equivale a supporre che i vettori alternativi dati sieno tra di loro paralleli.

I casi che più comunemente si hanno a considerare nello studio dei motori elettrici sono quelli ove $k = 2$, quelli cioè ove i vettori alternativi considerati sono regolarmente distribuiti, a distanze angolari uguali, tutt'attorno ad un asse. Fra questi casi poi merita una menzione speciale quello ove $N = 3$. Allora le distanze angolari tra i vettori dati ed i valori angolari delle loro differenze di fase sono uguali a $\frac{2}{3}\pi$, ossia sono di 120°. Il vettore rotante, che risulta dalla composizione dei tre vettori alternativi, ha il valore $\frac{3}{2}a$, ossia è uguale ad una volta e mezzo l'ampiezza di ciascuno dei vettori componenti.

11. — Ciò che precede riguarda la composizione, ossia la somma de' vettori da noi considerati. Per le applicazioni alle quali miriamo conviene aggiungere qualche considerazione sui prodotti $ab \cos\varphi$, $ab \operatorname{sen}\varphi$ delle ampiezze a e b di due vettori pel coseno e pel seno dell'angolo φ compreso fra le direzioni dei medesimi, prodotti dei quali il primo è lo scalare col segno cambiato, ed il secondo è il tensore del vettore del prodotto dei due vettori.

In primo luogo conviene ricordare questa proposizione: se sono dati due gruppi di vettori, e se in un dato istante sono: a la grandezza di uno qualunque dei vettori del primo gruppo, b quella di uno qualunque dei vettori del secondo gruppo, A il valore istantaneo del vettore risultante di tutti i vettori a, B quello del risultante dei vettori b, φ l'angolo compreso tra un vettore a ed un vettore b, e Φ l'angolo di A con B, si ha

$$\Sigma ab \cos\varphi = AB \cos\Phi,$$

e

$$\Sigma ab \operatorname{sen}\varphi = AB \operatorname{sen}\Phi.$$

Per dimostrare la prima di queste uguaglianze, del resto notissime, basta osservare che se si dice Ψ l'angolo tra A ed uno dei vettori b, si ha:

$$b\Sigma a \cos\varphi = bA \cos\psi,$$

quindi
$$\Sigma ab \cos\varphi = \Sigma bA \cos\psi = A\Sigma b \cos\psi.$$

Ma $\Sigma b \cos\psi = B \cos\Phi$, dunque

$$\Sigma ab \cos\varphi = AB \cos\Phi.$$

La seconda eguaglianza, ossia la $\Sigma ab \operatorname{sen}\varphi = AB \operatorname{sen}\Phi$, si dimostra in modo analogo.

12. — In secondo luogo conviene vedere quali sieno i valori medii dei prodotti $ab \cos\varphi$ ed $ab \operatorname{sen}\varphi$ quando i vettori a b sono delle specie di cui noi qui ci occupiamo, quando cioè essi sono vettori rotanti o vettori alternativi. E qui si hanno più casi.

1° *Caso.* — Se i due vettori a e b sono vettori rotanti nel medesimo piano, colla medesima frequenza e nel medesimo verso, l'angolo φ compreso fra i medesimi rimane costante: esso è uguale al valore angolare della differenza di fase de' due vettori. Siccome, per la definizione di vettore rotante da noi adottata, anche a e b sono costanti, così i prodotti $ab \cos\varphi$, $ab \operatorname{sen}\varphi$ sono indipendenti dal tempo.

2° *Caso.* — Se a e b sono ancora vettori rotanti in un medesimo piano, ma con frequenze diverse n ed m, l'angolo φ compreso fra di essi passa in ogni unità di tempo $n-m$ volte da 0 a 2π, ossia varia tra 0 e 2π nel tempo $\frac{1}{n-m}$. Il valore medio di $\cos\varphi$ e di $\operatorname{sen}\varphi$ durante tale tempo è uguale a zero, ed è perciò uguale a zero anche il valore medio dei prodotti considerati.

3° *Caso.* — Un caso particolare compreso in quello or ora considerato è quello di due vettori rotanti in versi opposti: se sono n ed m le frequenze dei due vettori rotanti, l'angolo φ varia tra 0 e 2π nel tempo $\frac{1}{n+m}$, e durante questo tempo i valori medii di $ab \cos\varphi$, e di $ab \operatorname{sen}\varphi$ sono uguali a zero.

4° *Caso.* — Un altro caso particolare è quello in cui a è un vettore rotante e b un vettore fisso di grandezza costante. Questo caso si riduce ai precedenti facendo semplicemente $m = 0$. Anche in questo caso i medii prodotti sono uguali a zero.

5° *Caso.* — Se a è un vettore alternativo di direzione fissa e b è un vettore rotatorio, possiamo immaginare a scomposto in due vettori uguali rotanti in versi opposti, d ed s, e valendoci del teorema ricordato all'articolo precedente (11), porre:

$$ab \cos\varphi = d.\,b \cos\delta + s.\,b \cos\sigma,$$

$$ab \operatorname{sen}\varphi = d.\,b \operatorname{sen}\delta + s.\,b \operatorname{sen}\sigma,$$

ove δ e σ rappresentano gli angoli che nell'istante considerato b fa con d e con s. Così siamo ricondotti ai casi precedenti.

Se a e b hanno frequenze diverse, tanto i prodotti $db \cos\delta$, $db \operatorname{sen}\delta$ quanto i prodotti $sb \cos\sigma$, $sb \operatorname{sen}\sigma$ hanno valori medii uguali a zero; quindi sono uguali a zero anche i medii di $ab \cos\varphi$, e di $ab \operatorname{sen}\varphi$.

Se a e b hanno una medesima frequenza, solamente i prodotti $d\,b$ cos δ, $d\,b$ sen δ, oppure solamente $s\,b$ cos σ, $s\,b$ sen σ sono nulli; gli altri due sono diversi da zero e sono costanti. Se, per esempio, b è un vettore rotante verso destra i prodotti $s\,b$ cos σ, $s\,b$ sen σ hanno un valore medio uguale a zero, ed i prodotti $d\,b$ cos δ, $d\,b$ sen δ sono costanti. Si ha perciò semplicemente:

$$\text{medio di } ab \cos\varphi = db \cos\delta,$$

$$\text{medio di } ab \,\text{sen}\,\varphi = db \,\text{sen}\,\delta.$$

Se si rappresenta con A l'ampiezza del vettore alternativo, si ha $d = \frac{A}{2}$, e quindi

$$\text{medio di } ab \cos\varphi = \frac{1}{2} Ab \cos\delta,$$

$$\text{medio di } ab \,\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2} Ab \,\text{sen}\,\delta.$$

Se si prende come origine del tempo l'istante in cui a ha il valore massimo A, l'angolo δ, che figura in queste espressioni, è il valore angolare della differenza di fase tra a e b.

6° *Caso*. — Se finalmente a e b sono due vettori alternativi di uguale frequenza, noi consideriamo il primo come risultante di due vettori rotanti d ed s ed il secondo come risultante di due altri vettori rotanti d' ed s'. In grazia della proposizione dimostrata all'art. 11, i prodotti $a\,b$ cos φ, $a\,b$ sen φ sono in ogni istante uguali alla somma di quelli che si hanno colle combinazioni $d\,d'$, $d\,s'$, $s\,d'$, ss'. Ma, in grazia di ciò che si è detto dianzi trattando il caso 3°, i valori medii dei prodotti corrispondenti alla seconda ed alla terza combinazione sono uguali a zero; dunque, se diciamo δ l'angolo costante tra d e d' e σ l'angolo costante tra s ed s', abbiamo:

$$\text{medio di } ab \cos\varphi = dd' \cos\delta + ss' \cos\sigma,$$

$$\text{medio di } ab \,\text{sen}\,\varphi = dd' \,\text{sen}\,\delta + ss' \,\text{sen}\,\sigma.$$

Se diciamo A e B le ampiezze dei due vettori alternativi dati, e se notiamo che

$$d = s = \frac{A}{2}, \quad e \quad d' = s' = \frac{B}{2},$$

possiamo scrivere anche:

$$\text{medio } ab \cos\varphi = \frac{AB}{4} (\cos\delta + \cos\sigma),$$

e

$$\text{medio } ab \,\text{sen}\,\varphi = \frac{AB}{4} (\text{sen}\,\delta + \text{sen}\,\sigma).$$

Se poi, dicendo α e β le fasi di a e b, notiamo che

$$\delta = \varphi + \beta - \alpha, \quad e \quad \sigma = \varphi - \beta + \alpha,$$

possiamo scrivere ancora:

$$\text{medio } ab \cos\varphi = \frac{AB}{2} \cos\varphi . \cos(\beta - \alpha),$$

$$\text{medio } ab \,\text{sen}\,\varphi = \frac{AB}{2} \,\text{sen}\,\varphi . \cos(\beta - \alpha).$$

II.

Applicazione ai campi magnetici ed ai motori elettrici a correnti alternate.

13. — Possiamo applicare le considerazioni generali sovraesposte al caso speciale in cui i vettori considerati sono forze magnetiche.

In questo caso le proposizioni degli articoli 8, 9 e 10 mostrano subito come per mezzo di due, o di più campi magnetici alternativi di direzioni fisse si possa produrre un campo magnetico rotante; esse mostrano perciò come un campo magnetico rotante si possa produrre per mezzo di due o più correnti alternative di fasi diverse; esse comprendono, in altre parole, il principio fondamentale dei motori elettrici a correnti alternative polifasi.

Viceversa la proposizione dell'art 3 mostra come un campo magnetico alternativo, od un flusso d'induzione alternativo si possa sempre considerare come risultante di due, o di più campi, o di due o più flussi di valore costante, rotanti gli uni verso destra e gli altri verso sinistra. Ora questo modo di considerare un campo magnetico od un flusso d'induzione alternativo può tornare molto utile nello studio delle correnti indotte in conduttori posti nel campo magnetico e delle forze che questo esercita sulle medesime; può per conseguenza tornare utile nello studio de' fenomeni fondamentali in molti apparecchi elettrici, e specialmente nei motori elettrici per correnti alternative. Per dare un esempio di applicazione noi prenderemo qui a trattare di questi ultimi.

14. Motori sincroni. — Consideriamo dapprima una armatura costituita da un'unica spirale, della quale le spire sieno in piani perpendicolari ad un asse comune oa (fig. 12), e supponiamo che essa possa rotare nel piano della figura, attorno ad un asse o, in un campo magnetico, ove l'induzione magnetica abbia il valore uniforme B e la direzione costante oB. Se tale spirale è percorsa da una corrente elettrica, essa equivale ad un magnete di asse oa, il momento magnetico del quale si ottiene moltiplicando la somma delle superfici delle spire per la intensità della corrente in misura elettromagnetica assoluta. Noi possiamo rappresentare questo magnete, e quindi anche la spirale percorsa dalla corrente, per mezzo di un vettore avente la direzione oa ed una grandezza uguale al momento magnetico sovraddetto. Se la corrente è alternativa colla frequenza n, anche il vettore è alternativo colla medesima frequenza, e noi lo possiamo rappresentare, secondo il nostro metodo, in $o\,a\,s\,d$. Il fare uso di questa rappresentazione equivale a sostituire al magnete alternativo $o\,a$ due magneti rotanti, i momenti magnetici dei quali sono rappresentati da od e da os. Dicendo A l'ampiezza oa e d ed s le grandezze dei due vettori rotanti od, os, si ha $d = s = \frac{A}{2}$.

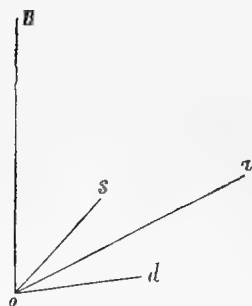



Fig. 12.

Ciò posto, consideriamo le forze esercitate sulla spirale dal campo magnetico in cui essa è collocata. Queste forze si riducono ad una coppia, il cui momento è $B.a \operatorname{sen} \widehat{Boa}$, e, pel teorema ricordato all'art. 11, è uguale alla somma

$$Bd \operatorname{sen} \delta + Bs \operatorname{sen} \sigma,$$

ove con δ e con σ si rappresentano, come più sopra, gli angoli che nell'istante considerato fanno con oB i due vettori rotanti destro e sinistro d ed s.

Se la spirale è in riposo, i vettori d ed s rotano con la medesima frequenza n l'uno verso destra e l'altro verso sinistra, e, per ciò che si è detto all'articolo 12 (4º caso), i valori medii dei prodotti $Bd \operatorname{sen} \delta$ e $B s \operatorname{sen} \sigma$ sono uguali a zero. È quindi uguale a zero il medio valore del momento della coppia considerata.

Se si fa rotare la spirale attorno all'asse o con una frequenza m, gira con essa il vettore oa, ed i due vettori od ed os prendono a girare con velocità angolari uguali alle somme algebriche di quelle ch'essi hanno relativamente all'armatura e di quella che hanno comune con questa. Se per esempio l'armatura ruota verso la destra, il vettore rotante d gira nello spazio con la frequenza $n + m$, ed il vettore s gira colla frequenza $n - m$. Però finchè m è diverso da n i valori medii dei momenti delle coppie sono ancora uguali a zero.

Ma se $m = n$, la frequenza di d diventa uguale a $2n$ e quella di s si riduce a zero. La corrente dell'armatura equivale allora a due magneti di momento magnetico costante, uno dei quali, d, ruota nel verso dell'armatura con una frequenza doppia, e l'altro, s, sta fisso nello spazio. La direzione fissa di quest'ultimo è quella per cui passa l'asse oa della spirale rotante nel momento in cui in essa la corrente alternativa ha l'intensità massima. Tale direzione fa con oB un angolo determinato che rappresenteremo con ς. In questo caso il momento della coppia agente sull'armatura non ha più un valore medio uguale a zero: allora infatti è uguale a zero soltanto il momento medio della coppia agente su od, ossia il valore medio del prodotto $Bd \operatorname{sen} \delta$; mentre il momento della coppia agente su os, ha il valore costante

$$Bs \operatorname{sen} \varsigma,$$

ossia

$$\frac{1}{2} AB \operatorname{sen} \varsigma.$$

Questa coppia tende a chiudere l'angolo soB. Se tale angolo è, come in figura, a destra di oB, ossia dalla parte verso cui l'armatura ruota, la coppia si oppone al movimento, obbliga a spendere un lavoro; l'apparecchio funziona come una dinamo. Se invece l'angolo Bos giace a sinistra di oB, ossia dalla parte opposta al movimento, la coppia agisce nel verso della rotazione, essa fa un lavoro; l'apparecchio funziona come motore elettrico; esso è, nella forma più semplice, un motore sincrono.

La coppia motrice di questo motore varia tra 0 ed $\frac{1}{2} AB$ quando ς varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Per valori di ς minori di $\frac{\pi}{2}$ il funzionamento del motore è stabile. Se infatti si aumenta la coppia resistente, l'armatura si attarda alquanto, cresce l'angolo ς e cresce con esso il momento della coppia motrice. Se invece si diminuisce la coppia resistente, l'armatura accenna per un momento ad accelerarsi, diminuisce così l'angolo ς e con esso diminuisce la coppia motrice.

15. Motori asincroni. — *Armatura chiusa posta in un campo magnetico rotante.* — Consideriamo in secondo luogo una armatura formata di N spire, o di N spirali elementari, chiuse su se stesse in corto circuito e disposte regolarmente ad uguali distanze angolari, in altrettanti piani diametrali, tutt'attorno all'asse di rotazione. Diciamo S la superficie, r la resistenza ed L il coefficiente di autoinduzione di una delle spirali. Immaginiamo poi che l' armatura si trovi in un campo magnetico rotante, nel quale l'induzione magnetica, costante ed uniforme, abbia il valore B e ruoti *relativamente alla armatura* con una frequenza u.

Nella spirale elementare colla normale della quale l'induzione B fa, alla fine del tempo t, un angolo α, passa in tale istante un flusso d'induzione $BS \cos \alpha$; quindi, per la variazione di α dovuta alla rotazione di B rispetto all'armatura, si ha nella spirale una forza elettromotrice

$$2\pi u \mathrm{BS} \operatorname{sen} \alpha.$$

Questa forza elettromotrice produce nella spirale elementare una corrente di intensità i data dalla formola

$$i = \frac{2\pi u}{\rho} \mathrm{BS} \operatorname{sen} (\alpha - \varphi),$$

ove φ è il valore angolare del ritardo di fase della corrente rispetto alla forza elettromotrice, dato dalla relazione

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2\pi u \mathrm{L}}{r},$$

e ρ è la resistenza apparente della spirale, ossia

$$\rho = \sqrt{r^2 + 4\pi^2 u^2 \mathrm{L}^2}.$$

Tale corrente equivale ad una lamina magnetica, il cui momento magnetico è uguale ad iS, ossia a

$$\frac{2\pi u}{\rho} \mathrm{BS}^2 \operatorname{sen} (\alpha - \varphi),$$

e si può rappresentare con un vettore avente la direzione della normale al piano della spirale, o, come possiamo dire concisamente, la direzione α.

Ora se si proietta questo vettore prima sulla retta che fa con B l'angolo φ, e poi sulla perpendicolare ad essa, si ha rispettivamente

$$\frac{2\pi u}{\rho} \mathrm{BS}^2 \operatorname{sen} (\alpha - \varphi) \cos (\alpha - \varphi), \quad \text{e} \quad \frac{2\pi u}{\rho} \mathrm{BS}^2 \operatorname{sen}^2 (\alpha - \varphi);$$

e se si calcolano i valori medii di queste proiezioni per α compreso tra 0 e 2π, si trova che questi valori medii sono rispettivamente zero e $\frac{1}{2} \frac{2\pi u \mathrm{BS}^2}{\rho}$. Dunque le N spirali equivalgono in complesso ad un magnete di momento magnetico

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{N}}{2} \frac{2\pi u}{\rho} \mathrm{BS}^2,$$

l'asse del quale fa con la direzione di B l'angolo costante $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Tale magnete segue B nella rotazione, stando costantemente indietro, alla distanza angolare $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Se nella fig. 13 si suppone che il campo magnetico ruoti *relativamente all'armatura* nella direzione della freccia u, e se OX è perpendicolare alla direzione OB della induzione magnetica, la direzione del magnete equivalente alla armatura è la OA, la quale fa con OX l'angolo XOA $= \varphi$.

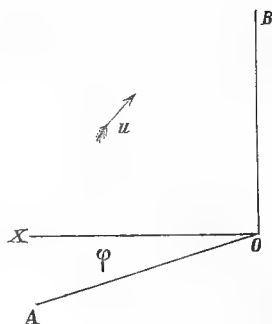



Fig. 13.

16. Motori a campo rotante. — Un'armatura come quella che abbiamo ora considerato, collocata in un campo magnetico rotante prodotto per mezzo di un sistema di correnti polifasi, costituisce un motore a campo rotante.

La coppia motrice è quella che il campo magnetico eserciterebbe se al posto dell'armatura vi fosse il magnete equivalente dianzi considerato. Il momento di essa è adunque (fig. 13) AB sen AOB; dicendolo K e ponendo per A il valore trovato nell'articolo precedente, si ha:

$$K = \frac{N}{2} B^2 S^2 \frac{2\pi u. \cos\varphi}{\rho}.$$

Ricordando che $\cos\varphi = \frac{r}{\rho}$, si può scrivere anche

$$K = \frac{N}{2} B^2 S^2 r \frac{2\pi u}{\rho^2},$$

ossia

$$K = \pi N B^2 S^2 \frac{ru}{r^2 + 4\pi^2 u^2 L^2}. \quad \dots (1)$$

In questa espressione la lettera u rappresenta la frequenza del *moto relativo* di rotazione del campo magnetico rispetto all'armatura. La formola dà la relazione tra la coppia di rotazione K e la frequenza u; ed è facile vedere quale sia l'andamento della linea, nella quale la formola si traduce quando si prende u come ascissa e K come ordinata.

La (1) si può scrivere

$$K = \frac{\pi N B^2 S^2 r}{\frac{r^2}{u} + 4\pi^2 u L^2},$$

onde appare che K cambia di segno senza cambiare di valore quando si cambia u in $-u$, ha il valore zero per $u = 0$ e per $u = \pm\infty$, ed ha un valore numerico massimo quando i due termini del denominatore, il prodotto dei quali è costante, sono uguali tra di loro, ossia quando

$$u = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{r}{L}.$$

Perciò la linea $C_1 C_2$ (fig. 14) i punti della quale hanno per ascisse i valori di u e per ordinate i corrispondenti valori di K, si compone di due rami omotetici rispetto

all'origine O, passa per l'origine, è assintotica da entrambe le parti all'asse delle ascisse e presenta due punti M, M' d'ordinata numericamente massima, i quali corrispondono alle ascisse $+\frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$ e $-\frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$. Il valore del massimo è $\frac{\pi N B^2 S^2}{2}\frac{u}{r}$.

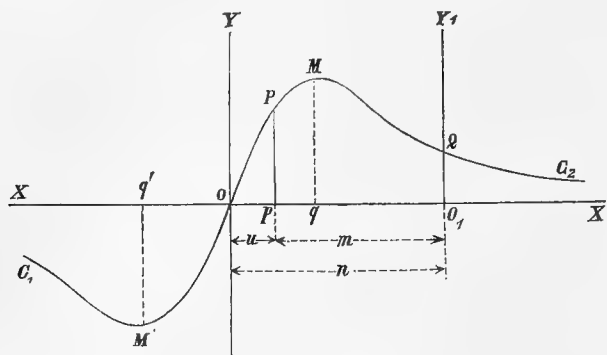



Fig. 14.

L'origine O è un punto d'inflessione, e nelle sue vicinanze la linea si confonde con una linea retta, la pendenza della quale è $\frac{\pi N B^2 S^2}{r}$. Le ascisse dei punti massimo e minimo M ed M' e la lunghezza del tratto, che praticamente si confonde con una retta, crescono col diminuire di $\frac{L}{r}$; al limite, per $\frac{L}{r}=0$, i punti M ed M' andrebbero all'infinito e la linea si trasformerebbe in una retta passante per O colla pendenza $\frac{\pi N B^2 S^2}{r}$.

Dato il valore di u, e ritenuto costante L, la coppia K varia colla resistenza r. La legge della variazione apparisce chiara se si mette l'espressione di K sotto la forma

$$K = \frac{\pi N B^2 S^2 u}{r + \frac{4\pi^2 u^2 L^2}{r}}.$$

Per $r=0$ e per $r=\infty$, K si annulla; per $r=\frac{4\pi^2 u^2 L^2}{r}$, ossia per

$$r = 2\pi u L$$

esso è massimo; il valore del massimo è $\frac{\pi N B^2 S^2 u}{2r}$, come sopra. È da notare che il valore di r, a cui corrisponde il massimo di K, è proporzionale alla frequenza u del moto relativo tra il campo e l'armatura.

17. — In ciò che precede si è considerata la relazione tra la coppia di rotazione e la frequenza u del *moto relativo* del campo rotante rispetto alla armatura. Per trovare ora la relazione tra la coppia e la velocità della rotazione dell'armatura basta osservare, che se si rappresenta, come al solito, con n la frequenza del campo magnetico rotante, e se con m si rappresenta la frequenza della rotazione dell'armatura, ossia il numero di giri che l'armatura fa in 1'', si ha

$$u = n - m.$$

Portando questo valore nella (1) si ha

$$K = \pi N B^2 S^2 \frac{r(n-m)}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n-m)^2}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

la quale dà la relazione cercata.

La curva in cui si traduce questa formola, quando si prende come ordinata la coppia K e come ascissa la frequenza m della rotazione dell'armatura, si può dedurre subito dalla curva C_1OC_2 della fig. 14; anzi è la stessa curva riferita soltanto ad altri assi di coordinate. Si porti infatti su OX′ una lunghezza $OO_1 = n$, e sia p il piede dell'ordinata di un punto qualunque P della curva C_1C_2; si ha $O_1p = OO_1 - Op = n - u = m$. Dunque se si prende il punto O_1 come origine delle coordinate, la retta O_1Y_1 parallela ad OY come asse delle ordinate e la O_1OX, diretta da destra verso sinistra, come parte positiva dell'asse delle ascisse, la linea $C_1M'OPMQC_2$ è senz'altro quella i punti della quale hanno per coordinate i valori di m e di K.

La curva mette in evidenza le principali proprietà del motore. Bisogna distinguere due casi: il caso di $n \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$ e quello di $n > \frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$.

Nel primo caso, quando $n \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$, quando cioè $2\pi n L \leqq r$, si ha $OO_1 \leqq Oq$, l'origine O_1 cade a sinistra di q, od in q. Allora K ha il valor massimo per $m = 0$: la coppia motrice è massima quando l'armatura non ruota ancora, è massima nel momento della messa in moto. Se a partire dal riposo, ossia da $m = 0$, si fa crescere m, K diminuisce fino ad annullarsi per $m = n$ e a diventare negativo per $m > n$. Il funzionamento del motore è stabile. Infatti se cresce la coppia resistente e se perciò diminuisce m, cresce pP, cresce cioè anche la coppia motrice K fino a diventare uguale al nuovo valore della coppia resistente. Se viceversa diminuisce la coppia resistente e se perciò la velocità aumenta, diminuisce pP, ossia diminuisce anche la coppia motrice K fino a ristabilire l'equilibrio.

Nel secondo caso, quando $n > \frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$, ossia quando $2\pi n L > r$, si ha $OO_1 > Oq$, l'origine O_1, cade a destra di q. Allora per $m = 0$ la coppia motrice K ha un valore O_1Q minore del massimo qM. Se si fa crescere m a partire dal valor zero, K comincia a crescere e raggiunge il valore massimo qM quando $m = O_1q = O_1O - Oq = n - \frac{r}{2\pi L}$. Dopo di ciò, se m cresce ancora, K diminuisce fino ad annullarsi per $m = n$ ed a diventare negativo per $m > n$. Il funzionamento del motore è stabile per $m > O_1q$, ossia per $m > n - \frac{r}{2\pi L}$, perchè allora, come nel caso precedente, un aumento della coppia resistente, provocando una diminuzione di m, dà luogo ad una diminuzione di K, per cui si ristabilisce l'equilibrio. Ma per $m \leqq n - \frac{r}{2\pi L}$ il funzionamento del motore è instabile. Se infatti per un aumento della coppia resistente si verifica una diminuzione di m, questa diminuzione dà luogo ad una diminuzione della coppia motrice K e quindi ad una ulteriore diminuzione di m; e questo effetto si riproduce e si moltiplica fino a tanto che il motore si riduce al riposo.

In tutti i casi K si riduce a zero per $m=n$ e diventa negativo per $m>n$. Ciò vuol dire che in ogni caso non si può far girare l'armatura con una frequenza superiore a quella delle correnti, se non per mezzo di una coppia motrice applicata dall'esterno all'albero, se non colla spesa di un lavoro. La coppia a ciò necessaria ha il momento massimo $q'M'$ quando

$$m = O_1O + Oq' = O_1O + Oq = n + \frac{r}{2\pi L}.$$

Nel secondo caso or ora considerato, quando cioè $2\pi n L > r$, può accadere (e accade comunemente quando n è grande) che il valore O_1Q di K corrispondente ad $m=0$ sia insufficiente per l'avviamento del motore. Allora si può aiutare l'avviamento inserendo nel circuito dell'armatura una resistenza non induttiva, facendo cioè crescere r senza aumentare L. Infatti il valore K_0 di K che la formola (2) dà per $m=0$, valore che si può scrivere:

$$K_0 = \pi N B^2 S^2 \frac{n}{r + \frac{4\pi^2 n^2 L^2}{r}},$$

è massimo per $r = 2\pi n L$; e perciò, finchè r è minore di $2\pi n L$, esso cresce col crescere di r. L'efficacia di questo artifizio per accrescere K_0 nel momento della messa in marcia è tanto maggiore quanto più è grande la frequenza n delle correnti adoperate; ed è precisamente nel caso di grandi frequenze che esso può essere necessario. Il motore può avviarsi da sè, senza speciali provvedimenti, ed ha un funzionamento più stabile quando la frequenza n è piccola.

18. Armatura chiusa posta in un campo magnetico alternativo. Motori asincroni monofasi. — Si immagini ora che la stessa armatura già considerata all'art. 15 sia collocata, non più in un campo magnetico rotante, ma in un campo magnetico alternativo di direzione fissa; ciò che allora ha da accadere si può facilmente dedurre dalle cose or ora dette.

Il campo magnetico alternativo equivale a due campi rotanti in direzioni opposte; similmente le correnti indotte nell'armatura equivalgono a due magneti rotanti in direzioni opposte; sull'armatura agisce adunque una coppia uguale alla risultante di quelle esercitate dai due campi sui due magneti rotanti. Ma per le cose dette all'art. 12, caso 3°, i valori medii delle coppie prodotte da ciascuno dei campi sul magnete rotante nel verso opposto sono uguali a zero, dunque il valore medio del momento della coppia risultante totale agente sull'armatura è semplicemente uguale alla differenza tra quello della coppia che il campo rotante verso destra esercita sul magnete rotante verso destra, e quello della coppia che il campo rotante a sinistra produce sul magnete rotante verso sinistra. Detti K_1 e K_2 i momenti di queste due coppie, e detto K il momento della coppia risultante agente sull'armatura, preso come positivo quando la coppia è diretta verso la destra, si ha

$$K = K_1 - K_2. \qquad (3)$$

Le coppie K_1 e K_2 si calcolano colla formola (1) dell'art. 16. Si deve a quest'uopo ritenere che B rappresenti il valore della induzione magnetica in ciascuno dei due campi rotanti in cui si è scomposto il campo alternativo dato, si deve cioè ritenere che il valore massimo dell'induzione magnetica in quest'ultimo sia rappresentato con 2B.

Si devono poi sostituire nella formola, alla frequenza u del moto relativo, successivamente i valori u_1 ed u_2 corrispondenti ai moti che i due campi rotanti hanno *relativamente all'armatura*. Ora se si suppone che l'armatura ruoti *verso destra* con una frequenza m, e se si rappresenta con n la frequenza del campo magnetico alternativo, si ha

$$u_1 = n - m, \qquad u_2 = n + m;$$

dunque

$$K_1 = \pi N B^2 S^2 \frac{r(n-m)}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n-m)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

$$K_2 = \pi N B^2 S^2 \frac{r(n+m)}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n+m)^2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

e quindi

$$K = \pi N B^2 S^2 r \left[\frac{n-m}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n-m)^2} - \frac{n+m}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n+m)^2} \right]. \quad (6)$$

Le linee, che rappresentano le relazioni tra K_1, K_2, K e la frequenza m della rotazione dell'armatura, si possono ricavare subito dalla $C_1 O C_2$ che nella fig. 14 rappresenta l'equazione (1):

La $C_1 O C_2$ è riprodotta e segnata colle stesse lettere nella fig. 15, ove, come nella 14, il punto O è l'origine delle u ed il punto O_1, alla distanza $O O_1 = n$ da O, è l'origine delle m.

Si prenda (fig. 15) $O_1 p_1 = O_1 p_2 = m$, e si tirino le corrispondenti ordinate $p_1 P_1$ e $p_2 P_2$; si ha subito: $O p_1 = O O_1 - p_1 O_1 = n - m$ ed $O p_2 = O O_1 + O_1 p_2 = n + m$.

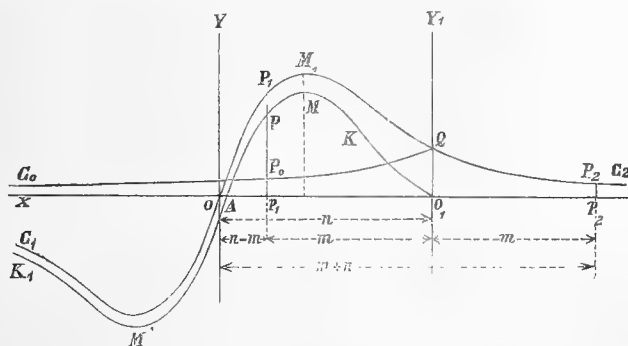



Fig. 15.

Dunque le ordinate $p_1 P_1$ e $p_2 P_2$ rappresentano rispettivamente K_1 e K_2. Per avere K basta sottrarre $p_2 P_2$ da $p_1 P_1$. Se si prende su $p_1 P_1$ il segmento $P_1 P = p_2 P_2$, il rimanente segmento $p_1 P$ rappresenta K, ed il punto P è un punto della curva che dà K in funzione di m, riferita agli assi coordinati $O_1 X$ ed $O_1 Y_1$.

Quale debba essere l'andamento della linea K si vede anche più chiaramente se si disegna in $Q P_0 C_0$ la linea simmetrica, rispetto all'asse $O_1 Y_1$, alla porzione $Q P_2 C_2$ della $C_1 O C_2$. Allora il valore di K corrispondente al valore $O_1 p_1$ di m risulta rappresentato dal segmento $P_0 P_1$ compreso fra le due linee $Q P_1 C_1$ e $Q P_0 C_0$. A questo segmento è uguale, per la linea K, l'ordinata $p_1 P$ corrispondente all'ascissa $m = O_1 p_1$.

L'esame della curva K mette in chiaro le principali proprietà del motore. Il momento K della coppia agente sull'armatura è nullo quando $m = 0$, ossia quando

l'armatura è in riposo; ma se questa gira, subito K prende valori diversi da zero, e se la frequenza m della rotazione non supera il valore rappresentato in figura con O_1A, esso è positivo, ossia la coppia ha il verso stesso della rotazione, è una coppia motrice. Se, partendo dal riposo, l'armatura prende velocità crescenti, la coppia, nulla da principio, va crescendo anch'essa fino ad un massimo, raggiunto il quale, se m seguita a crescere, essa diminuisce rapidamente, e si riduce di nuovo a zero quando m raggiunge un determinato valore O_1A alquanto inferiore ad n. Pei valori di m maggiori di O_1A la coppia K diventa e rimane sempre negativa, ossia essa è opposta alla rotazione, è una coppia resistente.

Il tratto discendente MM' della curva corrisponde ad un funzionamento stabile del motore. Infatti se mentre l'armatura gira colla frequenza $m = O_1p_1$ e colla coppia motrice p_1P, la coppia resistente viene ad aumentare alquanto e diventa maggiore di p_1P, la velocità dell'armatura diminuisce, O_1p_1 diminuisce, e cresce la coppia motrice p_1P fino a ristabilire l'equilibrio. Se similmente la coppia resistente viene a diminuire, l'armatura si accelera, p_1 si sposta verso sinistra e la coppia motrice p_1P diminuisce anch'essa.

Invece il funzionamento non è stabile pel tratto ascendente O_1M della linea, ossia per valori di m minori di quello a cui corrisponde il massimo della coppia motrice. Allora infatti una diminuzione di velocità dovuta ad un eccesso della coppia resistente sulla coppia motrice provoca una diminuzione di quest'ultima e quindi una ulteriore diminuzione di velocità, la quale si moltiplica e si continua fino a che l'armatura si ferma completamente.

Il tratto discendente della linea K, pel quale si ha un funzionamento stabile, ha una pendenza di poco inferiore a quella della vicina linea C_1OC_2, e la pendenza di questa nel punto O (art. 16) è uguale a $\frac{\pi NB^2S^2}{r}$. Similmente il punto massimo della linea K dista assai poco da quello della linea C_1OC_2, l'ascissa del quale è $n - \frac{1}{2\pi}\frac{r}{L}$ (art. 16). Dunque se è piccola la resistenza r, il tratto utile della linea K ha una grande pendenza, e, se non è piccolissima l'induttanza L, i valori di m ad esso corrispondenti sono compresi fra limiti l'uno all'altro molto vicini. Ciò accade appunto spesso nella pratica: il motore è bensì asincrono, ma i limiti fra i quali la velocità può variare compatibilmente colla stabilità del funzionamento sono spesso molto ristretti.

La linea QP_1OC_1 (fig. 15) è quella che rappresenterebbe la relazione tra la coppia motrice e la velocità quando l'armatura, invece di essere collocata in un campo alternativo ove l'induzione magnetica ha il valore massimo 2B, fosse collocata in un semplice campo magnetico rotante, ove l'induzione avesse il valore costante B. Perciò la fig. 15 mette in chiaro le analogie e le differenze che esistono tra le proprietà di un motore asincrono a campo alternativo e quelle di un motore a campo rotante.

Se n non è molto piccolo, e se la resistenza r dell'armatura è, come di solito, assai piccola, le due linee QP_1OC_1 e O_1KPAK_1 corrono vicinissime l'una all'altra per tutti i valori di m superiori a quelli pei quali i motori cominciano ad avere un funzionamento stabile. Dunque per tutte le velocità compatibili con un funzionamento stabile il motore monofase si comporta approssimativamente come il motore a campo

rotante; solamente la coppia motrice è in esso alcun poco più piccola e si annulla per un valore di m alcun poco minore di n. Le due linee si scostano invece notevolmente l'una dall'altra nelle parti corrispondenti alle velocità minori; e la differenza caratteristica che da ciò deriva è che per $m = 0$ il momento della coppia motrice, che nel motore a campo rotante può avere un valore O_1Q anche notevole, è nullo nel motore monofase: il motore a campo rotante può avviarsi da sè, il monofase non lo può.

L'espressione (6) della coppia motrice di un motore monofase si può trovare facilmente anche senza ricorrere al nostro metodo di trattazione de' vettori alternativi; essa fu infatti dimostrata dal Dr. J. Sahulka direttamente con procedimento puramente algebrico (1), ed è notissima. Ma l'esservi arrivati col nostro metodo giova alla intelligenza delle ragioni fisiche dei fatti, e mette in evidenza le relazioni che esistono tra un motore a campo alternativo ed uno a campo rotante. Un motore a campo alternativo si presenta come un motore a campo rotante differenziale; le sue proprietà si derivano direttamente da quelle dei motori a campo rotante.

19. — Inoltre varie considerazioni si presentano, le quali sarebbero meno ovvie colla trattazione analitica ordinaria.

Una di queste si riferisce alla natura delle correnti nell'armatura ed alle reazioni di esse sull'induttore. Le correnti dell'armatura equivalgono, come abbiamo dimostrato, a due magneti rotanti in versi opposti. I vettori che rappresentano questi magneti girano nello spazio con velocità angolari uguali e precisamente colla frequenza n del campo magnetico alternativo; essi adunque (art. 4, b) equivalgono al sistema di un vettore rotante e di un vettore alternativo. Ciò vuol dire che le correnti indotte nell'armatura producono nello spazio un flusso di induzione magnetica, il quale si può considerare come risultante dalla sovrapposizione di due flussi, uno di valore costante e di direzione rotante e l'altro di valore alternativo e di direzione fissa. Consideriamo l'uno dopo l'altro questi due flussi.

Flusso rotante. — Il flusso rotante è proporzionale alla differenza tra i *valori assoluti* dei vettori che rappresentano i due magneti rotanti equivalenti alle correnti dell'armatura (art. 4, b). Perciò esso è proporzionale ad

$$y_1 - y_2$$

ove con y_1 e con y_2 si rappresentino i valori *assoluti,* corrispondenti ad

$$u = n - m \quad \text{e ad} \quad u = n + m,$$

della funzione y di u data dalla formola

$$y = \frac{u}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 u^2 L^2}}.$$

Per farsi un'idea del modo di variarie di esso in funzione di m basta considerare l'andamento di y. Ora y ha valori assoluti uguali per u e per $-u$, è uguale

(1) J. Sahulka, *Theorie der Thomson'schen (Brown'schen) Motoren für gewöhnlichen Wechselstrom.* " Elektrotechnische Zeitschrift " — Berlin, 7 Juli 1893, pag. 391.

a zero per $u = 0$, cresce col crescere di u e per $u = \pm \infty$ tende assintoticamente verso il valore limite $\frac{1}{2 \pi L}$. Se adunque (fig. 16) si prendono come ascisse i valori di u e come ordinate i valori assoluti di y, e se si prende come origine il punto O e come direzione positiva dell'asse delle u la OX', si trova la linea $F_1 O F_2$ che ha per assintoto la retta LL parallela all'asse delle ascisse. Per trovare $y_1 - y_2$ si

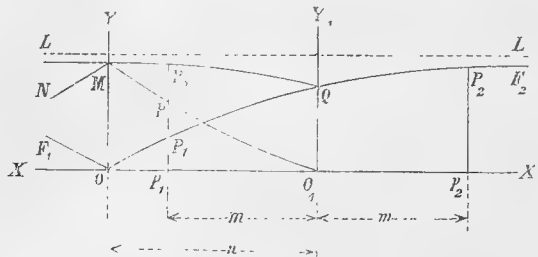



Fig. 16.

prendano $O O_1 = n$ ed $O_1 p_1 = O_1 p_2 = m$; risultano $O p_1 = n - m$, $O p_2 = n + m$, quindi le ordinate $p_1 P_1$ e $p_2 P_2$ rappresentano y_1 ed y_2 e si ha subito $y_1 - y_2 = p_1 P_1 - p_2 P_2 = -(p_2 P_2 - p_1 P_1)$.

Il modo di variare di questa differenza apparisce chiaro se si disegna in $Q P_0 M$ la linea simmetrica rispetto ad $O_1 Y_1$ alla $Q P_2 F_2$. Allora si ha $y_1 - y_2 = - P_1 P_0$. Si può, se si vuole, prendere questa lunghezza come ordinata, e così si trova, che prendendo come origine il punto O_1, come asse delle ordinate la retta $O_1 Y_1$ e come direzione positiva dell'asse delle ascisse la $O_1 X$, $y_1 - y_2$ è rappresentata in funzione di m dalla curva O_1 PMN.

Il segno (—) del valore trovato derivante dall'essere $p_2 P_2 > p_1 P_1$ dice che il flusso considerato ruota verso la sinistra, ossia in direzione opposta al movimento dell'armatura. Ora questo flusso che ruota verso la sinistra, produce nel metallo della parte fissa della macchina correnti indotte sulle quali poi esso esercita forze tendenti a trascinarle nella propria rotazione, verso la sinistra. Dunque viceversa le correnti indotte nella parte fissa della macchina sollecitano l'armatura a girare verso la destra, nel verso cioè nel quale essa già si muove. Quindi risulta che il flusso rotante dovuto alle correnti nell'armatura provoca correnti indotte, le quali aiutano la rotazione e dànno luogo ad una coppia, che si aggiunge alla coppia principale di cui si è parlato nell'articolo precedente.

Il valore della coppia dovuta alle correnti indotte varia col variare di m e cresce col crescere dell'ordinata p_1 P della linea O_1 MN. Essa è nulla per $m = 0$ e massima per $m = n$. In grazia di essa la coppia totale agente sull'armatura invece di annullarsi per $m = O_1 A$ (fig. 15), non si annulla se non per un valore alcun poco più grande, più vicino ad n.

Flusso alternativo. — Il vettore alternativo risultante dalla composizione di due vettori rotatorii di versi opposti ha una ampiezza uguale al doppio del più piccolo fra i due vettori componenti (art. 4). Perciò il flusso alternativo è proporzionale a

$$\frac{n - m}{\sqrt{r^2 + 4 \pi^2 L^2 (n - m)^2}}.$$

Esso può essere nullo solamente per $m = n$.

LENTA POLARIZZABILITÀ DEI DIELETTRICI

LA SETA COME DIELETTRICO

NELLA

COSTRUZIONE DEI CONDENSATORI

MEMORIA

dell'Ingegnere

LUIGI LOMBARDI

Approvata nell'Adunanza del 3 Dicembre 1893

Delle sostanze dielettriche in genere, e particolarmente di molte sostanze organiche le quali più spesso si adoperano come isolanti, così negli apparecchi più delicati di laboratorio come in quelli più grandiosi di trasmissione d'energia, le proprietà sono pochissimo conosciute per ora, sebbene il loro studio interessi da vicino molti problemi importanti della scienza della Elettricità. Questa Memoria ha per oggetto, come modesto contributo a quello studio più vasto, l'esame di alcune di quelle proprietà e di alcuni fenomeni di polarizzazione dielettrica, oltrechè lo studio della applicabilità della seta come dielettrico nei condensatori.

Tale esame e tale studio furono da me intrapresi nei primi mesi di quest'anno presso il Politecnico di Zurigo per consiglio del Prof. Dott. H. F. Weber, a cui, per la guida illuminata e cortesissima, e pel soccorso potente dei mezzi del suo splendido laboratorio, in questo come in tutti gli altri miei piccoli lavori ivi eseguiti, mi è primo e caro dovere attestare qui la più viva riconoscenza.

1. — Polarizzabilità lenta di alcuni dielettrici.

Era stato constatato che spirali bifilari, quali si trovano comunemente avvolte per scopi di misura e per applicazioni di laboratorio, presentano una capacità elettrostatica notevole, in molti casi superiore di gran lunga a quella che i rapporti di superficie e distanza d'armature farebbero prevedere. Il fatto che la quantità di elettricità che ivi si poteva immagazzinare cresceva marcatamente colla durata di carica, e che la resistenza apparente, determinata colla misura diretta della corrente

prodottavi da una nota forza elettromotrice, o mediante la perdita di carica elettrostatica, andava col tempo lungamente crescendo, si accordava coll'aumento di carica e di resistenza apparente che è notissimo nelle misure presso i cavi e che interviene per quasi tutti i coibenti. Si suol dire che questi si vanno per azione delle forze elettrostatiche polarizzando; ma la definizione del fenomeno non dice molto sulla natura intima di esso, e sulle cause che lo producono.

Di un condensatore a dielettrico lentamente polarizzabile varia col tempo la carica, che si suol misurare mediante la prima elongazione di scarica attraverso un galvanometro balistico, siffattamente che questa è funzione non solo della durata di carica che l'ha immediatamente preceduta, ma di tutti i processi di carica e scarica a cui il sistema fu assoggettato in tempi prossimi a quello d'osservazione. Con serie sistematiche di cariche a durata regolarmente crescente e decrescente si possono far percorrere al sistema dei cicli di polarizzazione elettrica che hanno quasi tutti i caratteri dei cicli di polarizzazione magnetica. Più tardi saranno resi più chiari alcuni elementi di questa analogia. Come nelle sostanze magnetiche la lenta polarizzabilità origina la parte di magnetismo residuo che col tempo va gradatamente scomparendo, così la lenta polarizzabilità dei dielettrici dà luogo ai fenomeni di carica residua, pei quali non si è ancora formulata una legge precisa.

Nelle spirali bifilari che s'erano sperimentate qui l'isolamento tra i fili era un comune avvolgimento di cotone o di seta, ed in alcune spirali maggiori di sostanza organica analoga impregnata di materia isolante. In queste condizioni è chiaro che il coibente non è affatto preservato dal contatto coll'aria esterna, e perchè questa circola abbondantemente negli interstizi della massa, che è quasi sempre molto igroscopica, ne rende le proprietà eminentemente variabili. Per uno studio sistematico delle proprietà che a noi interessavano non si poteva ad altro ricorrere che ad un vero condensatore, e questo fu costrutto sul tipo dei condensatori comuni con armature rettangolari di stagnola, isolandole con fogli di seta. La seta tra le sostanze organiche si presentava specialmente opportuna, sia per la facilità di ottenerla dal commercio pura ed a tipo costante; sia perchè di essa è noto il grande potere isolante, e furono per le sue più frequenti applicazioni meglio studiate le proprietà fisiche ed elastiche, delle quali il diretto confronto colle proprietà dielettriche pareva specialmente degno di nota.

2. — Un condensatore a seta: costante del dielettrico.

Il primo condensatore fu costrutto con 20 armature di stagnola di superficie $S = 28 \times 28$ cm^2, alternate con fogli di stoffa di seta, leggermente giallognola, così detta seta cruda del commercio, ricevuta direttamente dalla fabbrica, e non altrimenti essiccata che mediante una leggera soppressatura con ferro caldo per eliminarne le increspature; nessuna cura particolare fu presa parimenti per seccare la stagnola, ricavata da fogli soliti arrotolati.

Per avere una idea dell'ordine di grandezza della costante di questo dielettrico, sebbene esso in pratica non possa adoperarsi se non in condizioni analoghe alle attuali cioè in presenza di una quantità variabile di aria, la capacità fu esattamente

determinata nelle circostanze ove la seta era allo stato naturale, e dove la sovrapposizione accurata dei fogli di armatura permetteva di ritenerne utilizzata tutta la superficie. La distanza di questi, che dipendeva naturalmente dalla pressione, fu definita dalla media di parecchie misure di spessore eseguite con una vite micrometrica sopra un piccolo sistema di fogli di stagnola e di seta, alternati come nel condensatore, e sotto un peso proporzionalmente paragonabile. Lo spessore di un foglio di seta solo tra due superficie levigate darebbe una dimensione troppo grande; quello di molti fogli di seta semplicemente sovrapposti e compressi ne darebbe una troppo piccola, perchè i fogli di stagnola si adattano, ma solo in parte, alle piccole sinuosità della stoffa. La distanza media delle superficie di armatura era pertanto $d=0.131$ mm.; la capacità 0.133 mF: onde, dicendo μ la costante del dielettrico costituito dalla mescolanza di sostanza solida della seta e gasosa dell' aria e delle tracce di vapor acqueo presenti, era

$$\mu = \frac{0.133 \times 10^{-15} \times 9 \times 10^{20} \times 4\pi \times 0.0131}{28 \times 28 \times 19} = 1.32,$$

esprimendo in unità elettrostatiche la capacità misurata in microfarad e definita dalla formola

$$C = \mu \frac{S}{4\pi d}$$

che vale per condensatori a facce piane e superficie indefinita.

Essendo l'energia immagazzinata in un condensatore, a parità di forza elettrostatica, proporzionale al volume del dielettrico, la costante μ' della parte solida del dielettrico si deduce con una relazione semplice di proporzionalità. Se cioè la frazione percentuale del volume totale da questa occupata è x,

$$\mu \times 1 = \mu' \times x + 1 \times (1 - x)$$

ritenendo la costante della parte gasosa eguale all'unità.

Per determinare x, non potendosi applicare i metodi più elementari di misura del volume specifico per immersione, perchè sarebbe difficilissimo espellere dalla massa tutta l'aria, non può ricorrersi razionalmente che alla variazione di volume di una nota massa gasosa in recipiente chiuso; in presenza della sostanza porosa, sotto pressione diversa.

Le osservazioni furono fatte con un volumenometro a ciò costruito, consistente in un tubo manometrico graduato, di alcuni centimetri di diametro, dove pezzi di stoffa di parecchi decimetri quadrati potevano essere introdotti dalla parte superiore, chiusa a vite ermeticamente; alla parte inferiore si raccorda un tubo d'unione flessibile con una vaschetta che si può spostare lungo un'asta verticale. L'apparecchio è parzialmente riempito di mercurio, mentre una chiavetta superiore permette la circolazione dell'aria. Chiusa quella, la pressione può variarsi spostando la vaschetta tra limiti relativamente estesi, e misurarsi con grande approssimazione leggendo le differenze di livello col catetometro a meno di pochi centesimi di millimetro; la pres-

sione esterna è letta nello stesso luogo all'atto di ogni osservazione. La calibrazione del tubo per unità di lunghezza si può fare facilmente capovolgendolo e pesando il mercurio che effluisce dalla chiavetta per abbassamenti esattamente misurati di livello. Però la verifica dello zero della scala non può essere fatta così pesando l'ultima parte della colonna di mercurio, poichè oltre che della capacità della chiavetta occorre tener conto dello spazio che il mercurio lascia libero per l'incurvarsi del menisco sotto il piano orizzontale tangente nel vertice: a questo corrisponde un peso che sarebbe due volte da sommare all' ultima pesata. Si deve dunque cercare lo zero della scala, se i volumi si esprimono in altezze, applicando ancora la legge di Mariotte ad una quantità d'aria isolata nell' apparecchio senza introdurvi corpi estranei. Le due determinazioni fatte con molta cura potrebbero definire con molta approssimazione il volume rimasto libero per effetto della capillarità sotto il piano di livello superiore.

Detta H l'altezza della colonna barometrica; h la differenza di livello del mercurio letta al catetometro; V l'altezza libera del tubo manometrico, cioè quella corrispondente allo spazio d'aria, e riferita alla scala del tubo sebbene letta col catetometro; detta v finalmente la correzione dello zero, ed x l'altezza corrispondente al volume occupato dalla seta, quella è definita dalla equazione

$$\frac{V+v}{V'+v} = \frac{H+h'}{H+h},$$

questa dalla

$$\frac{V''+v-x}{V'''+v-x} = \frac{H+h'''}{H+h''}$$

dove h ed h'' possono scegliersi eguali a zero lasciando stabilirsi il mercurio allo stesso livello coll'aprire la chiavetta. In ogni caso la sopraelevazione del mercurio nel tubo manometrico dovuta alla capillarità non eccede 1 o 2 centesimi di millimetro.

Il volume corrispondente ad 1 cm^2 di stoffa di seta fu trovato così essere 0.0065 cm^3, cioè nel condensatore il volume del dielettrico essere occupato dalla sostanza solida per una porzione eguale a $\frac{0.0065}{0.0131}$ che è con molta approssimazione la metà. Evidentemente la costante dielettrica della seta risulta così 1.64; e se questo è un valore medio per una simile sostanza, può sempre aversi una idea della costante del dielettrico in condizioni analoghe quando sia variata colla pressione la distanza delle armature, che può essere di molto ridotta. È però verosimile che le qualità diverse di seta possano avere costanti diverse non meno dei dielettrici comuni, essendone la struttura complessissima; ed è inoltre certo che la costante è largamente modificata dalla presenza di acqua condensata, avendo questa allo stato liquido un potere induttore specifico elevatissimo.

3. — Influenza dell'umidità sulle proprietà del dielettrico.

È facile vedere come per la presenza dell'acqua si modifichino svantaggiosamente le proprietà del condensatore. Si verifica difatti in parte, quando nel dielettrico è acqua condensata, il fenomeno che ha luogo quando in un liquido sono immerse due lastre od elettrodi: la quantità di elettricità che ad esse si può condurre mediante una data forza elettromotrice cresce notevolmente rispetto quella che basterebbe a caricare allo stesso potenziale il sistema delle due armature isolate, pur prescindendo dalla possibilità che succeda del liquido una scomposizione elettrolitica, la quale non permetterebbe più alcun confronto cogli elementi di una capacità elettrostatica. Il liquido si polarizza; e questa polarizzazione, che nella ipotesi di Grotthus è il 1° fenomeno della elettrolisi, consiste verosimilmente in un orientamento speciale delle molecole liquide in modo che gli elementi elettropositivi ed elettronegativi rispettivamente si volgano agli elettrodi caricati di elettricità opposta, per azione delle forze elettrostatiche. Ora è chiaro che questo orientarsi delle molecole, che devono rotare attorno ai loro centri di gravità e vincere le resistenze d'attrito originate dalle forze di coesione, non può succedere istantaneamente, ma occorre un certo tempo perchè il più gran numero di molecole abbia presa la nuova posizione di equilibrio. Non altrimenti nel condensatore occorre un certo tempo perchè la carica sia completa, poichè l' orientarsi nel campo di particelle che noi consideriamo caricate di elettricità opposte, nella direzione in cui le forze elettrostatiche le sollecitano, ha per effetto di diminuire in ogni punto il potenziale, cioè di crescere la capacità elettrostatica. Il tempo totale di carica e la carica stessa dipendono dunque dalla quantità di liquido polarizzabile condensato; perchè la presenza di un vapore secco non altera sensibilmente l'uno e l'altra, avendo i gas in genere una costante vicinissima ad 1 ed una polarizzabilità quasi istantanea.

Nel caso dei dielettrici comuni è sempre molto difficile eliminare ogni traccia di acqua condensata; difficilissimo per sostanze a struttura porosa o filiforme, quale era la seta, di cui potevasi dunque presumere che, senza precauzioni speciali, si sarebbero le proprietà mostrate imperfette e variabili col tempo.

Effettivamente, essendosi conservato il sistema isolato tra due fogli di ebanite sotto pressione notevole, ma senza protezione contro l'aria esterna, le variazioni si resero in giorni e settimane successive molto sensibili, come dimostrano i risultati seguenti di osservazioni fatte senza che il condensatore fosse stato menomamente rimosso dal posto. È detta δ' la 1ª elongazione di scarica letta al galvanometro balistico dopo una carica momentanea; δ'' la massima elongazione ottenibile prolungando gradatamente la durata di carica con un elemento Clark (1); c è la capacità in microfarad data dal confronto di questa elongazione colla massima ottenibile scaricando nelle identiche condizioni un condensatore normale caricato allo stesso potenziale; $\delta\Delta$ è la massima variazione percentuale di elongazione o di capacità apparente:

---

(1) L'ordine diverso di grandezza di queste elongazioni dipende naturalmente dalla diversa sensibilità a cui il galvanometro era disposto nel corso di altre misure.

Data d'osservazione	δ'	δ''	$\Delta\delta$	c
17 gennaio	144.0	149.0	3.3 %	0.132
18 "	140.6	146.0	3.7 %	0.134
7 febbraio	211.5	224.0	5.6 %	0.137
9 "	161.6	170.8	5.4 %	0.137
18 "	161.2	173.1	6.9 %	0.137
19 "	246.7	269.0	8.3 %	0.137
22 "	129.0	208.8	38.2 %	0.158

Evidentemente l'ultima enorme variazione improvvisamente intervenuta, e riconfermata da varie osservazioni nello stesso giorno e nei seguenti, accusa la presenza di una quantità di acqua notevole, od assorbita dall'aria eccessivamente umida esterna, o sfuggita alla condotta vicina di vapore pel riscaldamento. Essendo impossibile di continuare così le misure il condensatore fu dunque rimosso e artificialmente seccato.

Non essendo una prova fatta tenendo parecchi giorni il sistema in un piccolo spazio chiuso, in presenza di acido fosforico anidro, riuscita ad abbassare la massima variazione di carica sotto il 20 %, si dovette smontare il condensatore per ottenere dei singoli pezzi di stoffa e di stagnola un essiccamento migliore. Perciò questi furono lungamente esposti al sole, e quelli tenuti parecchie ore sotto la campana della macchina pneumatica a pressione di pochi millimetri di mercurio ed in presenza di acido fosforico. La variazione massima era tornata dopo ciò a circa 6 %; la capacità ad un valore dello stesso ordine dei primi qui riferiti, ma non direttamente confrontabile con essi non essendosi curata la sovrapposizione dei fogli di armatura esattatamente nelle condizioni precedenti.

Dei risultati di gran lunga migliori si ebbero però seccando tutti i pezzi d'armatura e d'isolante ad alta temperatura, al quale artificio non s'era voluto ricorrere prima d'aver esauriti gli altri mezzi che potevano applicarsi con sicurezza maggiore di non alterare le proprietà fisiche ed elastiche della seta.

Ma di questo si dirà dopo aver accennato ad alcune altre osservazioni eseguite nei primi giorni dopo la costruzione del condensatore, durante i quali le proprietà della seta naturale s'erano conservate più costanti. E prima di tutto converrà ricordare la forma generale della curva di carica, la quale si conserva la stessa in tutti i casi detti sopra, salvo a presentare una curvatura ed una differenza di ordinate estreme diversa.

I tempi presi come ascisse sono le durate di carica, sono ordinate le prime elongazioni di scarica. Le due curve riferite qui e riprodotte nella tavola I (fig. 1 e 2) si riferiscono alle osservazioni citate del 18 gennaio e del 18 febbraio:

t	mom.	1″	2″	3″	5″	7″	10″	15″	20″	30″	60″	300″	600″
δ'	140.6	141.9	142.6	143.0	143.5	143.8	144.1	144.4	144.5	144.7	145.0	146.0	146.0
δ''	161.2	164.8	166.2	167.3	168.7	169.9	171.0	171.8	172.2	172.8	173.1	—	—

Il tempo dopo cui non è più apprezzabile una variazione della prima elongazione di scarica non può naturalmente essere esattamente precisato, perchè la curva si accosta asintoticamente alla sua tangente orizzontale, onde la quistione non è che di sensibilità dei mezzi di osservazione. Del resto si vedrà che a quella valutazione è assolutamente da dare poca importanza, non essendo quel massimo che un valore relativo, apparente, della carica la quale continua a crescere per un tempo molto più lungo.

4. — Proporzionalità della carica al potenziale.

La proprietà più importante di un condensatore è la proporzionalità della carica al potenziale, scegliendo per questa una durata arbitraria, o tale dopo cui la quantità di elettricità scaricantesi attraverso il galvanometro balistico non sia più suscettibile di crescere. Perchè quella proporzionalità si possa verificare occorre primieramente che il dielettrico abbia una resistenza convenientemente grande, indipendente dalla forza elettrostatica a cui esso viene assoggettato, e dalla intensità della corrente che lo può attraversare. Di più occorre che in esso procedano proporzionalmente al potenziale anche i fenomeni di polarizzazione, dai quali dipende una parte notevole della capacità.

Quella proporzionalità si suole verificare in tutti i buoni condensatori da laboratorio finchè la differenza di potenziale adoperata è contenuta tra limiti opportuni, cui non suole eccedere l'uso comune degli apparecchi.

Pel condensatore a seta, a meno di differenze piccolissime comprese nei limiti dell'approssimazione conseguibile nelle misure, quella proporzionalità fu verificata in generale, successivamente descrivendo con potenziali diversi le curve di carica, e constatando che le ordinate di queste sono alla differenza di potenziale proporzionali anche per tempi brevissimi quando dal circuito di carica sia eliminata ogni resistenza e selfinduzione troppo grande, atta ad introdurre nella carica ritardi secondarî. Così con 1, 2, 3 elementi Daniell preparati di fresco si ebbero prime elongazioni di scarica dopo cariche di un millesimo di secondo ed un decimo di secondo:

$$t = 0''.001 \qquad \delta = 63.6 \;\ldots\ldots\; 127.2 \;\ldots\ldots\; 190.4$$
$$t = 0''.1 \qquad \delta' = 65.2 \;\ldots\ldots\; 130.4 \;\ldots\ldots\; 195.2.$$

E con carica di 10'', dopo cui la scarica è poco diversa in ogni caso dalla massima, con un numero crescente da 1 a 6 di elementi Clark, dei quali prima si era verificata la forza elettromotrice eguale a meno di uno per mille, si ebbero elongazioni

$$\delta = 70.5 \qquad 140.9 \qquad 211.2 \qquad 282.1 \qquad 353.4 \qquad 423.0$$

dove lo scostamento massimo dalla legge di proporzionalità non arriva a 0,4 %.

Naturalmente le deviazioni lette non possono essere confrontate senza essere affette della correzione per dedurre dalla misura proporzionale di tang. $2u$, che si fa sulla scala, quella di sen $\frac{u}{2}$, che è misura relativa della quantità di elettricità scari-

cantesi attraverso al galvanometro balistico e producente una prima deviazione u. Se tang. $2u = \frac{\delta_1}{D}$, sviluppando si trova

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \frac{1}{4\,D}\left(\delta_1 - \frac{11}{8}\,\frac{\delta_1^3}{4\,D^2} + \frac{421}{2048}\,\frac{\delta_1^5}{D^4} - \ldots\right) = \frac{1}{4\,D}\,\delta,$$

dove δ_1 sono le elongazioni lette, D la distanza della scala allo specchio.

5. — Misura della resistenza del dielettrico col metodo della perdita di carica.

Non è altrettanto semplice formarsi una idea esatta della resistenza di isolamento di un condensatore, come notoriamente non è facile eseguire una misura esatta di una resistenza polarizzabile.

Ordinariamente si ha un criterio per giudicare della isolazione di un condensatore caricandolo per un tempo determinato, in genere tanto a lungo che non cresca ulteriormente la prima elongazione di scarica, e scaricandolo dopo tempi diversi; oppure misurando in corrispondenza con un elettrometro la differenza di potenziale delle armature.

Se si ammette che il dielettrico possieda una resistenza ohmica R e che questa sia indipendente dalla differenza di potenziale V, in modo che una corrente proporzionale ad essa lo attraversi in ogni istante, e nessun altro fenomeno avvenga per cui masse elettriche possano essere disperse od assorbite, l'equazione differenziale della diminuzione di carica o di potenziale

$$-\,C\,\frac{dV}{dt} = \frac{V}{R}$$

dà subito

$$CR = \frac{t}{\log_{ip}\frac{V}{V'}}\,.$$

È il metodo notissimo detto della perdita di carica, altrettanto utile per la misura di capacità in valore assoluto, quando si lascino scaricare attraverso resistenze note, come per la misura di resistenze grandissime, attraverso cui si scarichino capacità note. Per la determinazione della resistenza di elettroliti il metodo ha il grandissimo vantaggio che la corrente che li deve attaversare è piccolissima, onde la forza elettromotrice di polarizzazione può essere trascurabile.

È però chiaro che le ipotesi su cui il metodo si fonda non sono in genere verificate.

E primieramente la carica non è in ogni istante proporzionale alla differenza di potenziale in tutti i casi dove il dielettrico si polarizza con una certa lentezza, cosa che succede quasi sempre nella pratica, nè allora è legata tanto semplicemente al potenziale la diminuzione della carica apparente. Qualunque sia la modificazione dello stato molecolare che noi diciamo polarizzazione, è certo che in questa le mole-

cole presentano una energia diversa, e perciò a produrla occorse una spesa di lavoro che le forze elettrostatiche hanno eseguito, e che i fenomeni di depolarizzazione ci possono restituire in tutto od in parte. La spesa di lavoro si presenta sotto forma di una quantità di elettricità che penetri nel dielettrico, e che è comunemente detta carica assorbita. Ora questo assorbimento che, se le armature son legate in permanenza alla pila, si fa a spese della forza elettromotrice di questa, se le armature sono isolate continua a farsi a spese della loro differenza di potenziale, e della quantità di elettricità che sopra di esse è distribuita. La differenza di potenziale e la carica apparente diminuiscono dunque anche là dove il dielettrico abbia una resistenza ohmica infinita; diminuiscono finchè il dielettrico sia polarizzato completamente, cioè finchè l'equilibrio interno nuovo si sia stabilito tra le forze molecolari e le forze elettrostatiche; e la quantità di energia che a ciò si è spesa è naturalmente variata in ogni unità di tempo successiva, accostandosi asintoticamente ad un valore nullo.

Il fatto che si verifica in modo evidente nei condensatori, perchè ivi le scariche residue ne attestano le conseguenze e ne possono dare la misura, avviene sempre dove una porzione del circuito di una corrente sia costituita da una resistenza polarizzabile, perchè anche qui esistono sempre due elettrodi, e tra essi, che sono ad una data differenza di potenziale, esiste un campo elettrostatico. In tali condizioni il quoziente della caduta di potenziale per la quantità di elettricità che nell'unità di tempo attraversa la superficie di confine degli elettrodi non ha nulla a che fare con una resistenza nel significato ordinario della parola, e la definizione di resistenza che se ne suol dare è assolutamente arbitraria: ed è arbitraria la misura che durante la fase variabile della polarizzazione si può fare della resistenza d'isolamento qui come nel caso dei cavi ed in tutti gli altri analoghi.

Una resistenza in condizioni esterne invariate non deve avere caratteri di variabilità, e perciò negli esempi detti non può essere valutata che allo stato di regime: ed allora veramente può essere definita come quoziente di una differenza di potenziale per una corrente, quando questa nel tempo si conserva inalterata, sebbene non si implichi con ciò la indipendenza del valore così definito dalla corrente o dal potenziale, la quale può solo essere verificata dalla esperienza. Non altrimenti assurdo sarebbe valutare la resistenza interna di un accumulatore dividendo la differenza di potenziale degli elettrodi alla carica per la corrente; salvo che qui noi possiamo sempre determinare, interrompendo istantaneamente la corrente, la forza elettromotrice dovuta al lavoro di scomposizione chimica che tra gli elettrodi si è eseguito, od al lavoro che le forze di affinità chimica tendono a fare. Nel caso di un dielettrico la modificazione è solamente fisica, verosimilmente non riguarda che il raggruppamento delle molecole; ma noi non possiamo impedire che essa si compia a spese della energia data alle armature, e, finchè essa dura, se l'energia da essa consumata non ci è nota per esperienze precedenti, non possiamo distinguerla da quella che si trasforma in calore per la conduttività del mezzo, per la legge di Joule.

Se una conduttività nel dielettrico esiste, e questo si verifica sempre, non si può nemmeno pensare di prolungare tanto la carica che la polarizzazione sia completa, per determinare poi le perdite di carica come differenza delle prime elongazioni di scarica dopo tempi diversi di isolamento, poichè l'equilibrio delle molecole dipendendo in ogni istante dalla forza elettrostatica attuale è continua-

mente variato al diminuire la carica per le correnti di conduzione. Ora le molecole riavvicinandosi all'equilibrio primitivo, ch'esse avevano nel dielettrico non polarizzato, restituiscono una parte dell'energia che per la loro polarizzazione s'era spesa, dovendo essere l'energia immagazzinata, che è la misura per noi della polarizzazione, proporzionata in ogni istante all'intensità attuale del campo. Così le armature mostrano una differenza di potenziale in tempi successivi maggiore di quella che esse avrebbero conservata se i soli fenomeni di conduzione si fossero verificati. Solamente nel caso che nessuna conduzione o dispersione elettrica avvenisse la polarizzazione non originerebbe fenomeni secondarî quando fosse completa; ma allora la differenza di potenziale si conserverebbe indefinitamente identica.

I fenomeni di scariche residue non sono che quelli ora accennati nel caso in cui le armature siano state una volta scaricate; essi consistono cioè nello scaricarsi della quantità di elettricità che s'è venuta di nuovo accumulando sulle armature, in esse sviluppando una differenza di potenziale dopo che quella prima esistente s' era una volta ridotta a zero. La nuova differenza di potenziale va dunque crescendo; però non indefinitamente, nè finchè tutta la massa elettrica assorbita dal dielettrico sia stata restituita alle armature, perchè evidentemente, per il potenziale crescente, cresce la forza nel campo elettrostatico, e quando essa fa equilibrio alle forze molecolari che sono venute gradatamente prevalendo si è in una nuova condizione di regime, che, se non intervenisse la conduzione o dispersione dell'energia per isolamento imperfetto, non avrebbe nessun motivo di variare col tempo.

In pratica la quantità di elettricità che dopo la 1ª scarica resta immagazzinata nel sistema suol essere una frazione piccola della quantità totale che si era data, onde è piccola la differenza massima di potenziale che essa basterebbe a sviluppare di nuovo, e questo massimo non sarebbe raggiunto prima di un tempo notevole, avvenendo i fenomeni di depolarizzazione come quelli di polarizzazione sempre lentamente. Perciò la scarica secondaria che si ricava dopo la scarica principale suole mostrarsi tanto maggiore quanto maggiore è il tempo che nei limiti ordinari di osservazione si lascia precedere ad essa. Se poi la scarica secondaria si misura colla deviazione del galvanometro balistico, non si trova quasi mai minore sensibilmente della somma di scariche che si sarebbero potute avere chiudendo nello stesso intervallo di tempo le armature parecchie volte in corto circuito; ma è evidente che là la depolarizzazione ha dovuto essere meno intensa.

Il caso più comune è quello in cui la carica del condensatore non sia stata prolungata fino a polarizzazione completa, cioè non abbia raggiunto il suo massimo valore totale. Allora la curva che si vuol rilevare per avere una idea della isolazione, cioè la curva della scarica primaria diminuente al crescere della durata di isolamento, presenta un carattere generale che la allontana dalla forma teorica. Essa cioè si abbassa nei primi istanti più rapidamente, ove una parte della carica dalle armature penetra ancora nel coibente; poi acquista per un certo tratto una curvatura sensibilmente normale, cioè conforme ad una legge logaritmica di decrescenza, là dove la polarizzazione che è andata crescendo finì per corrispondere alla intensità del campo che venne decrescendo, dove cioè l'effetto della polarizzazione potè essere trascurabile rispetto quello della conduzione. Però la curvatura non si conserva normale, perchè decrescendo sempre la differenza di potenziale interviene la depolarizzazione a sopperire

in parte alla carica che le armature perdono per conduzione, e la curva si accosta di più ad una orizzontale. Se le osservazioni si prolungassero più che per misure ordinarie non si soglia, si arriverebbe verosimilmente ad un istante ove la curva quasi si confonde colla parallela all'asse delle ascisse, se la conduttività del mezzo è molto piccola rispetto la sua polarizzabilità. In fatto naturalmente la curva continuerebbe lentamente ad abbassarsi, perchè per conduzione finirebbe di esaurirsi tutta la carica che nel dielettrico era immagazzinata. Evidentemente dalla curva di un fenomeno tanto complesso, e diverso da quello ipotetico, è impossibile avere valori confrontabili delle differenze di logaritmi in tempi successivi.

Se il metodo è applicato per la misura di una resistenza esterna al condensatore è chiaro che osservazioni analoghe valgono ancora, perchè i fenomeni di polarizzazione e di conduzione interna avvengono sempre parallelamente a quelli di conduzione esterna e contemporaneamente ad essi. Se la curva delle prime elongazioni di scarica del condensatore solo, isolato durante tempi diversi, ci definisce quella che può dirsi resistenza apparente interna, la curva delle elongazioni quando il condensatore è chiuso per tempi diversi sopra una resistenza esterna ci definisce la risultante delle due resistenze in parallelo, apparente interna, ed esterna apparente od ohmica secondo che anche qui intervengono o non fenomeni secondari di polarizzazione.

Il metodo non perde nondimeno tutto il suo valore quando i fenomeni secondari giuochino una parte non importante nel fenomeno principale; ma perchè è praticamente impossibile che essi non abbiano un'influenza sui risultati, occorrerà portare a questi una correzione corrispondente.

Se si misura cioè una resistenza esterna, rispetto la quale la apparente resistenza interna del condensatore sia grandissima, come può verificarsi adoperando un buon condensatore normale, non sarà irrazionale correggere semplicemente le prime elongazioni di scarica lette di tanto quanto erano le perdite corrispondenti lette col condensatore isolato. Rilevando successivamente e nelle identiche condizioni le due curve, le differenze delle loro ordinate si possono cioè ritenere eguali alle perdite di carica che sarebbero avvenute attraverso alla resistenza sola esterna, sebbene questo non sia vero, essendo in ogni istante la differenza di potenziali sulle armature minore del suo valore teorico, e minore la corrente di scarica attraverso la resistenza esterna.

Che se si tratta di determinare la resistenza interna del condensatore, occorre tener conto separatamente della energia spesa per la polarizzazione; e perchè questa noi possiamo ricuperare con scariche successive, ci sarà lecito ricorrere ad una correzione analoga alla precedente in analoghe condizioni, cioè quando i fenomeni di polarizzabilità successiva non abbiano importanza grande rispetto quelli di conduttività. Naturalmente occorrerà prescindere dai primi tempi di isolazione, durante i quali la polarizzazione si fa ancora più energica; poi bisognerà ad ogni somma di scariche residue, rilevata dopo una fase qualunque di isolamento, sottrarre quella avuta quando ad una carica eguale aveva tenuto dietro una scarica immediata, perchè prima di questa il potenziale non aveva subìto alcuna variazione dal valore normale. Però sarà molto più difficile che questa correzione sia fatta con l'esattezza della prima, perchè le scariche residue non si possono ricavare che in tempi lunghi,

e la moltiplicità delle letture di deviazioni che vanno diminuendo fino a zero fa che la loro somma non rappresenti quella di scariche successive che molto grossolanamente. Più ancora, sarà impossibile che deviazioni del galvanometro si apprezzino fino all'esaurimento completo della carica residua, e la parte che sarà trascurata sarà tanto più grande quanto più a lungo il dielettrico è rimasto sotto l'azione delle forze elettrostatiche. Della energia per correnti di conduzione dispersa nei tempi successivi alla prima scarica non si ha modo di tener conto, ma certamente essa è piccolissima perchè le differenze di potenziale qui sono molto deboli.

L'uso dell'elettrometro per misurare invece delle quantità di elettricità i potenziali non sarebbe applicabile, non potendosi immaginare una correzione analoga alla detta.

6. — Misura diretta mediante l'intensità di corrente.

Da tutto ciò che s'è detto risulta che la misura della resistenza interna di un condensatore non può essere fatta col metodo della perdita di carica se non prolungando la serie delle osservazioni per tempi lunghissimi, poichè dopo una carica di durata appena notevole il dielettrico impiega a depolarizzarsi completamente un tempo dello stesso ordine di grandezza di quello che si richiederebbe per la sua polarizzazione perfetta, ed, eccetto pochi dielettrici ottimi, quel tempo raggiunge sempre un numero d'ore che molte volte non è espresso con poche unità.

Ma in queste condizioni è evidentemente più razionale, se la resistenza non abbia un valore immensamente grande, e se si possieda un galvanometro convenientemente sensibile, misurarla col metodo diretto per mezzo della corrente che una forza elettromotrice nota manda attraverso ad essa allo stato di regime, di polarizzazione completa. Siccome i più perfezionati galvanometri moderni a sistema astatizzato di magneti ed a decine di migliaia di spire permettono di valutare con sicurezza correnti di diecimillesimi di un milionesimo d'ampère, con forze elettromotrici di pochi volt si possono misurare direttamente resistenze di centinaia di migliaia di megohm, maggiori delle quali le resistenze in quasi tutti i casi della pratica si possono considerare come infinite.

Il metodo diretto ha il vantaggio di lasciar seguire nella successione del tempo l'andamento dei fenomeni di polarizzazione e di conduzione sommati, essendo le deviazioni lette ad ogni istante la misura della quantità spesa di elettricità nella corrispondente unità di tempo; e questo ci permetterà più avanti di scoprire alcune proprietà interessanti dei fenomeni stessi. La polarizzazione è completa quando l'ago ha raggiunta la sua posizione stabile di equilibrio. Naturalmente è supposto il condensatore completamente scarico prima, se non si vuole durante la fase variabile tener conto dei fenomeni dovuti alla polarizzazione residua da cariche precedenti.

Il dottor Behn-Eschenburg nello studio di un cavo a guttaperca del laboratorio di Zurigo (1) per rendere il comportamento del dielettrico indipendente dalle fasi precedenti di polarizzazione si servì di un artificio ingegnoso analogo a quello di

(1) *Elektrotechnische Zeitschrift,* fasc. 30, 31; 1892.

eliminare il magnetismo residuo del ferro mediante una corrente alternativa. Egli cioè invertì mediante un commutatore la corrente di carica un certo numero di volte ad intervalli eguali di tempo relativamente brevi; siccome si può immaginare che i fenomeni di polarizzazione seguano parallelamente, indipendenti tra loro, alle fasi diverse di carica, quando queste sono opposte ed eguali la somma algebrica dell'energia per quelli assorbita tende per simmetria a zero. Anche della polarizzazione dovuta a cariche anteriori in un verso qualunque devono più facilmente sparire le ultime traccie, perchè le rapide variazioni di raggruppamento molecolare agevolano l'orientarsi delle particelle sotto l'azione delle forze nuove come le meccaniche vibrazioni agevolano la depolarizzazione magnetica. In una serie di cariche alternate regolari ad un istante qualunque d'una fase di carica può dunque ammettersi che l'intensità di corrente sia funzione solamente del potenziale di carica e della distanza di quest'istante da quello in cui il potenziale fu invertito. La curva della corrente è certamente una curva periodica alternata, di cui varia col potenziale l'ampiezza, colla frequenza la lunghezza di periodo, e la forma colla legge dei fenomeni di polarizzazione. Per rilevar questa occorrebbe un galvanometro ideale, di cui la deviazione si leggesse in ogni istante proporzionale alla intensità momentanea della corrente; ma anche con un galvanometro a smorzamento conveniente certo si vedrebbe la deviazione durante ogni fase diminuire regolarmente dopochè la corrente di carica avrebbe raggiunto il suo massimo, purchè si scegliessero periodi sufficientemente lunghi. Il dottor Eschenburg si servì di un galvanometro con smorzamento piccolissimo, destinato a misure col metodo balistico, e scelse come periodi intervalli di tempo appena sufficienti a fare con sicurezza una lettura di deviazione ed una di zero; quindi è naturale che dopo pochi periodi abbia conseguito medie deviazioni eguali; queste però erano funzione, oltrechè del potenziale, delle condizioni speciali di sperimentazione, ed il quoziente costante della differenza di potenziale al valore istantaneo letto della corrente fu da lui arbitrariamente definito resistenza del dielettrico non avendo nulla di comune colla resistenza ohmica di questo.

Una resistenza ohmica è sempre di tal natura che in essa una quantità di energia è dissipata in calore al passaggio di una corrente, e noi vedemmo come mediante una corrente continua essa possa essere rigorosamente definita anche per le sostanze polarizzabili. Per contro la polarizzabilità in genere non implica una perdita principale di energia, perchè l'energia che è immagazzinata nel dielettrico non è convertita in calore, ma può essere restituita come scariche residue le quali si sommano e si confondono colle cariche opposte succedenti quando si tratta della trasmissione di una corrente alternativa. La polarizzabilità non corrisponde che all'aumento più o meno lento di una capacità, e questa nel circuito di una corrente continua non ha effetto di sorta, in quello di una corrente alternativa non fa che modificare la fase.

Veramente una perdita ancora qui si verifica, perchè la polarizzabilità di un dielettrico non è mai perfetta, e nella depolarizzazione non è mai restituita tutta l'energia che alla polarizzazione è occorsa; ma la parte secondaria dispersa così, che è analoga all'energia che si spende per la magnetizzazione alternata del ferro, è di gran lunga più piccola della totale impiegata in ogni semplice polarizzazione diretta.

Pertanto nella misura della resistenza dei cavi in genere non ha minore importanza riferirsi solo al minimo valore a cui la corrente data da una forza elettro-

motrice costante può discendere, di quello che abbia presso i cavi adoperati per corrente continua fare unicamente la determinazione dopo una lunga fase di riposo durante la quale il cavo sia possibilmente messo in corto circuito, perchè la polarizzazione residua, specialmente se dovuta a potenziali elevati ed a cariche lunghissime, non renda le misure, fatte eventualmente servendosi di una corrente in un sol verso, del tutto illusorie.

7. — Indipendenza della resistenza della seta dalla intensità di corrente.

L'artificio adoperato dal dottor Eschenburg è tuttavia utile per verificare alcune proprietà nel comportamento del dielettrico.

Se difatti i valori della resistenza apparente, come fu da lui definita e misurata, si trovano eguali comunque vari il potenziale, ed egli lo verificò per la guttaperca tra limiti estesi, per quel punto che si è scelto per far la lettura nella durata del periodo è proporzionale al potenziale la spesa di corrente per conduzione e polarizzazione. Se questo fosse verificato per tutti i punti e per periodi di lunghezza diversa, sarebbe verificata, in quelle determinate condizioni di esperienza, l'indipendenza della forma della curva di carica dal potenziale, e se ne potrebbe colla massima verosimiglianza dedurre l'indipendenza dal potenziale per quei due singoli fenomeni che seguono leggi del tutto diverse, quindi la costanza della resistenza effettiva. L'equivalenza di equazioni a variabili indipendenti permette sempre di identificare i coefficienti di queste.

Col piccolo condensatore a seta s'era cercato di assodare una proprietà di questa natura applicando sistematicamente alla determinazione della resistenza apparente il metodo della perdita di carica dopo serie di cariche eseguite per tempi eguali con differenze di potenziale crescente.

Leggendo le prime elongazioni di scarica dopo durate di isolamento crescenti di $10''$ in $10''$ fino a $60''$, dopo aver caricato per $10''$ con numero di elementi normali crescente da 1 a 6, si vedevano i decrementi logaritmici delle elongazioni seguire una legge di diminuzione molto approssimatamente identica, cioè i valori della resistenza apparente oscillare attorno ad una curva media regolare, rispetto alla quale gli scostamenti non eccedevano i limiti di approssimazione delle osservazioni. Però la resistenza apparente s'era elevata in $1'$ da 2200 a 9000 megohm, valore che non aveva ancor nulla a che fare colla resistenza effettiva. Per avere un'idea del valore di questa una delle serie di osservazioni fu diligentemente ripetuta, ed ogni lettura di prima elongazione affetta della correzione per le scariche residue succedenti, misurando queste ad ogni minuto finchè le deviazioni superavano 0,1 mm. sulla scala. Prescindendo dai tempi più brevi dove la porzione di carica che si va assorbendo è troppo grande rispetto la totale, si ebbero dopo durate di isolamento t le scariche totali δ che qui sono riferite:

t	60″	90″	120″	150″	180″
δ	169.7	168.1	166.5	164.9	163.4
log δ	2.22968	2.22557	2.22141	2.21722	2.21325
Δ log. δ	0.00411	0.00416	0.00419	0.00397	

Il valore medio di questo decremento logaritmico corrisponde, per una capacità quale fu misurata in queste condizioni di 0,136 *m*F., ad una resistenza di circa 23300 megohm.

L'indipendenza però di questa resistenza dal potenziale fu meglio provata col metodo diretto, chiudendo il sistema in circuito con un numero crescente di elementi normali e col galvanometro disposto a gran sensibilità. Sarà ricordata più avanti la forma della curva della corrente, che si conserva della stessa natura in tutti i dielettrici dove i fenomeni di polarizzazione hanno una intensità paragonabile, e ricorda quella di una iperbole avente per asintoti l'asse delle ordinate e una parallela all' asse delle ascisse. Qui è solo da notare che la forma della curva non dipende assolutamente dal potenziale nei limiti tra cui questo fu variato, da 1 a 12 elementi Clark, poichè le divergenze delle ordinate, che si misurarono ad intervalli eguali di tempo dalla chiusura del circuito, rispetto la legge di proporzionalità, non superano una piccola frazione percentuale in tutte le curve rilevate dopo un lungo periodo di scarica, cioè col dielettrico in condizioni eguali.

Naturalmente le curve che erano successivamente rilevate, dando alla scarica tempi troppo brevi perchè la depolarizzazione fosse completa, si scostano sistematicamente dalla variazione proporzionale in quanto nei primi tempi le ordinate hanno valori minori dei normali. Ma questa differenza va sensibilmente diminuendo man mano che la curva si avvicina alla sua tangente orizzontale. La distanza di questa dall'asse delle ascisse è in ogni caso proporzionale alla differenza di potenziale adoperata. E se la sensibilità del galvanometro fu determinata misurando la deviazione che dà la corrente d'una pila campione messa in serie con una resistenza convenientemente grande, mentre sui morsetti del galvanometro è in derivazione un shunt che ha rapporto noto alla resistenza del moltiplicatore, si ha la misura diretta della resistenza ohmica del dielettrico, che a noi è lecito perciò ammettere indipendente dal potenziale.

Per ricordare a conferma di ciò una sola delle numerose serie di osservazioni fatte, si ebbero pel condensatore a seta con 2, 4, 6, 8 elementi Clark rispettivamente ed a distanza di soli 390″ dal primo istante di carica, deviazioni lette di 6.6, 12.8, 18.8, 24.5 parti di scala, avendo ripetuto le esperienze successivamente scaricando ogni volta il condensatore solo durante alcuni minuti. Ma prolungando un'altra volta la carica con 4 elementi, dopo 1 ora la deviazione era 6.0 parti di scala; con 8 elementi dopo 1 ora era 12.0 parti di scala e si abbassava dopo 2 ore a 11.0, dopo 3 ore a 10.5; dopo cui durante ore successive non si avevano che oscillazioni piccolissime, evidentemente dovute a variazioni della sensibilità del galvanometro. Essendo

il valore medio di questa corrispondente ad una intensità di corrente di 0.5×10^{-10} ampère per una parte di scala, quella deviazione minima corrispondeva ad una resistenza di 21800 megohm circa, di cui l'ordine di grandezza è assolutamente confrontabile con quello prima riferito tenendo conto che le due determinazioni furono fatte in giorni diversi e verosimilmente in condizioni igroscopiche del sistema non identiche.

8. — Variazione della scarica residua in funzione del potenziale.

Si è detto che la proporzionalità delle ordinate della curva di carica in ogni momento al potenziale lascia concludere la proporzionalità dei fenomeni di polarizzazione, misurati dalla quantità di elettricità per essi assorbita, e la indipendenza della resistenza ohmica dal potenziale. Siccome le osservazioni, in parte riferite, e ripetute molte volte su questo condensatore e su altri di capacità maggiore ed a dielettrico diverso, si accordano molto bene in quella proporzionalità, è altamente verosimile che queste proprietà si verifichino almeno tra limiti abbastanza ristretti di potenziale, per i dielettrici medesimi; dal che è facile prevedere come in pratica variino in funzione del potenziale i fenomeni di scarica residua che sono la conseguenza dei fenomeni inversi di polarizzazione.

Se infatti noi potessimo raccogliere come scarica residua tutta l'elettricità che è stata immagazzinata nel dielettrico, noi avremmo somme di scariche residue proporzionali al potenziale.

Ma primieramente il dielettrico presenta sempre una certa conduttività, e per essa durante il tempo lungo occorrente all'esaurimento di tutta la carica residua una frazione di questa si disperde come corrente di conduzione, tanto maggiore quanto più lunghi sono gli intervalli dopo cui le scariche si rinnovano, perchè tanto maggiori sono le differenze di potenziale a cui le armature son venute salendo. D'altronde, quanto più sovente le scariche si ripetono, tanto minori sono le deviazioni del galvanometro e più facili gli errori di lettura. Di più ancora diminuisce la durata di tempo totale per cui le scariche dopo i singoli brevi intervalli si rendono apprezzabili, onde una quantità maggiore della carica residua totale è trascurata, e questa può non essere proporzionale al potenziale di carica ma crescere più rapidamente di esso se avvenga che l'equilibrio molecolare, che è stato più intensamente turbato, più lentamente si vada ripristinando. Quando la curva più lentamente si accosta alla sua tangente che è l'asse delle ascisse, è più grande la parte di area che tra quella e questa si trascura a partire da un minimo eguale di ordinata apprezzabile.

Questo fa che la determinazione della somma di scariche residue possa essere in genere errata in meno tanto maggiormente quanto il potenziale fu più elevato, quindi la intensità di polarizzazione possa apparire leggermente decrescente al crescere il potenziale. Ora l'espressione conferma pei fenomeni di depolarizzazione successiva un andamento di questa natura, poichè la curva delle somme di scariche residue R anzichè continuare rettilinea uscendo dall'origine, si stacca lentamente dalla sua tangente ivi, e volge la sua leggera concavità all'asse delle ascisse.

Lo prova la serie seguente, rilevata con un numero *n* crescente di elementi normali dopo cariche eguali di 5″. Le cariche non furono prolungate di più per limitare il tempo necessario all'esaurimento sensibile della scarica che per 12 elementi Clark non era minore di mezz'ora. La prima elongazione di scarica con 1 elemento era 182.5:

n	1	2	3	4	5	6	8	10	12
R	13.2	25.5	37.0	48.2	59.0	69.5	90.1	109.6	129.5
$\frac{R}{n}$	13.2	12.7	12.3	12.0	11.8	11.6	11.3	11.0	10.8

Teoricamente nulla contraddice *a priori* ad ammettere che la polarizzabilità del dielettrico vada leggermente decrescendo al crescere il potenziale. Invero al limite non può essere una massa finita di dielettrico sede di una quantità illimitata di energia in essa condensata per solo fatto di una lenta modificazione molecolare. Il fenomeno avrebbe una analogia di più con quelli di polarizzazione magnetica. Siccome però quello scostamento dalla legge di proporzionalità è in gran parte spiegabile nelle condizioni dell'esperienza, ed accenna a scomparire quando invece di scariche successive isolate si rileva la curva della scarica continua, l'analogia si può verosimilmente stabilire più intima coi fenomeni di elasticità, nei quali, tra i limiti di elasticità perfetta, le deformazioni totali sono sempre proporzionali alle forze applicate.

9. — Variazione in funzione della durata di carica.

Come la polarizzazione del dielettrico varii col tempo di carica è chiaramente mostrato dalla curva della corrente di carica.

E veramente, se una quantità di elettricità attraversa nell'unità di tempo le armature, oltre a quella che devesi alla resistenza ohmica per noi ben definita ed invariabile del dielettrico, essa può considerarsi come assorbita intieramente dal mezzo, che, cessate le forze elettrostatiche, la può in tutto od in parte restituire come dicemmo. Se prescindiamo dalle piccole dispersioni, e consideriamo la somma di scariche successive come restituzione integrale di quella massa elettrica, si vede subito la forma della curva, riferita al tempo di carica, della scarica residua. Essa cioè sale col tempo, prima rapidamente ove la corrente di carica ha un'intensità notevole, poi sempre più lentamente accostandosi asintoticamente ad una tangente orizzontale che non è raggiunta prima che la polarizzazione sia completa e la corrente sia ridotta a quella di conduzione. Nel nostro caso vedemmo che occorre a ciò un tempo non inferiore ad alcune ore.

La curva della carica totale è insomma la curva integrale della corrente di carica. Siccome la prima elongazione di scarica, cioè la scarica primaria come è comunemente definita, al prolungarsi della carica ha cessato dopo pochi minuti di crescere, la curva della carica residua da quel momento deve rappresentare quell'in-

tegrale a meno di una costante. Le perdite secondarie sole avrebbero per effetto che, se quella curva si deducesse da questa con un processo qualsiasi di integrazione grafica, le ordinate sarebbero leggermente maggiori di quelle che colla misura diretta si rilevano.

I risultati che seguono ricordano la curva della scarica residua R del condensatore a seta dopo che il tempo di carica t s'era venuto aumentando. Siccome però si vedrà più avanti che la distinzione di scarica residua da scarica primaria non ha che un valore relativo, la curva più caratteristica del fenomeno è quella della carica totale Q che è riportata nella fig. 3 e che si confronterà poi colla curva delle deformazioni elastiche:

t	1′	2′	3′	5′	7′	10′	15′	20′	30′	14 ore
R	104.1	145.3	175.0	212.0	235.2	255.0	275.0	292.5	312.5	395.0
Q	346.1	388.8	419.0	456.5	480.0	500.0	520.0	537.5	557.5	640.5

Della forma della scarica nei tempi successivi si può avere una idea dalla curva che ha per differenze di ordinate le singole letture di scarica secondaria fatte in corrispondenza alle ascisse rispettive poichè queste rappresentano le diminuzioni corrispondentemente subite dalla carica totale, prescindendo da correnti di conduzione interna.

È riportata come esempio la curva delle osservazioni di scarica dopo aver caricato durante 10′. L'ordinata corrispondente al tempo zero è naturalmente la carica totale residua quale da noi fu apprezzata, dovendo prescindere dalla durata momentanea della scarica primaria. Ma siccome si avvertì già l'impossibilità di tener conto di una parte della carica effettiva, perchè la depolarizzazione completa del dielettrico domanda un tempo lunghissimo e perchè sono insufficienti i mezzi di osservazione, una differenza costante si ha in tutte le ordinate dal valore teorico.

Per contro la discontinuità del fenomeno, che ha per effetto di ritardare, come si disse, la depolarizzazione del dielettrico, fa che le ordinate successive siano maggiori di quelle che si sarebbero rilevate se il potenziale delle armature non fosse andato in ogni intervallo crescendo. Di ciò si dovrà tener conto se si vorranno confrontare le due curve dei fenomeni inversi, di carica e di scarica, tra le quali è manifesta l'analogia, e più avanti si dimostrerà la identità.

Le ordinate della curva riferita nella fig. 4 sono:

t'	0′	1′	2′	3′	5′	7′	10′	15′	20′	25′
R′	255.0	183.0	144.8	118.5	82.4	59.4	39.6	20.0	9.8	4.5

L'ordine di grandezza di queste cariche residue è relativamente notevole, e devesi alle condizioni igroscopiche del dielettrico, molto variate rispetto quelle dei primi giorni.

Con sensibilità conveniente del galvanometro si può rilevare una curva regolare di scarica residua per corrente continua, la quale va naturalmente decrescendo secondo una legge analoga alla precedente, ma che, per ragioni dette, si presta meglio al confronto.

Dopo aver caricato durante 40′ il condensatore a seta con 6 elementi Clark fu possibile valutare con sicurezza durante più di mezz'ora le deviazioni di scarica al galvanometro. Siccome ad una parte di scala corrispondeva molto approssimativamente una intensità di 0.9×10^{-10} ampère, se si integra l'area della curva si ha una quantità di elettricità dello stesso ordine di grandezza che le ordinate della curva di scariche isolate ci davano, tenendo conto che là il potenziale di carica era 2 volt circa, poichè aveva servito alla carica un accumulatore.

La curva a cui si allude è individuata dalle letture seguenti :

t	1′	2′	3′	5′	10′	15′	20′	25′	30′
δ	59.0	34.0	23.6	15.0	6.5	4.0	2.7	2.0	1.6

10. — Fenomeni di carica e scarica durante tempi brevissimi.

In tutto ciò che s'è detto fin qui non s' è tenuto conto particolarmente delle condizioni del circuito di carica e scarica, perchè le osservazioni erano sempre fatte dopo tempi notevoli rispetto quelli in cui hanno importanza i fenomeni dovuti alla resistenza e selfinduzione del medesimo. Ma è noto che, finchè questi sono sensibili, le curve di carica e scarica presentano caratteri speciali, e non è escluso che questi siano modificati dalle proprietà del dielettrico.

Un primo fatto importante scaturisce dalle cose in parte già esposte. Perchè i fenomeni di polarizzazione modificano in modo identico la carica e scarica di un condensatore durante tempi successivi di durata notevole, e perchè per tempi comunque brevi la forma della curva teorica di carica e scarica è la stessa, è altamente verosimile che la forma reale di queste due curve si conservi identica entro limiti di tempo qualunque, e comunque brevi. E veramente tutti i fenomeni che ivi intervengono dipendono dai medesimi elementi, e se si traducono in formole hanno le stesse equazioni. Solamente, dove nella equazione della scarica entra la tensione o caduta di potenziale tra le armature ΔP, è nella carica sostituita la differenza della forza elettromotrice E impiegata e della tensione predetta, identificando in ogni momento la quantità di elettricità che nella carica deve ancora darsi al condensatore per render questa completa, con quella che nella scarica esso deve ancora restituire per tornare allo stato naturale: queste sono le due quantità di elettricità che in momenti che si corrispondono della carica e della scarica devono ancora attraversare una sezione qualunque del circuito.

È naturalmente presupposto che gli elementi del circuito siano in entrambi i casi eguali, cioè eguale sia la resistenza r e la selfinduzione L. Le due equazioni della

corrente differiscono solamente per una costante:

$$E - \Delta P = ri + L\frac{di}{dt}; \qquad \Delta P = ri + L\frac{di}{dt};$$

e quindi differiscono per una costante le equazioni delle quantità di elettricità, ridotte alla sola

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{CL} = 0;$$

se C è la capacità, e se nella carica $q = CE - q'$, essendo q' la quantità immagazzinata nel condensatore.

Se fosse possibile esprimere in funzione semplice del tempo la variazione di carica per la lenta polarizzabilità del coibente, il termine relativo dovrebbe portarsi come correzione in questa equazione. Ma l'espressione di quella variazione, come si dirà più avanti, non può per sua natura essere semplice.

D'altronde i fenomeni di polarizzazione sono tali che la loro azione si rende sensibile con una certa lentezza. Se noi ci limitiamo a tempi di ordine di grandezza estremamente piccolo, si può ammettere che una penetrazione della carica nella massa del dielettrico non abbia luogo, ed esso si comporti come un dielettrico perfetto, onde in ogni istante sia la carica proporzionale alla tensione delle armature come nella teoria si suppone.

Ora l'ordine di grandezza dei tempi che qui intervengono è dato subito dalla equazione integrata:

$$q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left(Ae^{\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}\,t} + Be^{-\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}\,t}\right),$$

la quale dà anche la forma della curva di carica o scarica.

Se $r^2 > \frac{4L}{C}$, cioè se sono reali le radici dell'equazione caratteristica dedotta dall'equazione differenziale lineare, la curva ha un andamento continuo, e si accosta senza oscillazioni al suo asintoto orizzontale. È quello che accade se la selfinduzione è convenientemente piccola rispetto la capacità e la resistenza. Se $\frac{L}{C}$ è trascurabile rispetto r^2 l'equazione di carica può scriversi semplicemente

$$q_1 = CE\left[1 - e^{-\frac{t}{Cr}}\right],$$

cioè la deficienza di carica dovuta alla resistenza del circuito è ridotta ad $\frac{1}{n}$ del suo valore massimo, della carica totale, quando

$$t = Cr \log_{ip} n.$$

Se si carica 1 microfarad in un circuito di pochi ohm di resistenza, certamente quella variazione è inapprezzabile dopo pochi milionesimi di 1''. Nella scarica lo

stesso tempo basta a che la quantità di elettricità rimasta per effetto della resistenza sia inapprezzabile.

Se la selfinduzione del circuito ha valore convenientemente grande rispetto la capacità e la resistenza, l'integrale generale della equazione differenziale si può esprimere mediante funzioni sinusoidali che sostituiscono i complessi; cioè se $r^2 < \frac{4L}{C}$ la curva è oscillatoria ed il periodo è

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}}},$$

che, se r^2 è trascurabile rispetto $\frac{L}{C}$, si riduce alla formola nota

$$T = 2\pi\sqrt{CL}$$

adoperata da Thomson e da Hertz. Ma ancora qui il fattore esponenziale dice che le ampiezze delle oscillazioni diminuiscono rapidamente e sono ridotte ad $\frac{1}{n}$ del valore primitivo CE dopo un tempo

$$t = \frac{2L}{r} \log_{ip} n,$$

che, se non è L notevole, si può difficilmente apprezzare in pratica.

Certamente questi tempi sono immensamente più brevi di quelli necessari a caricare un condensatore in modo che dopo una scarica primaria ed immediata se ne possano ricavare scariche successive apprezzabili, in modo cioè che abbia effetto sensibile la polarizzazione successiva.

11. — Cariche e scariche oscillanti.

In realtà, sebbene la polarizzabilità susseguente del dielettrico tenderebbe verosimilmente a diminuire l'ampiezza delle oscillazioni di carica, non è difficile realizzare condizioni di circuito in cui con mezzi adatti si possa riconoscere la carica di un condensatore decisamente oscillatoria. I fenomeni di scarica oscillatoria non sono che gli inversi dei primi, e furono in questi ultimi anni più ampiamente studiati, fecondi nelle nuovissime ricerche dei più mirabili risultati.

Per realizzare in esperienze di analisi qualitativa tempi di grandezza minima il mezzo più semplice è l'urto, la cui durata, se per essa si intenda il tempo per cui i corpi urtanti restano a contatto, è funzione delle condizioni delle masse e della velocità relativa. Se si utilizzano velocità eguali, la durata dipende solamente dal coefficiente di elasticità, e dalla deformazione che i due corpi subiscono ossia dalle masse dei medesimi a cui è proporzionale la forza viva che nell'urto si consuma.

È nata così l'idea di applicare dei sistemi di piccole sfere d'acciaio, di cui una essendo fissa, l'altra sospesa ad un filo conduttore viene ad urtare la prima con velocità sensibilmente costante, se si lascia cadere da un'ampiezza di deviazione invariata

e se il filo non oppone una resistenza notevole alla flessione. Si possono per tal modo chiudere circuiti di corrente per tempi tanto più brevi quanto più piccola è la sfera che cade e quanto l'oscillazione è più rapida. La prima variazione del tempo al diminuire del raggio della sfera mobile è sempre molto sensibile. Al crescere l'ampiezza invece la durata diminuisce lentamente, e solo fino ad un certo limite, oltre il quale non è improbabile che l'effetto della deformazione aumentata compensi quello della maggior rapidità con cui il contatto succede; conviene sempre scegliere colle piccolissime sfere una ampiezza di caduta prossima a questo valore, affinchè le piccole variazioni di quella non influiscano sensibilmente sul tempo nelle osservazioni che devono essere paragonate. Della sfera fissa la diminuzione del raggio parrebbe far prevedere una diminuzione della durata d'urto, diventando la curvatura maggiore e più piccola la superficie di contatto; l'esperienza però non rivela alcuna notevole variazione, forse perchè la diminuzione della massa, che è tenuta in genere solo fissa pel proprio peso su un sopporto isolante, ne diminuisce l'inerzia e fa che dalla massa urtante essa riceva un impulso maggiore, percorrendo a sua volta nella direzione dell'urto uno spazio maggiore, durante il quale l'urto non è interrotto.

Se un sistema di questa natura si volesse utilizzare per lo studio sistematico di fenomeni aventi una durata brevissima, occorrerebbe naturalmente disporre di una serie di sfere molto numerosa e di dimensioni crescenti regolarmente secondo una legge che non sarebbe difficilissimo definire. Poichè sarebbe sempre possibile valutare con una approssimazione sufficiente queste durate di urto, quando esse fossero la durata della chiusura d'un circuito privo sensibilmente di selfinduzione, e nel quale si misurasse la quantità di elettricità messa in movimento da una forza elettromotrice nota attraverso una data resistenza, per esempio mediante un galvanometro balistico; con un sistema magnetico convenientemente astatizzato un numero piccolissimo di spire potrebbe essere sufficiente per avere la voluta sensibilità. Siccome però qui per ottenere tempi molto brevi si poteva disporre di altri apparecchi suscettibili di un maneggio non meno semplice, ma di una graduazione molto più precisa, si adoperò una piccola collezione di queste sfere d'acciaio solamente per constatare la presenza delle oscillazioni in condensatori di tipo e capacità differente, ed a dielettrico diversamente polarizzabile.

Se si leggono al galvanometro balistico le elongazioni di scarica residua dopo che il condensatore è stato messo in corto circuito pel tempo brevissimo di cui è quistione, certamente si possono realizzare in questo circuito le condizioni di minima resistenza, potendosi escludere la pila che in molti casi rappresenta della resistenza la parte maggiore. Però bisogna aver dato al condensatore cariche sempre eguali, quindi poco inferiori alla massima, dopo cui il dielettrico ha già subìto tutti gli effetti della lunga polarizzazione.

È dunque meglio inserire il sistema pel contatto nel circuito di carica, adoperando elementi primari a resistenza piccola, o meglio accumulatori dove questa può essere ridotta ad una grandezza insignificante.

Tuttavia alcune osservazioni furono fatte in entrambi i modi sul condensatore a seta e su capacità eguali a 0.1 mF di un condensatore a carta paraffinata e di un condensatore normale a mica. Una serie preliminare eseguita con una pila Clark, la cui grande resistenza certamente impediva la produzione della carica oscillante,

aveva mostrato che il comportamento del dielettrico nei tre condensatori non era essenzialmente diverso; cioè riferendo le elongazioni di scarica ai raggi delle sfere adottate per la carica come ordinate ad ascisse si avevano curve assolutamente analoghe, salvo che esse dalla tangente orizzontale si scostavano meno nella mica e più nella carta paraffinata e nella seta, di quantità però non grandemente diverse.

Con una sfera urtante di 2.56 mm. di diametro il condensatore a mica prendeva in un urto 0.589 della sua carica massima; quello a paraffina 0.576; quello a seta 0.516; con una sfera di 4.90 mm. rispettivamente 0.898 0.830 0.730; con una sfera di 7.89 mm. 0.946 0.880 0.797; con una sfera di circa 3 cm. 0.982 0.924 0.861; mentre con 1″ di carica si aveva 0.999 0.985 0.975 e dopo 10″ in tutti sensibilmente la carica completa, o meglio la massima elongazione di scarica. La più piccola delle sfere aveva diametro 1.21 mm. e massa tanto piccola da rendere particolarmente difficile l'ottenerne oscillazioni regolari e cariche confrontabili; la sospensione era fatta con un filo d'argento di pochi centesimi di mm. di diametro; nella serie citata essa aveva dato valori relativi rispettivamente pei tre condensatori 0.380 0.360 0.207 certo con una durata media di carica eccezionalmente breve.

Ora siccome le sfere dopo la prima e la seconda verosimilmente davano tempi di carica già eccedenti il periodo di oscillazione anche quando alla pila si erano sostituiti tre accumulatori in parallelo, queste due sole furono impiegate per verificare le oscillazioni ripetendo con esse un numero diverso di volte rapidamente il contatto di carica.

È evidente che con questo artificio il fenomeno della carica è notevolmente complicato, perchè i fenomeni di induzione, che dipendono dalla variazione di corrente, si modificano ogni volta che la corrente si interrompe, e la carica è la somma di tante cariche parziali, di cui ognuna è funzione della durata di essa e del complesso di quelle che l'hanno preceduta.

Sta il fatto però che serie replicate di osservazioni di questa fatta rivelarono nel modo più evidente il carattere oscillante della curva in ciascuno dei condensatori già nominati; sia che il sistema pei brevissimi contatti fosse inserito cogli accumulatori nel circuito di carica, nel qual caso si avevano prime elongazioni di scarica totale varianti con una certa regolarità al di sopra e al di sotto del valore massimo normale; sia che, eseguita indipendentemente la carica, i contatti si ripetessero per chiudere direttamente le armature in corto circuito, dopo il che le deviazioni di scarica residua si riproducevano periodicamente nel verso positivo e nel verso negativo della scala. Lo scostamento delle letture dal valore normale massimo qui raggiungeva sovente coi tempi più brevi il 10 % di questo. Sebbene il fenomeno non succedesse con continuità, e sebbene fosse impossibile seguire nella progressione dei tempi l'andamento della curva con precisione, si constatava però che quelle variazioni andavano decrescendo, cioè l'ampiezza delle oscillazioni doveva essere sempre minore. La regolarità poi con cui in corrispondenza ad ogni numero d'urti quelle variazioni si riproducevano, quando le osservazioni erano fatte successivamente molte volte, lasciava credere che i tempi fossero determinati con una sensibile costanza, e la durata di uno di quegli urti fosse dell'ordine di grandezza della durata di quelle oscillazioni.

Si è condotti ad ammettere così che gli urti di quelle sfere piccolissime non durassero più di frazioni milionesime di 1″ se si tien conto delle condizioni in cui le esperienze erano fatte.

12. — Periodo di oscillazione.

Per avere difatti un' idea del periodo di oscillazione di carica basta ricordare che in ogni caso era la capacità così caricata dello stesso ordine di grandezza, essendosi col condensatore a seta, la cui capacità superava poco 0.13 *m*F, confrontate capacità di 0.1 *m*F di condensatori graduati a mica e carta paraffinata. Tutte le connessioni del circuito di carica erano formate con filo di rame di diametro maggiore di 1 mm. sopra una lunghezza complessiva di circa 5 m., la cui resistenza non superava 0.1 ohm. Il solo breve tratto di sospensione della piccola sfera era costituito da un filo di argento di circa 5 centesimi di mm., la cui resistenza per 1 m. può essere 8 ohm. L'aumento di resistenza per la localizzazione superficiale della corrente, che ha luogo quando la variazione di essa è rapidissima, non deve essere sensibile qui dove le quantità di elettricità messe in movimento sono eccezionalmente piccòle, escluso forse il primo istante nel quale arriva alle armature la massima parte della carica; avendo dunque limitato il tratto di sospensione a circa 12 cm. la resistenza non doveva superare 1 ohm, e questa doveva rappresentare la parte principale della resistenza totale, rispetto cui quella interna degli accumulatori era trascurabile.

Non sarebbe nemmeno facile definire la resistenza al contatto delle due sfere, la quale è evidentemente variabile nella durata dell'urto; ma essendosi sempre pulite accuratamente le superficie delle sfere, e conseguìta coll'altezza di caduta una velocità d'urto notevole, si può ammettere che per la massima parte del tempo la resistenza non fosse grande, e che la resistenza complessiva del circuito non superasse di molto 1 ohm.

Si immaginino ora le connessioni disposte secondo uno schema possibilmente semplice, per es. secondo i lati di un quadrato o la circonferenza di un circolo in un piano orizzontale, prescindendo dal piccolo tratto verticale in cui il filo di sospensione della sfera mobile e quello di congiunzione colla sfera fissa si vengono a trovare paralleli e vicinissimi.

Del coefficiente di selfinduzione totale la parte dovuta alla pila ed al condensatore è assolutamente trascurabile. Quella dovuta ai fili di circuito può essere calcolata colla formola di Neumann

$$Q = \int\int \frac{ds\, ds'}{r} \cos \epsilon$$

dove $ds\ ds'$ rappresentano due elementi qualunque del circuito siti a distanza r ed angolo ϵ.

Questa formola calcolata pel caso di un semplice quadrato di cui il perimetro sia l essendo ρ il raggio del filo dà

$$Q = 2l \left[\log \left(\frac{2l}{\rho} \right) - 2.60 \right];$$

pel caso di un circolo

$$Q = 2l \left[\log\left(\frac{2l}{\rho}\right) - 2.20 \right].$$

Se queste due espressioni si confrontano con quella del coefficiente di selfinduzione di un tratto rettilineo di conduttore di lunghezza l, dedotta parimenti dalla formola generale,

$$Q = 2l \left[\log\left(\frac{2l}{\rho}\right) - 0.75 \right],$$

si vede che esse non ne differiscono che pel coefficiente numerico del 2° termine. Effettivamente nel caso per es. del quadrato la selfinduzione può approssimativamente considerarsi somma dei quattro termini eguali rappresentanti la selfinduzione di uno dei lati

$$\frac{l}{2} \left[\log\left(\frac{l}{2\rho}\right) - 0.75 \right],$$

meno quattro termini eguali rappresentanti la induzione di uno qualunque dei lati sopra il suo opposto, perchè tra lati contigui che sono ad angolo retto la induzione mutua è nulla. Ma questi termini, dove nel valore differenziale compaiono al denominatore distanze dell'ordine di grandezza $\frac{l}{4}$, non hanno grande importanza rispetto i primi: quindi noi possiamo tenerne conto come di una correzione (1), ed immaginarci calcolato il coefficiente di selfinduzione totale come quello di un conduttore rettilineo di egual lunghezza, salvo che è modificato opportunamente il coefficiente numerico del 2° termine.

Con considerazioni simili si potrà senza un calcolo minuzioso avere un'idea del coefficiente d'induzione non solo per quelle forme di schema tipiche, che in pratica non è sempre possibile di realizzare perfettamente, ma per tutte quelle forme che dalle prime non molto si allontanano: per es. per rettangoli ove il rapporto dei lati sia poco diverso dall'unità, e in genere per poligoni chiusi di cui i lati si scostino poco dalle rispettive parallele tangenti ad un medesimo cerchio. È sempre supposto che il raggio del filo sia trascurabile rispetto alle dimensioni del circuito. In tutti questi casi si potrà ritenere

$$Q = 2l \left[\log\left(\frac{2l}{\rho}\right) - m \right]$$

---

(1) In realtà la correzione, che da queste considerazioni apparirebbe qui molto semplice, è complicata dal fatto che la somma delle induzioni parziali proprie e mutue dei lati non rappresenta che approssimativamente l'induzione totale, onde abbisogna a sua volta di essere modificata. In ogni caso il calcolo esatto si può solo eseguire valutando il potenziale mutuo di due circuiti elementari di corrente, paralleli all'asse del circuito dato, ed aventi per sezione due elementi della sezione del conduttore; ed eseguendo la doppia integrazione rispetto a tutti gli elementi analoghi. Da un calcolo di questa natura non si potrebbe assolutamente prescindere se il secondo termine numerico dovesse avere un'importanza notevole rispetto al primo termine logaritmico. Cfr. " *Remarks on the second paper of Mr. Hughes regarding selfinduction* „ Prof. H. F. Weber. *Electrical Review*. 9 luglio 1886.

dove m è un coefficiente numerico dipendente dalla forma precisa del circuito ma non eccedente poche unità.

Nel caso attuale era facile disporre le connessioni in modo che soddisfacessero a quelle condizioni, e per la parte principale del circuito si poteva ritenere

$$\log\left(\frac{2l}{\rho}\right) = \backsim 9{,}9\,,$$

cioè Q dell'ordine di grandezza 7300 cm. Ed è facile vedere che rispetto questa è ben piccola la parte della selfinduzione totale dovuta al tratto verticale di sospensione delle sfere, sebbene al denominatore del logaritmo entri ρ che per il filo di sospensione era piccolissimo. Trattandosi di due tratti paralleli di fili a raggi diversi $\rho\ \rho'$ quando la distanza a è piccola rispetto alla lunghezza l si può sempre calcolare il coefficiente di induzione colla formola

$$Q' = 2l\left[\log\left(\frac{a^2}{\rho\rho'}\right) + \frac{1}{2}\right];$$

supposto qui $\rho = 0.05$ $\rho' = 0.0025$ $a = 2.5$ $l = 12$ si ha $Q' = \backsim 270$.

Ritenendo dunque la resistenza del circuito dell'ordine di grandezza di 1 ohm, la selfinduzione totale dell'ordine 7000 cm. si vede che

$$r^2 = 1 \times 10^{18} \qquad\qquad \frac{4L}{C} = 28 \times 10^{19}$$

se si carica la capacità di 0.1 mF $= 10^{-16}$ unità c. g. s. La carica è dunque oscillatoria, e cesserebbe solamente di essere tale se r raggiungesse 16,7 ohm. La durata delle oscillazioni deve essere

$$T = 2\pi\sqrt{CL}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{r^2C}{4L}}}$$

cioè dell'ordine di grandezza

$$2\pi\sqrt{CL} = \backsim 5{,}3 \times 10^{-6},$$

ossia 5,3 milionesimi di 1''.

La ampiezza avrebbe dovuto nelle oscillazioni essere ridotta ad $\frac{1}{1000}$ del suo valore, cioè ad un valore certamente inapprezzabile, se si fosse proceduto per tempi crescenti di carica continua, dopo un tempo

$$t = \frac{2L}{r}\log 1000,$$

cioè dell'ordine 96 milionesimi di 1''. Pel condensatore a seta di capacità poco superiore doveva essere di poco maggiore la durata delle oscillazioni: in ogni caso dopo un tempo di quell'ordine di grandezza queste dovevano ritenersi praticamente esaurite.

13. — Durate brevi di carica col pendolo di Helmholtz.

Per procedere più razionalmente all'analisi quantitativa del comportamento del dielettrico studiato, ed al confronto coi dielettrici usuali già citati e con altri, fu sistematicamente adoperato per realizzare cariche brevi il pendolo di Helmholtz.

Questo apparecchio, che fu applicato la prima volta allo studio delle correnti di induzione, permette la misura assoluta di tempi comunque brevi. Esso consiste essenzialmente di un pendolo di lunghezza proporzionata ai tempi da misurare, e di massa notevole, la quale lasciandosi cadere da altezza nota descrive una prima oscillazione con velocità in ogni punto determinata. Al passaggio in due punti opportuni facendo che si chiuda e si rompa rispettivamente il circuito della corrente, la durata di essa è solo funzione della distanza dei due punti, della lunghezza del pendolo, e della massima sua ampiezza di oscillazione. Con lunghezza di pochi decimetri, ampiezza di circa 90° e spostamento relativo dei due punti di contatto di frazioni di millimetro, si realizzano tempi di milionesimi di 1''.

Siccome però qui non si trattava specialmente di tracciare per punti la curva della carica oscillante, ma di esaminare l'andamento della curva di carica quando le oscillazioni erano già esaurite, fu scelto un pendolo di lunghezza notevole, ove la durata di oscillazione era poco minore di 1'', ed ove, essendo la massima ampiezza circa 15° e la velocità nel punto più basso dell'arco di oscillazione circa 1m per 1'', gli spostamenti di 0.1 mm sulla scala del corsoio corrispondevano in media a 0''.0001. Così in un tempo minore o paragonabile al minimo apprezzabile i fenomeni dovuti alla induzione e resistenza nella carica potevano ritenersi resi insensibili, e solo pronunciarsi in seguito quelli di polarizzazione che a noi più interessano. Questi potevano essere analizzati nei limiti di tempo a cui corrisponde la lunghezza della scala, cioè di circa 0'',2 essendo la scala del corsoio pel contatto mobile lunga circa 20 cm.

Naturalmente la misura di ognuno di questi tempi non può farsi in valore assoluto con una approssimazione pari a quella minima durata apprezzabile, per le condizioni pratiche dell'esperimento. Difatti il contatto di chiusura è primieramente stabilito per l'urto del pendolo che libera il braccio di una leva a cui finisce la prima parte del circuito, affiorante con una punta di platino la superficie del mercurio in un pozzetto messo in comunicazione col resto del circuito. Ora tra la punta di platino ed il mercurio deve essere una distanza sempre di alcuni decimi di millimetro per evitare il pericolo di un corto circuito e di una carica a tempo inopportuno. Generalmente la massa che cade imprime al nasello, che per un filo tagliente sostiene la leva, una piccola scossa di cui l'effetto è aumentare leggermente, ma in modo non costante, quella distanza che la leva percorrerà prima di chiudere il circuito; così la chiusura è ritardata di tempi che possono variare di quantità paragonabili ai tempi minimi che la scala permetterebbe di apprezzare. La minima traccia poi di pulviscolo depositato o di ossido metallico formato alla superficie del mercurio fa che questa si incurvi leggermente sotto la punta cadente di platino, ed occasiona un ritardo dello stesso ordine di grandezza.

Il punto della scala in corrispondenza al quale ha luogo la prima carica deve dunque essere ad ogni volta trovato per tentativi, ed in genere non coincide in osservazioni successive, sia se intervengono le perturbazioni dette, sia se impiegasi alla carica potenziale diverso, che, se più elevato, lascia il circuito chiudersi più presto mediante una piccola scintilla tra la punta ed il mercurio. Nel contatto ove il circuito è rotto la scintillazione che prolungherebbe il contatto non è altrettanto facile, essendo esso formato da pezzi di metallo a superficie assai larga che alla velocità notevole della massa cadente vengono rapidamente separate.

Trattandosi di fare col pendolo una lunga serie di osservazioni conviene rendere le condizioni di queste possibilmente identiche, dando al pendolo un'ampiezza massima costante di oscillazione, e determinando una volta per tutte la scala dei tempi, cioè i tempi dal momento in cui la caduta comincia a quello in cui il pendolo viene in corrispondenza dei punti successivi della scala delle letture; in ogni esperienza si conteranno poi i tempi dal momento ove la prima carica fu osservata.

Siccome l'ampiezza che nei limiti della scala si utilizza è piccola in confronto della massima ampiezza di oscillazione, si possono ritenere le letture sulla scala eguali agli archi di cui esse rappresentano la tangente.

D'altronde, perchè l'ampiezza massima era in questo caso piccola a sua volta, si poteva ammettere la durata delle oscillazioni successive invariata, ed eguale a quella che avrebbero avuto oscillazioni piccolissime in un pendolo semplice corrispondente. Effettivamente, essendo la massa notevole, la resistenza dell'aria aveva pochissimo effetto, ed i perni essendo sostenuti su rotelle giranti accuratamente lubrificate, le resistenze passive avevano una somma trascurabile, cosicchè il decremento logaritmico delle oscillazioni successive era piccolissimo ed il loro isocronismo doveva essere molto approssimato. La durata di oscillazione potè perciò essere determinata contando molte volte il numero di oscillazioni in $1'$, ed era $\frac{60''}{63} = 0''.953$.

Sulla scala delle letture la posizione verticale del pendolo corrispondeva alla divisione 131 mm; la corda della massima deviazione era 313 mm.; la distanza del braccio di leva, che stabiliva i contatti, dall'asse di oscillazione era 1183 mm.; onde l'arco totale di oscillazione era

$$2 \text{ arcsen} \frac{313}{2 \times 1183} = \backsim 15^\circ\ 12':$$

il massimo angolo utilizzato nelle letture era

$$\text{arctg} \frac{131}{1183} = \backsim 6^\circ\ 19'.$$

Siccome si può considerare in ogni momento nell' oscillazione di un pendolo semplice la velocità $\frac{ds}{dt}$ eguale a quella dovuta alla altezza di caduta, se a è la lunghezza del pendolo semplice equivalente al nostro pendolo meccanico, in corrispondenza ad un'ampiezza d'angolo attuale α, se la massima era θ, si ha

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{-d\alpha}{\sqrt{2 \cos \alpha - 2 \cos \theta}}$$

e ritenendo dello sviluppo dei coseni solo i due primi termini

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \text{ arcos } \frac{\alpha}{\theta} = \frac{T}{\pi} \text{ arcos } \frac{\alpha}{\theta},$$

detta T la durata della mezza oscillazione.

Così furono valutati i tempi che il pendolo impiegava per raggiungere cadendo i punti sulla scala del contatto mobile, di centimetro in centimetro fino alla posizione verticale, e si dedussero quelli successivi per simmetria. In corrispondenza alle letture d si ebbe pertanto:

d^{cm}	0.1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1	7.1	8.1	9.1	10.1
t''	0.3470	0.3575	0.3679	0.3782	0.3883	0.3983	0.4083	0.4182	0.4280	0.4378	0.4475
d.	11.1	12.1	13.1	14.1	15.1	16.1	17.1	18.1	19.1	20.1	21.1
t''	0.4572	0.4669	0.4765	0.4861	0.4958	0.5055	0.5152	0.5250	0.5348	0.5447	0.5547

14. — Il primo condensatore a seta essiccata.

Il condensatore che più interessava di studiare era quello a seta ch'era stato oggetto delle misure precedenti.

Ma perchè nel corso di queste s'era notato un aumento della capacità e della variazione di carica col tempo, dovuto certo all'accesso dell'aria umida che aveva modificate le condizioni igroscopiche del dielettrico, questo dovette essere seccato artificialmente. E perchè l'essiccamento dei singoli pezzi d'armatura e d'isolante colla macchina pneumatica non aveva migliorate di molto le proprietà del condensatore, l'essiccamento si rinnovò a temperatura elevata.

Perciò i singoli fogli di seta e di stagnola furono riscaldati su due grosse lastre di rame verso i 200° durante parecchi minuti, così che non solo fosse eliminata da essi l'acqua superficialmente condensata, ma dalla seta presumibilmente anche la massima parte dell'acqua di costituzione, senza spingere la temperatura tant'alto che le proprietà fisiche apparenti ne fossero sensibilmente modificate. Ad evitare che nuovo vapore fosse assorbito durante la ricostruzione del sistema, questa fu interamente eseguita sopra una terza lastra riscaldata a temperatura poco inferiore, sovrapponendovi i fogli man mano che si toglievano secchissimi dalle due prime; il complesso appena finito fu posto tra due fogli ben secchi di ebanite, e il tutto chiuso con forti liste di carta incollata, sovrapponendovi poi un peso notevole.

Le proprietà del condensatore apparvero subito enormemente migliorate. La capacità s'era ridotta a 0.110 mF, in parte per la esclusione di uno dei fogli di armatura guastatosi nella nuova costruzione, in parte per la diminuzione verosimilmente subìta dalla costante dielettrica. Il valore nuovo non può però essere con-

frontato coi precedenti, perchè alla sovrapposizione esatta delle armature non s'era data qui cura speciale, nè paragonabili erano le condizioni di pressione, ecc. L'importante è che la variazione di carica tra 0″.1 che poteva equivalere alla durata delle prime cariche dette momentanee, e 10″ dopo cui la 1ª elongazione di scarica non cresceva più, s'era ridotta a circa 2 %, mentre la massima variazione apprezzabile non raggiungeva il 5 %.

La forma della curva di carica è individuata dalla serie seguente, scelta tra le molte di osservazioni fatte in condizioni identiche, e riferita, come quelle che seguiranno, per semplicità nella prima parte alla scala di letture δ_t del pendolo, nella seconda a tempi ordinari di carica. Il tempo minimo è dell'ordine 0″.0005, essendosi trovata la posizione corrispondente sulla scala per tentativi, con spostamenti successivi del corsoio di $\frac{1}{2}$ mm.:

δ_t	0cm.7	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	7.1	9.1	11.1	13.1	15.1	17.1	19.1	21.1
e	205.3	206.5	207.8	208.3	209.0	209.5	210.1	210.6	211.0	211.4	211.8	212.1	212.4	212.6
t''	1″	2″	4″	10″	20″	30″	60″							
e	213.5	214.0	214.6	215.0	215.0	215.0	215.0							

Naturalmente, essendo diminuita l'importanza dei fenomeni di lenta polarizzazione, sono qui molto ridotti quelli di scarica residua in confronto ai valori misurati prima, come mostra la serie di osservazioni riferita ai tempi di carica:

t	1″	5″	10″	20″	60″	300″	1ora
R	1.4	3.4	5.3	7.6	12.7	24.6	145.

Dopo 1 ora di carica la polarizzazione doveva essere completa, perchè la somma di scariche residue non si modificava più sensibilmente: della scarica totale non raggiungeva dunque il 33 %, perchè in questo caso ad essa corrispondeva una massima elongazione di 445. La curva della carica totale conserva però gli stessi caratteri di quella già ricordata.

La resistenza di isolamento in corrispondenza al miglioramento del dielettrico era notevolmente più alta. La perdita apparente di carica dopo 60″, cioè la diminuzione della prima elongazione di scarica, non superava 5 %: ma la diminuzione di scarica effettiva, tenendo conto delle scariche residue, era una frazione percentuale piccolissima, e non avrebbe potuto dare una misura molto approssimata e attendibile della resistenza. Col metodo diretto, disponendo il galvanometro a gran sensibilità, la quale qui corrispondeva a 0.43×10^{-10} ampère per una parte di scala, la corrente di carica con 6 elementi Clark, che nei primi istanti dava deviazione di circa 15 mm.

s'era abbassata a 3 mm. dopo 30'; dopo 1 ora non era più possibile leggere le deviazioni con sicurezza perchè troppo influenzate dalle continue piccole variazioni che con questa sensibilità intervenivano nella posizione di riposo dell'ago; certamente la deviazione non arrivava a 1.5 mm., cioè la corrente a 0.65×10^{-10} ampère, corrispondente a una resistenza di circa 130 mila megohm.

Una causa del tutto estranea al dielettrico interveniva però qui, per cui la resistenza di isolamento determinata in condizioni esterne leggermente modificate non appariva costante, ed era il grande potere igroscopico della carta con cui il sistema si era suggellato, non essendosi evitata la sovrapposizione di essa alle lastrine di rame che davano i contatti colle armature. La resistenza era sempre grandissima se prima delle osservazioni si era moderatamente riscaldato il sistema.

Perciò questo fu un'ultima volta portato sulla lastra metallica durante parecchio tempo alla temperatura più elevata che il rammollirsi dei fogli di ebanite concedeva, forse a 150°, e così a caldo fu il tutto verniciato con paraffina di cui si riempirono diligentemente tutte le piccole aperture. In queste condizioni si ebbero i risultati migliori, e la curva di carica caratterizzata dalla tabella qui riferita, e rilevata per molti giorni e settimane di seguito, non accennò più a modificarsi sensibilmente. Dopo un mese dalla costruzione, durante il quale il condensatore restò esposto all'aria non secca nei locali del laboratorio, la massima variazione di carica non arrivava a 2, 8 % essendo 2 % nei primi giorni:

δ_t	0cm.55	0.7	1.1	1.6	2.1	3.1	5.1	7.1	13.1	21.1
e	250.1	250.6	251.2	251.5	251.6	251.7	251.8	251.8	251.9	252.0
t''	1''	5''	10''	30''	60''					
e	253.0	254.5	255.0	255.0	255.1					

La somma di scariche residue era ancor diminuita di molto rispetto le misure precedenti, ed il massimo di essa ottenibile con parecchie ore di carica non oltrepassava il 22 % della scarica totale. La determinazione della resistenza tenendo conto delle scariche residue dava risultato illusorio, perchè nella leggera incertezza delle letture molteplici era largamente compresa la piccolissima diminuzione di carica effettiva. Con 6 elementi Clark la corrente di carica si abbassava rapidamente sino dai primi minuti; dopo due ore non era possibile apprezzare con sicurezza la deviazione che non arrivava a mezzo millimetro; la resistenza doveva dunque superare colla attuale sensibilità 200 mila megohm, e poteva praticamente considerarsi infinita.

15. — Altri condensatori a seta.

La influenza grandissima dell' acqua sui fenomeni di polarizzazione lenta era dunque provata. Ma era interessante vedere se colla eliminazione più perfetta di essa quei fenomeni potessero ancora venire notevolmente ridotti. Questa quistione,

che è sempre importante nella fabbricazione di condensatori, lo è essenzialmente per la costruzione di apparecchi normali da laboratorio, dove si richiederebbe che i condensatori prendessero istantaneamente la loro carica totale, perchè senza di ciò non è possibile, come si vedrà, una precisione assoluta di misura.

Perciò una serie di tentativi fu ancora fatta con seta di un'altra qualità, cioè con *foulard* bianco finissimo, di cui lo spessore essendo poco più della metà del precedente [circa 0.06 mm.] permetteva di avere in volume notevolmente minore la stessa capacità.

Alcuni piccoli condensatori furono costrutti così con un piccolo numero di armature di pochi decimetri quadrati di superficie, seccando i singoli fogli di seta e di stagnola verso i 200°, e montando a temperatura poco minore il complesso, che veniva rapidamente chiuso tra due fogli di ebanite, e suggellato con liste di guttaperca che con un vetro caldo si potevano far perfettamente aderire senza intermediari liquidi od imperfettamente isolanti.

Alcune prove preliminari diedero risultati dello stesso ordine del condensatore precedente; isolazione sensibilmente perfetta; variazione massima di carica poco superiore a 2 %.

Ma un'ultima prova, fatta ancora con una piccola capacità per poter costrurre il sistema più accuratamente, dove la temperatura della seta si era elevata quanto la stoffa aveva permesso prima di mostrare la prima traccia di abbrustolimento, ad un valore poco inferiore alla temperatura di fusione della stagnola, diede i migliori risultati fra tutti quelli ottenuti; la curva di carica fu cioè (V. Fig. 5):

δ_t	0.85	1.1	1.6	2.1	3.1	5.1	9.1	15.1	21.1
e	245.4	246.0	246.3	246.5	246.6	246.8	247.0	247.2	247.3
t''	1″	2″	4″	6″	10″	30″	60″		
e	247.8	248.0	248.2	248.3	248.3	248.3	248.3		

dove la variazione massima è appena di 1.17 %, mentre la scarica residua dopo 60″ di carica, che è una durata molto maggiore di quelle che in esperienze ordinarie possano occorrere, non superava 2.1 %. L'isolazione era praticamente perfetta, ed i risultati non si modificarono sensibilmente, finchè il condensatore fu conservato nelle stesse condizioni, controllando le misure per molti giorni di seguito.

Per contro non si riuscì qui ad avere risultati migliori ripetendo i tentativi con precauzioni analoghe e maggiori, come seccando una prima volta la seta a temperatura elevata, tenendola poi parecchi giorni sotto la campana della macchina pneumatica a pressione di pochi mm. di mercurio e in presenza di acido fosforico anidro, riseccandola ancora all'atto della costruzione.

Tuttavia non è inverosimile che quella piccola variazione percentuale ancora per una parte o in tutto sia dovuta alla presenza nel dielettrico di una traccia di umidità che i mezzi ordinari non permettono di eliminare operando in ambienti

comuni, e servendosi per la essiccazione di fiamme a gas che producono sempre una notevole quantità di vapor acqueo.

Per confermare questo si ricorse ad una piccola capacità ove il dielettrico era costituito dall'aria, si adoperò cioè un piccolo condensatore a lastre piane circolari di ottone, spostabili sopra due sopporti isolanti di gomma lacca. Le due armature furono montate sul tornio e ripulite a nuovo con polvere secca di vetro, levigandole perfettamente; strofinando diligentemente ad ogni esperienza, ed in alcune tenendo i due dischi orizzontali, separati da piccoli frammenti di mica, in modo da poter conservare la temperatura sopra i 100° durante le osservazioni, una variazione di carica col tempo fu sempre notata; una variazione dello stesso ordine di grandezza di quella che si otteneva se ai due dischi si frapponeva un foglio di seta ben secco. Anzi con questo artificio fu impossibile ridurre l'ordine di questa frazione percentuale al minimo che si era ottenuto colle armature a stagnola, verosimilmente perchè con questi fogli metallici sottilissimi l'essiccamento poteva essere eseguito più perfettamente e meglio conservato. Sebbene la capacità piccolissima del sistema a dischi richiedesse l'impiego di una forza elettromotrice non piccola per leggere le deviazioni con sicurezza, non si doveva verosimilmente alla resistenza del circuito un ritardo sensibile nella carica. D' altronde variazioni analoghe si verificarono con batterie di parecchi elementi Daniell, con una batteria di 50 piccolissimi accumulatori collocati nella immediata vicinanza dell'apparecchio per semplificare le connessioni, e con una serie di 50 grossi accumulatori a cui le comunicazioni erano stabilite per mezzo di cavi concentrici privi di sensibile selfinduzione.

16. — Un condensatore a seta di capacità notevole.

I risultati ottenuti non sono privi di importanza. Attualmente i migliori condensatori che si pongono in commercio, gli unici che possano adoperarsi come apparecchi normali in esperienze di precisione, sono quelli a mica, di cui il prezzo è però molto elevato, essendo non solo in ragione del prezzo della mica che cresce rapidamente colla dimensione e la purezza di questa, ma in ragione anche delle difficoltà di fabbricazione che sono grandissime, ed a vincere le quali solamente può avere insegnato l'esperienza lunga e minuziosa.

Si dirà tra poco come l'esame di due capacità di 0.1 mF in due condensatori normali del laboratorio abbia mostrato una variazione di carica col tempo quasi eguale in uno di essi e superiore nell'altro a quella della seta. Questa variazione non è identica nelle diverse frazioni di capacità dei condensatori detti, come molte misure hanno mostrato; ma il valore medio pei due condensatori è in ogni caso superiore ad 1 $^0/_0$. La somma di scariche residue dopo 60″ di carica è parimenti prossima a quella della seta.

Ma la seta si può avere ad un prezzo di gran lunga inferiore ed in qualunque dimensione; lo spessore può essere ridotto in ogni caso a pochi centesimi di millimetro, e la costante dielettrica, diminuendo la proporzione dell'aria con conveniente pressione, può diventare forse eguale o superiore ad un terzo di quella della mica. Essenzialmente l'essiccamento è facilissimo e si può fare a temperatura due volte più elevata

di quella della mica, e, se pure con tutti gli artifici che per una fabbricazione appropriata sarebbe agevole di applicare non si riuscisse ad ottenere fenomeni di polarizzabilità lenta più piccoli di quelli della mica, sarebbe sempre altrettanto facile garantire che essi non si modifichino col tempo, mediante chiusure ermetiche opportune.

Per mostrare come la seta possa essere utilmente applicata alla costruzione di condensatori eccellenti si volle ancora istituire un ultimo esperimento a fine di realizzare una capacità un po' maggiore, dell'ordine di quelle che si sogliono applicare più soventi, e di ottenerla in condizioni di sicura invariabilità.

Per questo un vero condensatore da laboratorio fu costrutto con un centinaio di fogli di stagnola di armatura, racchiusi colla seta in un solido telaio di metallo che si protesse con una cassetta di legno portante nel solito modo applicati al coperchio mediante blocchi di ebanite i morsetti per la carica e per la chiusura in corto circuito.

Il telaio è costituito da due robuste lastre di ottone accuratamente levigate di dimensioni 33 $\times$ 18 cm., tra cui può esercitarsi una pressione considerevole ed uniforme mediante 6 viti robuste agli estremi ed al mezzo dei lati maggiori. L'essiccamento dei fogli di seta e di stagnola fu eseguito nello stesso modo di prima sopra grosse lastre di ottone riscaldate colla maggiore uniformità verso i 200°, lasciandovi prima parecchi minuti i singoli pezzi, e rivoltandoli fin che ogni traccia di vaporizzazione d'acqua era scomparsa; poi radunando tutti i fogli d'isolante e d'armatura sopra una lastra conservata lungamente a temperatura poco minore, onde essi all'atto della costruzione si venivano togliendo; finalmente riseccandoli ancora ad uno ad uno sulle prime lastre sopra una delle quali il sistema si veniva completando. I contatti colle armature furono stabiliti lasciando unite ai fogli di stagnola striscie di pochi cm. di larghezza uscenti rispettivamente ai due lati, le quali furono poi insieme ripiegate e compresse tra i piccoli morsetti di rame saldati ai fili di comunicazione che si rivestirono di caoutchouc. L'isolamento dalle lastre d'ottone è garantito con fogli sottili di ebanite che rivestono completamente il telaio, e con fogli sottilissimi di mica ricoprenti tutto lo spazio occupato dalla seta. Quando l'apparecchio fu montato, tra gli orli delle lastre si frapposero striscie di ebanite dello spessore di 5 mm. e di altezza esattamente eguale a quella che il condensatore occupava sotto la pressione più energica delle viti. Per due fori centrali si lasciarono uscire i fili di comunicazione, chiudendo ermeticamente tutte le commessure con mastice.

In queste condizioni è prevedibile che le proprietà del condensatore siano per rimanere indefinitamente immutate. Effettivamente la capacità in molte misure coi condensatori normali del laboratorio ripetute a varia distanza di tempo risultò sempre 0.351 mF alla temperatura di 21°. La proporzionalità della carica alla differenza di potenziale fu verificata a meno di $\frac{1}{1000}$ per le piccole tensioni a cui apparecchi simili si possono destinare, variando il numero di elementi Daniell da 1 a 9, la durata di carica da $0''.0005$ a $10''$. L'isolamento è notevolmente elevato, perchè la determinazione della resistenza col metodo della perdita di carica, tenendo conto delle piccole scariche residue, dà un valore superiore a 10^{10} ohm. Solamente la somma delle scariche residue è un po' maggiore di quella prima ottenuta col condensatore più piccolo, e dopo $60''$ di carica supera di poco 3 %, mentre la massima

variazione apprezzabile nella scarica primaria, mediamente, variando il tempo di carica da 0''.0005 a 60'', si accosta ad 1.7 %.

In condizioni identiche fu constatata per la capacità 0.1 + 0.2 *m*F del condensatore normale Clark una variazione di carica di 1.6 % e una somma di scariche residue poco inferiore al 3 %.

Si noti però: la seta usata qui è della stessa stoffa che servì negli esperimenti a cui per ultimo si accennò, cioè di spessore minore di 0.06 mm.; e siccome un tessuto di questa sottigliezza, non fabbricato con precauzioni speciali a questo scopo, presenta sempre sopra larghe superficie dei punti di minore compattezza, sebbene fossero stati scartati dei pezzi isolanti tutti quelli che mostravano inomogeneità, accadde alla prima costruzione del sistema che sotto la forte pressione alcune delle armature di stagnola venissero attraverso gli interstizi della seta a contatto. Il numero di questi corti circuiti, facilmente accertato mediante una pila ed un galvanoscopio, non era tanto piccolo che potesse consigliarsi di rimuovere semplicemente i pezzi di seta difettosi; quindi nella costruzione definitiva si preferì di raddoppiare lo spessore dell'isolante, cioè di frapporre ad ogni coppia di fogli d' armatura due fogli di seta. Questo ebbe evidentemente per effetto di diminuire notevolmente la capacità e di crescere inversamente il costo; più ancora ebbe per conseguenza una difficoltà maggiore nella essiccazione, per cui questa non raggiunse il grado di perfezione delle precedenti, non essendosi potuto conservare fino agli ultimi fogli che sullo strato si venivano sovrapponendo la temperatura elevata che avevano gli inferiori, affinchè non venissero questi bruciati e fuse le armature.

Lo spessore complessivo, dal sistema di circa 100 fogli di stagnola e 200 di seta occupato tra le lastre, è di 12 mm.; ed in esso od in uno spazio poco superiore capirebbe una capacità quattro volte maggiore se come isolante si adoperasse una stoffa di seta di spessore eguale o poco superiore, purchè ne fosse la struttura più compatta come da una fabbricazione speciale si otterrebbe facilmente. Il confronto dei condensatori a mica non può evidentemente considerarsi molto svantaggioso sotto questo aspetto. Per contro la forma si potrebbe variare a piacere; la graduazione delle capacità sarebbe facilissima variando fra piccoli limiti la pressione; certamente il costo non sommerebbe che ad una piccola frazione di quelli a mica, perchè per la capacità di 1 *m*F potrebbero in ogni caso bastare pochi metri quadrati di stoffa, il cui prezzo non sarebbe elevato.

Solamente una leggera complicazione deriverebbe dalla necessità di tener conto della variazione di capacità al variare la temperatura, la quale è qui notevolmente superiore a quella dei condensatori a mica. Una determinazione esatta del coefficiente di riduzione non fu fatta per questo condensatore. Però per avere un'idea del suo ordine di grandezza la capacità fu in due giorni diversi esattamente misurata alla temperatura dell'ambiente che era 22°, e fu trovata 0.3513 *m*F. Il condensatore fu allora portato in un ambiente artificialmente raffreddato con ghiaccio, e lasciato ivi parecchie ore; vicina si collocò una cassetta di legno identica a quella del sistema, contenente un termometro che segnava, al momento in cui la cassetta fu riportata al luogo di misura, la prima volta 9°, la seconda 9°,5; le osservazioni eseguite rapidamente diedero nei due casi 0.3456 e 0.3462 *m*F. Una variazione analoga si constatò misurando la capacità dopo che la temperatura all'interno della cassetta

si era elevata a circa 35° mediante una lunga esposizione al sole, essendosi trovata la capacità eguale a 0.3550 *m*F. Lasciato alcune ore alla temperatura della stanza il condensatore mostrava di nuovo una capacità identica alla primitiva. Il coefficiente di variazione si potrebbe dunque determinare colla massima esattezza, ed essendo fatta la calibrazione ad una temperatura prossima alla media a cui il sistema vorrebbe essere adoperato, la piccola riduzione, non eccedente di molto 1 millesimo per 1° di differenza di temperatura, si potrebbe applicare in ogni caso nello stesso modo che si è soliti fare nel confronto delle resistenze metalliche o dei campioni di forza elettromotrice.

17. — Variazioni di carica per dielettrici diversi.

L'acqua è la causa principale della lenta polarizzabilità della seta, e verosimilmente di quasi tutte le sostanze organiche nelle quali essa entra come elemento importante di costituzione. E però è naturale supporre che essa abbia un effetto analogo anche in tutti gli altri dielettrici. Per vedere se alcuni di essi subissero in modo specialmente marcato quest'azione, e per avere un'idea della facilità con cui essa potesse essere eliminata, furono prese in esame parecchie delle sostanze che più comunemente si adoperano come isolanti.

Mica. — È il dielettrico considerato fin qui il migliore per la costruzione dei condensatori normali, dove effettivamente offre molti vantaggi per la struttura lamellare che ne permette la sfaldatura in fogli sottilissimi, e pel valore elevato della costante dielettrica unita ad una resistenza specifica che, se è inferiore a quella di molti altri isolanti, è però sufficiente in quasi tutti i casi della pratica. Nelle migliori condizioni il comportamento della mica può osservarsi nei condensatori campioni e qui se ne esaminarono due, rispettivamente della fabbrica Clark e della Carpentier, aventi proprietà perfettamente analoghe. Le due capacità sono parimente graduate per frazioni di 1 *m*F, e la graduazione fu verificata esatta a meno di pochi millesimi, sebbene la misura assoluta della capacità totale abbia accusato un valore un po' superiore a quello dato dalla fabbrica, cioè per quello Clark 1.013 *m*F.

Le curve di carica, come nei casi che precedono ed in quelli che seguiranno, furono determinate col pendolo; e qui, perchè si voleva conservare la sensibilità del galvanometro e tutte le altre condizioni possibilmente eguali a quelle in cui i primi condensatori a seta erano stati studiati, si caricò la capacità di 0.1 *m*F con un solo accumulatore, mentre ne erano presi alcuni in serie nei casi dove la capacità era notevolmente minore. La massima variazione si intende sempre definita dalla minima carica apprezzabile con una durata dell'ordine di 1 a 5 diecimillesimi di 1″ alla massima ottenibile, misurate le cariche come si suole per proporzionalità alle prime elongazioni di scarica.

In condizioni identiche a quelle del primo condensatore a seta, pel condensatore Clark la variazione massima era 1.4 %, la somma di scariche residue dopo 60″ di carica era circa 2 %; pel condensatore Carpentier si trovarono grandezze dello stesso ordine, sebbene un po' minori; cioè variazione 1.12 %, scarica residua 1.6 %. La figura 6 riporta una delle curve pel condensatore Clark rilevata sulla capacità 0.1 + 0.2 *m*F in confronto all'ultimo condensatore più grande a seta:

δ_t	1cm.65	1.8	2.1	3.1	5.1	7.1	9.1	15.1	21.1
e	202.0	202.2	202.5	202.8	203.1	203.3	203.5	203.8	204.0
t''	1″	2″	4″	10″	30″	60″			
e	204.5	204.6	204.8	204.9	205.0	205.0			

La mica quale si trova in commercio non presenta però così eccellenti proprietà dielettriche senza una laboriosa preparazione. Fu verificato qui sfaldando una lastra di mica perfettamente bianca e trasparente, di dimensioni 15 × 18 cm., in molte lastre dello spessore di alcuni centesimi di mm., di cui si costruì un piccolo condensatore. Con questa capacità bastavano, per avere deviazioni notevoli, due soli accumulatori, onde non era la resistenza più grande che nei primi casi. Questa mica allo stato naturale, cioè non altrimenti seccata che mediante strofinamento con cotone secco, mostrò una variazione massima di carica enorme;

dopo cariche di	0″.0002	0″.2	2″	20″	200″
la 1a elongazione di scarica era	118	182	252	311	327.

La somma di scariche residue aveva valori in proporzione elevatissimi. La mica fu dunque seccata sulle lastre di rame come i singoli pezzi di stagnola e ad una temperatura poco più elevata, forse a 250°; la curva apparve molto migliorata; la massima variazione s'era ridotta a 18 %, e le scariche residue s'erano abbassate in corrispondenza:

δ_t	0cm.65	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	7.1	9.1	11.1	13.1	15.1	17.1	21.1
e	114.2	115.7	117.0	117.9	118.4	118.8	119.4	119.9	120.3	120.6	120.9	121.1	121.4
t''	1″	2″	3″	5″	10″	15″	20″	30″	60″	120″	180″		
e	126.0	128.0	129.2	130.3	132.2	133.5	134.5	135.8	136.8	137.9	139.0		

Supponendosi che a temperatura più elevata l'essiccazione darebbe risultati migliori, le stesse lastrine di mica furono portate a temperatura elevatissima in modo da comunicare loro un principio di arroventamento; però la variazione di carica era in seguito molto cresciuta, e dell'ordine di grandezza della prima osservata. Evidentemente dove la mica è diventata una volta incandescente le sue proprietà fisiche si sono profondamente modificate, e come è diminuita la sua durezza e trasparenza e in genere la sua fisica elasticità, è pur divenuta molto più imperfetta la elasticità elettrica, salvo che è verosimile che questa diminuzione cominci a temperatura molto

più bassa della prima, o almeno più bassa della temperatura a cui i mezzi ordinari ci permettono di apprezzare la prima.

Non era dunque improbabile che la prima essiccazione si fosse eseguita già a temperatura troppo elevata. Per provarlo due nuove lastre di mica di spessore circa 0.3 mm. aventi una tinta leggermente bruna, ma però un aspetto perfettamente omogeneo, furono esperimentate prima allo stato naturale, seccate con solo strofinamento, poi riscaldandole a temperatura molto inferiore a 200°; i fogli di stagnola erano in ogni caso seccati a circa 200°. Nel primo caso la variazione di carica era poco inferiore al 50 %; nel secondo era discesa a 30 %; ma riscaldando di nuovo poco sopra 100° per tempo più lungo, e provando a sostituire ai pezzi di stagnola due lastre levigate di rame che si erano potute scaldare a temperatura più elevata e strofinare fortemente per assicurarsi che ogni traccia di umidità condensata alla superficie fosse eliminata, non fu possibile ottenere una variazione minore del 20 %.

È però chiaro che la condizione della mica in lastre a spessore notevole era rispetto alla essiccazione meno vantaggiosa. Prescindendo difatti dalla costituzione chimica di questo complesso silicato, che è sempre diversa nei varii casi, e probabilmente corrisponde a proprietà dielettriche diverse, la struttura lamellare è favorevolissima alla occlusione di gas, in presenza dei quali si trova verosimilmente anche vapor d'acqua in piccolissime bolle disseminate tra i fogli immensamente sottili della mica. E difatti al riscaldarsi delle lastre di mica compaiono in molti punti, all'interno della massa, bolle che la temperatura crescendo fa dilatare, e che difficilmente possono sfuggire dalle cavità che le racchiudono. Se vapor acqueo è ivi, molto probabilmente a temperatura ordinaria e sotto la pressione notevole che la massa esercita nel contrarsi, si condensa, o riducendosi in bollicine liquide invisibili, o venendo addirittura dalla sostanza solida assorbito. Quanto più sottili possono ottenersi le lastrine di mica, è dunque tanto minore la quantità acclusa di gas, e più facile l'essiccazione.

Tuttavia alcune lastrine sottilissime di mica ricavate dalle due predette, ed una quantità di altre perfettamente bianche e tolte ad un piccolo condensatore del laboratorio che per tempi ordinarii di carica funzionava assai bene, mostrarono per tempi brevissimi una diminuzione di carica molto notevole. La variazione massima difficilmente restava sotto il 15 %.

Dello stesso ordine di grandezza fu la variazione constatata presso due piccole lastre sottili, che per ultima prova si richiesero direttamente alla fabbrica Carpentier di Parigi, e che ivi furono scelte tra quelle adoperate negli ottimi condensatori normali di questa firma. E qui s'era proceduto con tutte le cautele, prima essiccando solo la mica con strofinamento meccanico, poi riscaldandola poco a poco lungamente verso i 100° ed a temperatura superiore.

La preparazione della mica è dunque eccezionalmente difficile e laboriosa. Per dichiarazione della stessa ditta le miche devono subire una diligentissima scelta, ed essere scartate tutte quelle che contengono tracce di ferro, o mostrano, esaminate al microscopio, delle inomogeneità; l'essiccazione si fa poi lentissima in stufe a calor dolce, ove la temperatura non raggiunge 100°. Essenzialmente la riuscita buona degli apparecchi normali è subordinata ad una infinità di precauzioni delicate di fabbricazione che l'esperienza sola ha consigliato. Ma questo non fa che riconfermare quanto si disse dei vantaggi che l'applicazione razionale della seta potrebbe presentare.

Paraffina. — Ha una resistenza specifica centinaia di volte maggiore della mica ed una costante dielettrica pari almeno alla metà di questa, onde pel poco prezzo è opportunissima alla fabbricazione di condensatori per usi comuni di laboratorio, anche per potenziali molto più elevati. Generalmente si impiega impregnandone fogli di carta sottili così che la distanza delle armature possa essere convenientemente piccola. La carta ha pure in determinate condizioni resistenza specifica enorme, e certo buone proprietà dielettriche per quanto i sistemi così costrutti permettono di giudicare.

La fabbrica di cavi elettrici di Cortaillod nella Svizzera fornisce condensatori a carta paraffinata, graduati in frazioni di microfarad, che in confronto a molti altri condensatori posti in commercio presentano proprietà assai buone. La curva a cui si riferisce la tabella seguente si rilevò per la capacità di 0.1 *m*F di un simile condensatore di 1 *m*F, e mostra una variazione massima di 5,7 $^0/_0$; la somma di scariche residue dopo 60″ di carica era circa 5,5 $^0/_0$:

δ_t	$0^{cm}.45$	0.5	0.8	1.1	1.6	2.1	3.1	5.1	9.1	16.1	21.1
e	245.0	247.7	250.8	251.9	253.0	253.5	254.0	254.3	254.7	255.1	255.4
t''	1″	3″	5″	10″	30″	60″					
e	257.5	259.0	259.6	259.7	259.8	259.8					

Però la stessa fabbrica ha costrutto pel laboratorio di Zurigo un gran numero di condensatori a carta paraffinata, chiusi in telai semplicissimi di ghisa, dei quali la capacità è meno accuratamente graduata, non dovendo servire questi come campioni di unità, ma di cui le proprietà sono eccellenti. La somma di scariche residue dopo 60″ di carica non supera in uno di questi condensatori qui esaminato, il 4 $^0/_0$; la variazione massima fu constatata nella carica di 3 $^0/_0$, sebbene questa capacità che era circa 1 *m*F si sia dovuta caricare per servirsi dello stesso galvanometro con una piccola forza elettromotrice, e si siano perciò messe in opposizione una pila Daniell con una Clark, dove la resistenza era notevolmente elevata. La curva è qui riferita (V. Fig. 7):

δ_t	$0^{cm}.6$	1.1	1.6	2.1	3.1	5.1	9.1	15.1	21.1
e	299.0	300.9	301.7	302.1	302.5	302.9	303.5	304.0	304.4
t''	1″	3″	5″	10″	20″	60″			
e	305.7	306.9	307,5	308.1	308.2	308.2			

Condensatori di questa natura hanno servito alla costruzione del gran cavo del laboratorio di Zurigo, avente una resistenza di 375000 ohm ed una capacità comples-

siva di 620 microfarad, destinato allo studio della trasmissione di correnti continue ed alternative. Per questo la esiguità dei fenomeni di polarizzazione successiva era una condizione essenziale per giungere alla verifica, che si ottenne con mirabile precisione, delle formole date dalla teoria. Le proprietà dei cavi nella pratica non sono mai altrettanto perfette.

La fabbricazione dei condensatori a paraffina dev'essere specialmente agevolata dalla possibilità di eliminarne l'acqua scaldando la paraffina ad una elevata temperatura, che fuori dell'aria può salire sopra 300°. La paraffina come si trova in commercio contiene verosimilmente sempre delle tracce d'acqua sciolte; almeno alla superficie una piccola quantità ne è sempre condensata, che si scioglie nella massa quando questa fonde a bassa temperatura.

Fu sperimentata una sottile lastra di paraffina ordinaria, raschiandone rapidamente lo strato superficiale ed applicandovi due armature di stagnola; la variazione di carica fu 30 %. Tenendo la temperatura della paraffina fusa per qualche tempo verso i 100°, colando questa in un telaio di vetro di cui s' era rivestito il fondo di stagnola ben secca, e sovrapponendovi ancora a caldo la seconda armatura, la variazione massima non si abbassò sotto 20 %, nè la somma di scariche residue dopo 60″ di carica sotto 24 %. La forma della curva è caratterizzata dalla serie seguente, che è una di quelle rilevate nelle condizioni ora dette:

δ_l	0cm.85	1.1	2.1	3.1	5.1	7.1	9.1	13.1	17.1	21.1
e	71.0	72.2	74.4	75.4	76.5	77.2	77.6	78.1	78.5	78.8
t''	1″	2″	3″	5″	7″	10″	15″	20″	30″	
e	93.3	95.8	97.0	98.2	99.0	99.9	100.6	100.9	100.9	

Ebanite. — Ha una resistenza specifica poco inferiore a quella della paraffina, ed in un grandissimo numero di casi si presta come ottimo tra gli isolanti nella costruzione degli apparecchi da laboratorio. Alla costruzione di condensatori non fu molte volte applicata, perchè la fabbricazione di fogli molto sottili offre gravi difficoltà e rende il prezzo molto elevato.

Nel laboratorio di Zurigo fu però montato un condensatore a fogli di ebanite della grossezza di circa 0.5 mm., a quest'uopo fabbricati. La capacità è di circa 1 *m*F, e le proprietà assai buone; il volume è però notevole ed il costo fu molto superiore a quello dei condensatori a mica.

Per il confronto cogli altri dielettrici qui studiati si presero in esame alcuni fogli di ebanite della medesima natura. Essendo la superficie perfettamente levigata una meccanica essiccazione è relativamente facile, ed è sufficiente, se l' ebanite fu conservata in un ambiente ben secco, per dare ottimi risultati. Ma se l' ebanite è stata lungamente esposta all'aria umida, una quantità d'acqua si è verosimilmente condensata tra i pori della sostanza, e ad espellerla non basta uno strofinamento meccanico nè il leggero riscaldamento che la sostanza può subire prima di rammollirsi.

Per questo i piccoli fogli di ebanite stati lungamente impiegati ad altri usi mostrarono una variazione di carica del 30 %, ed una somma di scariche residue corrispondentemente elevatissima.

Ma un condensatore costrutto con pochi grandi fogli nuovi, seccati coll'esporli lungamente al sole e collo strofinarli fortemente con cotone caldo mentre le armature di stagnola venivano riscaldate a 200°, presentò una massima variazione di 4,3 % circa, e dello stesso ordine era la somma di scariche residue dopo 60″ di carica. È qui riferita la curva rilevata mediante due soli accumulatori in serie (V. Fig. 8):

δ,	$0^{cm}.55$	0.6	0.7	0.9	1.1	1.6	2.1	3.1	5.1	9.1	13.1	21.1
e	93.8	94.3	94.5	94.75	94.85	95.1	95,2	95.4	95.6	95.8	96.0	96.2
t″	1″	2″	5″	20″	30″							
e	97.3	97.8	98.0	98.0	98.0							

Le condizioni di questo condensatore si conservarono lungamente inalterate senza altra protezione che la pressione energica, che faceva perfettamente aderenti i fogli di ebanite ed impossibile l'accesso dell'aria. Per contro non si riuscì ad ottenere risultati migliori ripetendo parecchie volte l'essiccamento colla massima cura. E tuttavia è altamente verosimile che le tracce di umidità assorbite dalla massa fossero ancora la causa principale di quella lenta polarizzabilità, perchè gli stessi fogli conservati per settimane nell'ambiente del laboratorio mostrarono in misure successive una variazione sempre più marcata ed impossibile ad eleminarsi. Non sarebbe però difficile premunirsi da questo inconveniente con precauzioni speciali all'atto della fabbricazione e seguenti ad essa.

Solfo. — Non avendo applicazioni in genere come isolante, l'esame di esso non era per altro interessante se non perchè esso è uno dei pochissimi dielettrici che si possano avere allo stato di assoluta purezza. La facilità di colarlo in lastre molto sottili agevolava specialmente l'esperimento, sebbene le lamine prendano nel raffreddarsi una struttura cristallina inomogenea. Per contro la temperatura relativamente bassa a cui lo zolfo fonde, e l'impossibilità di tenerlo nell'aria a temperatura molto più elevata senza che lo stato della sostanza accenni a modificarsi molto prima che una vera deformazione allotropica abbia luogo, impediscono di assicurarsi che tutta l'acqua sia stata espulsa.

I piccoli condensatori erano costrutti come quelli a paraffina in sottilissimi telai di vetro riscaldati gradatamente sopra i 100°, ove il primo foglio di armatura si adagiava accuratamente sul fondo, ed il secondo si applicava sulla lamina di zolfo al primo accenno di solidificazione; l'adesione a caldo era perfetta.

Furono così esaminati vari campioni di zolfo raffinato in bastoni, che mostrarono variazioni di carica e somme di scariche residue elevatissime. Lo zolfo puro in polvere, tenuto lungamente sotto la campana della macchina pneumatica a pochi millimetri di mercurio di pressione per seccarlo in presenza di acido fosforico, poi con-

servato liquido parecchio tempo verso i 120° agitando la massa liquida continuamente per facilitare la liberazione delle particelle di vapor acqueo, mostrò ancora una variazione di carica di circa 14 % come risulta dalla serie:

δ_t	1cm.0	1.6	2.1	3.1	5.1	7.1	9.1	13.1	17.1	21.1
e	66.3	67.1	67.5	68.2	69.0	69.4	69.7	70.1	70.3	70.4
t''	1″	2″	4″	7″	10″	20″	30″	60″		
e	74.7	75.8	76.2	76.3	76.4	76.5	76.6	76.8		

Parecchi altri tentativi condotti in modo analogo diedero analoghi risultati; ma non sarebbe possibile dedurne se questa sia una proprietà inerente alla sostanza, o se, come è verosimile, dipenda ancora in massima parte dalle condizioni igroscopiche della medesima. Perciò occorrerebbe fare una serie sistematica di osservazioni, o distillando in precedenza lo zolfo direttamente, o tenendolo lungamente fuori dell'aria a temperatura possibilmente alta.

Gomma lacca. — Ha una grandissima resistenza specifica che la rende preziosa specialmente come vernice isolante. Però si suole sempre applicare sciolta in alcool, e, perchè questo non è quasi mai puro, lascia evaporando certamente residui d'acqua. Verosimilmente erano questi che nella prova qui fatta, sciogliendo a caldo la gomma in molto alcool e impregnandone fogli di seta prima seccati, mascheravano il comportamento della sostanza principale, perchè non si riuscì ad ottenere variazioni massime di carica inferiori al 20 % con scariche residue corrispondentemente elevate.

Guttaperca. — Dovendosi sperimentare in fogli sottili, l'essiccamento è reso assolutamente difficile dalla natura stessa della sostanza che ha sempre condensata alla superficie una grande quantità di acqua; ora questa non può essere senza artifizi specialissimi eliminata, non potendo assoggettarsi la sostanza a strofinamento meccanico nè a riscaldamento sensibile. Tuttavia fogli di guttaperca furono osservati dopo lunga esposizione all'aria secca, ed al sole, e ad un getto d'aria artificialmente seccata attraverso un tubo ad acido fosforico, mandata sotto pressione da un piccolo ventilatore; ancora lasciando i pezzi per parecchi giorni sotto la campana della macchina pneumatica nel modo solito. Il migliore risultato che si ebbe corrispondeva però ad una variazione massima di carica del 23 % e ad una somma di scariche residue dopo 60″ di carica pari al 40 %. Esso è riferito nella serie seguente:

δ_t	1cm.1	1.15	1.2	1.6	2.1	3.1	5.1	9.1	13.1	17.1	21.1
e	54.5	56.0	57.0	58.3	59.3	60.3	61.3	62.4	63.0	63.4	63.8
t''	1″	2″	3″	5″	10″	15″	20″	30″	60″	120″	
e	66.7	67.7	68.2	68.6	68.9	69.2	69.4	69.7	70.2	70.8	

Vetro. — È noto che le sue proprietà dielettriche sono in genere molto imperfette, sebbene la resistenza specifica sia molto grande. Il comportamento varia enormemente colla natura della sostanza, ed è prevedibile che un esame sistematico delle diverse qualità di vetro, nel quale uno alla volta e per gradi si variassero gli elementi di questo composto complicato, scoprirebbe con sicurezza l' influenza di ciascuno di essi, e darebbe utile norma per la scelta di vetri adatti alle applicazioni dielettriche. Non altrimenti nel laboratorio di Jena, che ha fama meritata per la produzione di vetri ad usi scientifici, si è precisata negli ultimi anni l'azione dei vari costituenti del vetro sulla sua dilatabilità termica, che ha tanta importanza nei termometri di precisione, e si riuscì colla scelta razionale di essi ad eliminare quasi perfettamente quella che potrebbe dirsi isteresi termica, cioè il ritardo con cui il vetro segue nella dilatazione le modificazioni di temperatura. È questo un fenomeno che si può ben paragonare al ritardo con cui un dielettrico in genere, ed il vetro in particolare, subisce la polarizzazione elettrica.

Qui trattavasi solo di avere un'idea dell'ordine di grandezza dei fenomeni che questo ritardo può produrre, tanto più che nel caso generale il vetro adoperasi in lastre a superficie molto levigata, e l' essiccamento può farsi specialmente accurato strofinando energicamente e riscaldando sopra i 100°.

Fu perciò sperimentata, dopo essiccamento diligente, una lastra di vetro comune. Ma, in perfetta conformità col fenomeno notissimo delle numerose scariche residue della bottiglia di Leyda, la carica apparente, misurata dalla prima elongazione di scarica, andò crescendo per un tempo molto lungo, e certamente la carica totale sarebbe cresciuta per un tempo molto maggiore. Definita nel solito modo la variazione di carica era circa 33 %, ed all' esaurimento delle scariche residue non bastava un grandissimo numero di minuti. È riferita la curva di quella variazione nella Fig. 9, e nella serie seguente:

δ_t	1cm.0	1.5	2.1	3.1	4.1	5.1	7.1	9.1	11.1	15.1	21.1
e	137.5	145.2	149.5	152.5	154.5	156.2	158.5	160.0	161.0	162.8	164.9
t''	1″	2″	3″	5″	7″	10″	15″	25″	60″	90″	120′
e	186.0	192.6	195.2	197.6	198.6	199.7	200.8	202.3	203.8	204.8	205.0

In questo caso la presenza dell'acqua era in massima evidentemente esclusa; tuttavia i caratteri del fenomeno non si mostrano essenzialmente diversi da quelli dei corpi nei quali la presenza di un elettrolito è facile a constatare. E siccome si può avere il vetro in speciali condizioni comportantesi come un corpo eminentemente igroscopico, può vedersi subito che la presenza dell'acqua modifica l'andamento della curva in modo continuo, e si può pensare che la polarizzazione dei dielettrici in genere presenti sempre con quella degli elettroliti una strettissima analogia. Di più è interessante vedere sotto quali aspetti le proprietà elastiche e quelle dielettriche dei corpi possano essere confrontate; e, come tra i dielettrici organici si prestava

a ciò specialmente opportuna la seta, tra i dielettrici inorganici comuni poteva esaminarsi il vetro con vantaggio.

Fu adoperata a ciò la così detta lana di vetro, costituita da fili di vetro sottilissimi e brevi, arricciati in un ammasso quale si suole applicare per avere un buon coibente termico. Le proprietà elastiche furono poi esaminate, come si dirà, sopra lunghi fili regolari di vetro; di questi e dei primi l'aspetto essendo del tutto identico, ed entrambe le sostanze essendosi ricevute dalla medesima fabbrica, era molto verosimile che tutte due avessero eguale costituzione. Appunto per la piccolissima conduttività termica e per la enorme superficie che presenta la lana di vetro ha un potere igroscopico grandissimo, ed è veramente difficile conservarla con artifizi comuni libera da umidità condensata. Tuttavia l'essiccazione si può fare a temperatura molto elevata, e qui fu eseguita frammezzo a due lastre metalliche scaldando verso 300°: la variazione di carica, prima colossale, si mostrò dopo ciò notevolmente diminuita, ma non tanto che la variazione ultima non fosse ancora di gran lunga superiore e tutte quelle prima constatate. Ciononostante risulta dalla curva qui riferita nella tabella che la forma è ancora quella che pel vetro si era ottenuta. Dopo 20″ di carica la somma di scariche residue era circa 60 % della scarica primaria.

δ_t	0.8	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	7.1	9.1	11.1	13.1	17.1	21.1
e	33.5	40.0	48.8	54.2	58.0	61.2	65.8	69.2	72.5	75.0	79.3	82.5

t''	1″	2″	3″	4″	5″	6″	8″	10″	15″	20″	30″
e	104.5	115.5	120.5	123.4	125.5	126.7	128.5	129.2	130.5	131.2	133.0

Olio. — L' esame di questo poteva interessare come d'un tipo dei dielettrici liquidi non elettrolizzabili: ma si riscontrò una polarizzabilità successiva enorme. Olio puro di lino fu scaldato lungamente verso i 150°, e portato così caldo sotto la campana della macchina pneumatica in presenza di acido fosforico anidro. Diminuendo la pressione a pochi mm. di mercurio, una grande quantità di bolle si svolgeva, e dopo ripetuta l'operazione del riscaldamento e della diminuzione di pressione una 2ª volta, avendovi già immerso i fogli di seta che dovevano conservare a distanza le armature, si poteva ammettere che la massima parte dell'acqua fosse eliminata. Le armature di stagnola vennero applicate dopo averle riscaldate nel solito modo, e si fecero aderire perfettamente con pressione notevole, così che tutta l'aria era esclusa. La curva di carica continuava per un lunghissimo tempo a salire, sebbene l'elettrolisi di tracce d'acqua, se eventualmente avessero potuto restar ancora, fosse impossibile quando la carica si eseguiva con una forza elettromotrice piccola, cioè con un elemento Daniell ed un Clark in opposizione: la variazione di carica tra 1″ e 20″ raggiungeva ancora qui 70 %.

18. — Osservazioni sui fenomeni di lenta polarizzabilità.

Da tutto ciò che s'è detto si può concludere ad alcune osservazioni generali. Qualunque sia la natura della polarizzazione elettrostatica, cioè qualunque sia l'intima essenza di quella modificazione dello stato molecolare che noi definiamo con quella parola, è certo che essa non si suole mai produrre istantaneamente, cioè le molecole non sogliono raggiungere il nuovo equilibrio se non con una certa lentezza quando sopra di esse son venute ad agire le forze elettrostatiche. Questa lentezza è diversa nei diversi corpi, e dev'essere connessa strettamente colla natura loro e del loro raggruppamento molecolare. Essa è la causa principale della variazione di carica nei condensatori oltre i tempi ove intervengono i fenomeni dovuti alla induzione ed alla resistenza del circuito. Inversamente essa è la causa di tutti i fenomeni di scarica residua e di una gran parte dei fenomeni di variazione della resistenza apparente sotto potenziale costante.

Nessuno dei dielettrici comuni ha mostrato sinora la proprietà di polarizzarsi istantaneamente, e forse essa non appartiene che all'etere, polarizzandosi solamente i gas con una tale rapidità che il tempo a ciò necessario sfugge alle nostre osservazioni. Le sostanze organiche, che hanno in genere una struttura più complicata, non presentano però necessariamente una lentezza di polarizzazione maggiore, se non in quanto esse sogliono contenere quantità variabili di liquidi, elettroliti o non. Difatti, quando due sostanze si trovano in presenza una dell'altra, esse subiscono indipendentemente l'azione delle forze elettrostatiche, e, come l'energia della loro polarizzazione interviene proporzionalmente al volume nell'aumento della energia racchiusa nel condensatore, così essa si va per fenomeni paralleli immagazzinando in ciascuno di essi. La presenza dei liquidi si rende specialmente avvertibile perciò che in essi la lentezza della modificazione nell'equilibrio molecolare è sempre marcatissima.

I fenomeni di lenta polarizzazione non sono dunque fenomeni elettrolitici, sebbene, quando questi intervengono, quelli vi siano sempre accompagnati e presentino con essi alcuni caratteri comuni.

Ora i fenomeni elettrolitici seguono leggi perfettamente definite e semplicissime; non è egli possibile che quelli di polarizzazione siano retti da norme costanti nella successione del tempo, oltre che nella funzione della forza che li produce, dove una semplice proporzionalità pare sia già accertata? Per rispondere a questa quistione non è inutile stabilire alcune analogie.

19. — Fenomeni di lenta deformazione elastica: misura del modulo di elasticità.

L'idea della analogia dei fenomeni di polarizzabilità dei dielettrici e di deformazione dei corpi elastici è generalmente diffusa, accennandosi sempre quando si parla di scariche residue di condensatori a dielettrico imperfetto alla rassomiglianza

colle manifestazioni di elasticità susseguente nei corpi non perfettamente elastici. L'esame della seta come tipo tra le sostanze isolanti organiche s'era appunto presentato più opportuno per la possibilità di studiare parallelamente i due ordini di fenomeni.

W. Weber in Gottinga fu il primo ad occuparsi sistematicamente delle deformazioni elastiche della seta, ed i risultati delle sue ricerche, estesi alle deformazioni dei corpi elastici in genere durante la loro fase variabile, furono pubblicati da lui in tre memorie (1) che formarono la base della prima teoria esatta della elasticità. Difatti in esse la prima volta si fece luogo alla considerazione del tempo nelle deformazioni, e senza tener conto di esso la legge di proporzionalità della deformazione e della forza non può semplicemente essere verificata.

Weber definì azione susseguente della forza (Nachwirkung) l'effetto di essa che si produce nei tempi seguenti l'istante in cui la forza è venuta ad agire. Essa non è naturalmente da confondere colla deformazione permanente a cui ogni nuova applicazione della forza può dare origine, perchè, se forze eguali o minori si vanno successivamente riapplicando, le deformazioni nuove permanenti vanno diminuendo e finiscono per sparire, e allora veramente la deformazione totale è solo proporzionale alla forza. Per contro l'azione susseguente non cessa mai di verificarsi, ed a regime in una serie indefinita di deformazioni elastiche originate da una medesima forza si conserva inalterata. Di più, per definizione stessa, la deformazione permanente, come conseguenza di una forza una volta applicata, rimane nel corpo; la deformazione susseguente è funzione essenzialmente del tempo, e al prolungarsi di questo, se la forza è cessata, essa scompare.

Per enunciare una teoria di questa elastica deformazione Weber considera le molecole del corpo elastico come dotate di tre assi di elasticità. In una deformazione simmetrica rispetto tre assi qualunque, come potrebbe essere una dilatazione termica di corpi isotropi, le dimensioni del corpo e le distanze delle molecole crescerebbero egualmente in tutti i sensi, cioè la posizione relativa degli assi molecolari non varierebbe. Ma in una deformazione elastica, per esempio per tensione, le molecole sono generalmente sollecitate ad allontanarsi in una sola direzione, e ad avvicinarsi per conseguenza nelle direzioni normali; quindi gli angoli fra gli assi di elasticità delle molecole diverse cambiano. Le molecole subiscono, una rispetto all'altra, una rotazione; e questa non può avvenire istantaneamente, perchè si devono vincere le forze di coesione molecolare che agiscono come resistenze passive, ed eseguire un lavoro della natura d'un lavoro d'attrito, il quale suole sempre ritardare il moto relativo dei corpi materiali che sono in contatto.

E per formulare una legge di questa deformazione successiva suppone Weber che le molecole del corpo si muovano verso la nuova posizione di equilibrio con una velocità funzione della distanza che da questa ancora le separa.

Se si dice x questa distanza, essa è naturalmente una misura della deformazione del corpo che deve ancora succedere, e quella velocità che si può dire di deforma-

(1) *Pogg. Ann.*, XXXIV, 1835: " Ueber die Elasticität der Seidenfaden ". — *Gottingae Sumpt. Dieterich.*, 1841: " De fili bombycini vi elastica ". — *Pogg. Ann.*, LIV, 1841: " Ueber die Elasticität fester Körper ".

zione è rappresentata da $-\frac{dx}{dt}$. Se si suppone che questa velocità sia proporzionale al quadrato di quella distanza, si ha:

$$-\frac{dx}{dt}=\frac{x^2}{b}\,; \qquad x=\frac{b}{t+c}\,;$$

che si esprime: “ la parte di deformazione che ad un dato istante deve ancora succedere è inversamente proporzionale al tempo trascorso da una origine che per ogni caso si può determinare in base ai risultati della esperienza ed alla curva del fenomeno „. Questo equivale evidentemente ad ammettere che la curva sia una iperbole, di cui un asintoto è l'asse delle ascisse, e l'altro è parallelo a quello delle ordinate, determinante appunto l'origine dei tempi.

Ma siccome questa legge non risponde con molta approssimazione ai risultati delle misure, Weber ammette semplicemente che la velocità di deformazione sia proporzionale ad una potenza da determinare della deformazione stessa:

$$dx=-b\,x^m\,dt;$$

e deduce il valore della deformazione che deve ancora seguire ad un dato istante:

$$x=[(m-1)\,b]^{\frac{1}{1-m}}\,(t+c)^{\frac{1}{1-m}},$$

dove dalla esperienza sono da dedurre i tre coefficienti $m.b.c$, ed in esperienze diverse con uno stesso filo non si possono *a priori* ritenere invariati se non b ed m che dipendono esclusivamente dalla natura del filo.

Come si vede, sebbene la forma della curva possa ancora compendiosamente definirsi come una iperbole di ordine m, l'espressione della legge non è più semplice, cioè non si scopre a primo aspetto un significato fisico semplice nella formola la quale non può servire se non come una descrizione analitica più o meno rigorosa del fenomeno.

Non perciò sono meno importanti i risultati generali a cui Weber giunge con questa discussione, pel fatto che quella formola risponde con molta approssimazione alle sue misure.

È difatti evidente che l'origine delle coordinate qui non rappresenta alcun punto particolare della curva, corrispondendo essa semplicemente all'istante nel quale le condizioni inerenti all'esperienza hanno permesso di cominciare le letture. La curva è pertanto continua tra i suoi due asintoti, come certamente è continua ogni manifestazione di un fenomeno naturale. Ma allora la stessa curva colla stessa approssimazione deve includere la rappresentazione della prima parte del fenomeno, la quale noi possiamo solo considerare come istantanea in ragione della sensibilità dei nostri mezzi di osservazione che non ci permettono di apprezzarne la durata. Ne viene che da noi non si può parlare di deformazione elastica corrispondente ad una data forza se per quella non si intenda la deformazione totale, cioè il valore che questa ha preso quando le molecole hanno raggiunto il nuovo equilibrio stabile;

sebbene a questo esse non si avvicinino che lentamente, ed in molti casi non si possa dire che sensibilmente esse l'abbiano raggiunto prima che un tempo lunghissimo sia trascorso. Solamente per questa deformazione finale può essere definito il modulo di elasticità, e mediante la misura di essa essere questo verificato costante fra i limiti di elasticità.

20. — Analogia dei fenomeni di lenta polarizzazione dielettrica: misura delle capacità.

Nel caso della polarizzazione elettrica noi assistiamo a fenomeni precisamente della stessa natura di quelli ora descritti.

Prescindiamo da tempi eccezionalmente brevi, durante i quali hanno importanza fenomeni secondari dovuti alla induzione ed alla resistenza. Ad essi corrisponderebbero i tempi, di cui non è quistione qui, durante i quali sono sensibili nelle deformazioni elastiche le azioni d'inerzia e di resistenze passive; ed è ben noto che le oscillazioni iniziali hanno gli stessi caratteri e possono rappresentarsi colla stessa equazione in una deformazione elastica sotto l'azione di una forza bruscamente venuta ad agire, come nella carica di un condensatore di cui le armature si siano repentinamente portate ad una data differenza di potenziale.

Ma, indipendentemente da ciò, o supponendo di impedire le oscillazioni elastiche con una resistenza passiva conveniente come con una resistenza ohmica sufficiente si possono sempre prevenire le oscillazioni della carica d'un condensatore, noi abbiamo veduto che questa carica non avviene mai istantaneamente, ma si fa secondo una curva che va salendo con rapidità diversa per le sostanze diverse e per le diverse condizioni in cui sono sperimentate. I fenomeni di scarica non sono che gli inversi di quelli di carica, come le opposte deformazioni di un filo elastico dove la forza stirante fu aumentata e diminuita; quando noi giudichiamo che gli uni o gli altri siano completi, ciò non vuol dir altro se non che le variazioni posteriori sfuggono ai nostri mezzi di osservazione. Ma noi vedemmo già che durante ore intiere varia la carica totale di un condensatore ordinario, e dopo ore di scarica il condensatore suol ancora sempre presentare una maggiore facilità ad essere caricato, la quale non sussisterebbe se il dielettrico non conservasse una parte della polarizzazione. Solamente, perchè essa va scomparendo con grandissima lentezza, non dà più luogo per noi a scariche residue in brevi intervalli di tempo apprezzabili. Il tempo che fili elastici di diversa natura impiegano, perchè l'allungamento sotto una forza stirante sia massimo, o perchè al cessare di questa essi ritornino alla lunghezza primitiva, è molte volte dello stesso ordine di grandezza e talora maggiore.

Pel confronto noi dobbiamo paragonare gli allungamenti, riferiti alla lunghezza iniziale, che il filo ha fino ad un dato istante subìto sotto uno sforzo costante, colla quantità totale di elettricità che si è immagazzinata nel condensatore, prescindendo naturalmente da fenomeni secondari di dispersione e conduzione. Dalla scarica del condensatore noi non possiamo dedurre quella quantità se non sommando con quella che diciamo scarica primaria tutte le scariche secondarie che ad essa succedono sino ad esaurimento completo della polarizzazione.

Ma dunque una curva sola e continua deve rappresentare per noi l'andamento della carica o quello della scarica, e la distinzione di scarica primaria dalle scariche residue non ha senso se non in quanto la durata di quella rispetto i nostri mezzi di osservazione si possa considerare istantanea. In valore assoluto non esiste che una carica ben definita, ed è quella che il condensatore ha preso quando la corrente che arriva alle armature si è ridotta a zero od al minimo valore che corrisponde alla resistenza ohmica del dielettrico; ed in valore assoluto non può definirsi la capacità se non il rapporto della quantità di elettricità che allora è nel condensatore alla differenza di potenziale delle armature.

La misura delle capacità, come attualmente è fatta in generale, è dunque per principio inesatta; ed inesatti sono i valori che da essa si sogliono dedurre delle costanti dielettriche.

Si sogliono misurare le capacità proporzionalmente alle quantità di elettricità che esse, quando furono caricate per un tempo convenientemente lungo con una stessa forza elettromotrice, scaricano, dicesi, istantaneamente attraverso un galvanometro balistico; e la durata di carica non si suole con miglior criterio determinare, se non assumendo quella dopo cui la prima elongazione del galvanometro non cresce più, per quanto i mezzi di lettura permettono di osservarlo. Se si volessero confrontare le scariche dopo tempi qualunque di carica eguali, evidentemente si avrebbe un carattere di più di arbitrarietà.

Si vorrebbe dunque considerare come carica del condensatore solamente la quantità di elettricità che si è accumulata sopra le sue armature, e potrebbe essere una definizione relativa precisa, se precisamente si potesse definire la durata della scarica istantanea. Ma questa definizione è puramente convenzionale.

Se si vuole assumere come durata di scarica istantanea semplicemente un tempo così breve che sia trascurabile rispetto alla durata di oscillazione dell'ago, lo che basta per soddisfare alle condizioni di una misura esatta di quantità di elettricità mediante il galvanometro balistico, si potrà variare quel tempo in ragione delle condizioni del galvanometro, e del momento d'inerzia dell'ago, o dello smorzamento delle oscillazioni; lo che è assurdo.

Se la chiusura del circuito sul galvanometro si vuol prolungare all'atto della scarica per un tempo comunque breve ma costante, la quantità di elettricità che si scaricherà sarà sempre l'integrale, durante quel tempo, della intensità di corrente, e, come tale, funzione non solo delle proprietà del dielettrico, ma anche delle condizioni di resistenza e di selfinduzione del galvanometro che variano da caso a caso. Ora, anche in condizioni identiche di circuito esterno, l'interna capacità di condensatori diversi farà che non sia proporzionale la quantità di elettricità da essi scaricata, perchè noi vedemmo che a ciò occorrerebbe un tempo che fosse proporzionale alla capacità medesima, come dice la formola

$$t = \mathrm{C}\, r \log n$$

da noi prima riferita, e da cui per tempi di quest'ordine di grandezza non si può più prescindere. Per questi tempi stessi, e più per tempi maggiori, se essi si volessero adottare per convenzione, la forma della curva di scarica per dielettrici diversi,

parimenti tangente ai due medesimi asintoti, ma da essi variamente scostantesi perchè la curvatura è funzione della rapidità di polarizzazione, farà che quantità assolutamente diverse di elettricità si scarichino, e con legge assolutamente diversa vengano ad agire sull' ago la cui velocità non può essere considerata nulla se non per un tempo brevissimo.

Se si possedesse un galvanometro balistico senza selfinduzione, e si scaricasse il condensatore attraverso un circuito senza resistenza, non si potrebbe teoricamente ancora avere una misura indipendente dalla depolarizzazione del dielettrico, e quindi rigorosamente definita, se non realizzando un tempo di scarica infinitesimo.

La capacità dunque che si è soliti misurare è una grandezza apparente che non ha valore se non in rapporto alla definizione arbitraria che noi ne sogliamo dare, ed alla approssimazione delle nostre misure. Un valore assoluto non si potrebbe valutare se non dalla quantità totale di elettricità del sistema dopo una carica indefinitamente lunga, ed essa non si potrebbe altrimenti immaginare integrata se non mediante una serie di scariche successive istantanee, prolungata fino ad esaurimento completo della polarizzazione; e per scariche istantanee si potrebbero accettare durate comunque brevi fra certi limiti arbitrari, purchè tali che soddisfacessero alla ipotesi della misura col galvanometro balistico. La misura diretta della corrente, che dopo i primi istanti si potrebbe fare agevolmente, sarebbe in quelli impossibile per la sua enorme variabilità. Solamente se processi comuni elettrolitici potessero realizzarsi in condizione di conveniente sensibilità per quantità eccezionalmente piccole di elettricità potrebbero fornire un mezzo semplice di misura. In ogni caso però se una conduttività esistesse nel mezzo coibente, ed una corrente di conduzione si verificasse in ogni istante secondo leggi non perfettamente accertate, la misura teorica sarebbe impossibile.

Vero è che nella pratica si tratta sovente di sistemi le cui proprietà si scostano relativamente poco da quelle di un condensatore ideale a polarizzabilità istantanea; e in tali casi una definizione ed una misura convenzionale di capacità può sempre utilizzarsi con approssimazione sufficiente. Ma non è men vero che il valore ne è puramente relativo, e se un campione di capacità unitaria si volesse stabilire come fu fatto di resistenza e di forza elettromotrice occorrerebbe trovare un dielettrico ove effettivamente la polarizzabilità fosse istantanea; cosa che rimarrebbe verosimilmente irrealizzabile se non si ricorresse a gas secchi od a spazi vuoti d'aria.

Non è d'uopo avvertire che, se si potesse facilmente dare ad un condensatore una quantità determinata di elettricità, e si volesse dedurne la capacità misurando il potenziale, la misura sarebbe molto più complicata, non meno inesatta nella successione del tempo, e di più non suscettibile di correzioni altrettanto facili.

21. — Leggi dei fenomeni inversi di polarizzabilità.

In base alle idee fondamentali accennate si può accedere ad un confronto più intimo dei fenomeni di polarizzazione con quelli di elasticità, e, se si vuole, formularne una teoria perfettamente analoga.

Difatti le molecole del dielettrico si possono immaginare ancora dotate di assi

di polarità elettrica diversa, i quali, quando esso si trova allo stato naturale, siano indifferentemente orientati in tutte le direzioni, onde non ne risulti una determinata polarizzazione della massa; ma che sotto l'azione delle forze elettrostatiche tendano ad orientarsi in una direzione speciale, che è quella del campo, senza potersi sottrarre alle forze molecolari che si oppongono alla rotazione e non possono essere vinte senza la spesa di un lavoro. La posizione nuova di equilibrio sarebbe quella dove le forze elettrostatiche e le tensioni molecolari si compensano, e questa non potrebbe essere raggiunta istantaneamente, ma le molecole vi si andrebbero accostando con una certa lentezza dipendente dalla costituzione molecolare della sostanza, e dal modo risultante con cui le forze che sollecitano le molecole distanti dall' equilibrio loro variano al variare questa distanza.

Si vedrà tra poco che le curve dei due fenomeni presentano caratteri perfettamente paragonabili: e si è già visto come la curva delle cariche totali dopo durate diverse di carica, e quella delle cariche residue dopo durate diverse di scarica, ricordino con una certa approssimazione la forma di una iperbole, avente per asintoti l'asse delle ordinate e rispettivamente una parallela all'asse delle ascisse corrispondente alla carica massima, o l'asse stesso corrispondente alla carica nulla. Quindi, se si volesse, si potrebbe formulare una legge simile a quella che W. Weber diede per i fenomeni di elasticità, e nell'espressione analitica di essa definire per mezzo delle osservazioni sperimentali i vari coefficienti. Salvo che noi abbiamo veduto qui che i fenomeni di lenta polarizzabilità sono potentemente influenzati dalle circostanze esterne, quindi quella determinazione per la medesima sostanza non avrebbe valore se non nel caso preciso in cui essa fu fatta.

Inoltre si noti: il fenomeno della carica del condensatore è perfettamente analogo alla deformazione d'un corpo elastico sotto l' azione di una forza costante, se là il potenziale è costante. Per studiare in modo simile i fenomeni inversi, come noi sogliamo sottrarre il corpo elastico alla azione di ogni sforzo esterno, così dobbiamo annullare in ogni istante la forza elettrostatica che agisce sul dielettrico, cioè tenere le armature in corto circuito. Quando noi cerchiamo di esaurire la carica di un condensatore mediante una serie di scariche ad intervalli di tempo determinati, il fenomeno si presenta con una discontinuità che ne altera il carattere, perchè durante ognuna di queste fasi di isolamento la depolarizzazione che si va continuando nel dielettrico origina nelle armature una nuova carica crescente, cioè una differenza crescente di potenziale. A questa non devesi solamente una corrente di conduzione, se il dielettrico ha una certa conduttività, come fu già avvertito, ma un nuovo campo elettrostatico la cui intensità tenderebbe a crescere col tempo tanto che le nuove forze elettrostatiche facessero equilibrio alle tensioni molecolari; da quel momento, in condizioni di isolamento perfetto, ogni variazione di polarizzazione sarebbe esclusa. Ora, sebbene nelle osservazioni si sia soliti ripetere le scariche residue a distanze di tempo molto minori di quelle che occorrerebbero a raggiungere quell'equilibrio, la prima parte del fenomeno si va ad ogni modo ogni volta ripetendo; cioè la depolarizzazione avviene liberamente solo nei primi istanti dopo ogni nuova scarica; poi la sua intensità va diminuendo così che all'esaurimento completo di tutta la carica occorre un tempo teoricamente più lungo di quello che in condizioni normali non sarebbe occorso.

È un fatto simile a quello che si verificherebbe in un filo di cui la tensione non fosse stata provocata mediante un peso liberamente applicato, ma dall'accrescimento della distanza tra due punti fissi a cui fossero legate le sue estremità. La tensione elastica interna qui andrebbe, per l'azione successiva definita da Weber, diminuendo col tempo, come la tensione elettrica tra le armature del condensatore a cui una volta si fosse data la quantità di elettricità necessaria a caricarne le armature a un potenziale determinato. Quando del filo si riducesse la tensione istantaneamente a zero, avvicinando pel solo spazio a ciò necessario gli estremi, la tensione elastica interna andrebbe riaumentando, non altrimenti che quella elettrica nel condensatore dopo un corto circuito momentaneo.

L'osservazione avrebbe meno importanza pel riguardo di definire sperimentalmente la legge del fenomeno, perchè perciò si potrebbe ricorrere alla curva della scarica continua, misurando in ogni istante la intensità di corrente, cioè studiando l'equazione differenziale del fenomeno da cui Weber partì a sua volta per formulare la sua ipotesi. Ma essa non può essere dimenticata se i due fenomeni inversi della polarizzazione si vogliono confrontare direttamente, e se di essi si vuol verificare una proprietà accertata da Weber pei fenomeni di elasticità, che dichiara uno dei caratteri più importanti della carica e della scarica dei condensatori.

Weber cioè ha trovato nell'analisi delle due curve di deformazione di un filo elastico per aumentata e diminuita tensione i coefficienti eguali, le due curve sovrapponibili. Questo fa pensare che anche le curve di carica e scarica del condensatore possano essere identiche. Effettivamente, quando la carica è nulla e quando essa è completa distando le molecole egualmente dalla nuova posizione di equilibrio a cui con una carica od una scarica di durata indefinita debbono tendere, non si potrebbe immaginare una ragione per cui esse non vi si avvicinassero con una velocità eguale in ogni istante corrispondente. La carica e la scarica paiono dunque doversi considerare come due fenomeni reversibili, sempre che non avvengano dispersioni secondarie.

Ora questo fu constatato entro i limiti di approssimazione che dall'esperienza si potevano aspettare.

Le curve parecchie volte rilevate della corrente continua di carica e di scarica pel condensatore a seta prima costrutto avevano sempre presentata una forma perfettamente analoga che s'è ricordata. Solo la sovrapponibilità non s'era mai potuta verificare con tutta la sicurezza, perchè le quantità di elettricità erano piccolissime, non potendosi caricare la piccola capacità con potenziali molto elevati. Avveniva d'altronde che la polarizzazione non era completa se non dopo un gran numero d'ore, e l' isolamento non era del tutto perfetto quando la presenza di traccie d' umidità lasciava luogo a più sensibili variazioni di carica, onde nelle curve di scarica si notava una tendenza ad avvicinarsi più rapidamente alla tangente orizzontale, presentando nel ginocchio una curvatura più stretta. Gli stessi caratteri si manifestavano nelle curve delle cariche residue, rilevate con serie regolari di osservazione ad ogni minuto dopo durate di carica diverse; sebbene qui la discontinuità già accennata del fenomeno, rallentando specialmente nei primi tempi la depolarizzazione, tendesse già a far confrontabili le curve di scarica con quella di carica totale dopo che la carica era durata 10′, come mostrano le figure 3 e 4.

Pertanto per avere una prova più convincente di ciò che s'è detto, e che si

presumeva valere per tutti i dielettrici aventi un comportamento simile, si ricorse ad un condensatore a carta paraffinata della fabbrica di Cortaillod, che in esperienze precedenti aveva mostrato un isolamento eccellente, una variazione massima di carica non grande, ed una polarizzazione sensibilmente completa dopo un tempo relativamente breve; la capacità era circa 1 *m*F. La carica fu prolungata per più di tre ore mediante una serie di 50 piccoli accumulatori, tolti alla grandiosa batteria di 10.000 elementi di cui il laboratorio fu recentemente dotato per lo studio di alti potenziali. Le curve continue di carica e scarica furono rilevate durante la prima mezz'ora ove si pronuncia la curvatura più marcata, e la parte della curva più interessante è riferita nelle fig. 10 e 11. Le deviazioni erano lette ad ogni 10″, avendo durante i primi 30″ escluso dal circuito il galvanometro che aveva sensibilità grandissima. Siccome a cagione di questa la posizione di riposo dell'ago variava continuamente di piccole quantità, dopo brevi intervalli di tempo si rimetteva il galvanometro fuori circuito, facendo alcune letture dello zero che determinarono il percorso regolare della linea a partire da cui le ordinate dovevano essere misurate. Le due curve della tavola sono dedotte proporzionalmente dal disegno che si fece in scala 5 volte maggiore sui risultati dell'esperienza.

Se le due figure si sovrappongono cogli assi delle ordinate sulla medesima retta, essendo preso come origine il momento della prima chiusura del circuito, si vedono le due curve con molta approssimazione coincidere, e gli assi delle ascisse cadere sopra due parallele distanti circa 32 mm. Ora questa distanza corrisponde a meno di decimi di mm. alla deviazione permanente che dopo la carica lunghissima si leggeva al galvanometro, e che misurava certo la corrente che attraverso la resistenza ohmica non infinita del dielettrico mandava quella elevata differenza di potenziale. L'esperienza fu ripetuta parecchie volte, lasciando poi naturalmente per moltissimo tempo il condensatore in corto circuito per eliminare ogni influenza di cariche precedenti; e sempre si ebbero risultati analoghi.

Si può dunque affermare che per questo condensatore a carta paraffinata la scarica si faceva esattamente colla stessa legge della carica, e che la dispersione di quantità di elettricità durante tutto il processo osservato non era apprezzabile con sicurezza. E veramente qui correnti sensibili di conduzione interna non possono aver luogo alla scarica tra le armature che sono sempre in corto circuito; e se una perdita di energia è avvenuta nell'atto della polarizzazione del mezzo, non è di tal ordine che qui la si possa avvertire.

Per lo stesso condensatore la curva di carica fu ancora rilevata con 25 accumulatori, e fu constatato con pari approssimazione la proporzionalità delle ordinate al potenziale. Non è dunque irrazionale parlare qui di una resistenza ohmica del dielettrico indipendente dalla intensità di corrente.

E se si rifletta che le elongazioni di scarica dopo durate eguali di carica sogliono essere, per un grandissimo numero di dielettrici comuni, proporzionali alla differenza di potenziale, e che questa proprietà fu verificata da noi per la seta e per altri coibenti anche per frazioni decimillesime di 1″, è molto verosimile che essa sussista per la maggior parte di questi corpi per tutti i tempi, cioè che per essi l'ordinata della curva di polarizzazione in ogni istante sia proporzionale al potenziale;

legge che probabilmente vale anche per la elasticità, qualunque sia l'importanza delle deformazioni susseguenti.

22. — Curve di deformazione elastica della seta.

La forma delle curve pubblicate da W. Weber per le deformazioni elastiche dei fili di seta concorda con quella della carica totale di un condensatore in generale; ma perchè appunto un condensatore a seta era stato studiato, era interessante vedere se qualche relazione semplice si scoprisse tra gli elementi di due fenomeni nella medesima sostanza.

È però chiaro che la cosa non è facile, dal momento che le circostanze esterne hanno sul comportamento dielettrico una influenza grandissima, e quelle circostanze sole nelle quali una costanza notevole può per esso verificarsi, e dove le proprietà intime della sostanza hanno su quelle di corpi estranei la prevalenza, non possono essere se non con speciali artifizi realizzate per lo studio del comportamento elastico. Qui difatti un filo è sempre esaminato in uno spazio libero da cui non può espellersi l'umidità, e, se questa fosse dall' ambiente eliminata, sarebbe ben difficile togliere alla seta la massima parte dell'acqua di costituzione; ora è assai probabile che la presenza di questa modifichi le proprietà elastiche anche notevolmente.

D'altronde, se si crede che l'analogia delle due deformazioni sia completa, si trovano per certi corpi anomalie marcate. Vedemmo che di un condensatore a lana di vetro la variazione di carica è enorme, e, se pure si debba ammettere che l'essiccamento era nell'esperienza ancor molto imperfetto, non si può dimenticare che una lastra di vetro comune ben secca aveva mostrata una variazione quasi dello stesso ordine di grandezza. È notissimo che il vetro in genere presenta i fenomeni di scarica residua in modo eminente. Qui furono esaminati dei fili di vetro lunghi alcuni metri, di cui s'è già detta l'analogia col vetro di quelle esperienze. Ebbene, assoggettando questi fili a sforzi diversi, cresciuti fino alla rottura, non si riescì a notare che una deformazione susseguente insignificante, appena apprezzabile pei carichi minori compresi tra i limiti di elasticità.

Per la seta stessa non poteva dunque cercarsi che l'ordine di grandezza delle modificazioni susseguenti, in quanto i mezzi di osservazione permettevano di apprezzarle in confronto alle modificazioni totali. La proporzionalità al carico, la identificazione delle curve per tensione aumentata e diminuita, non potevano facilmente ricercarsi qui, perchè i fili sottilissimi che dalla stoffa s'erano ricavati, curando di non assoggettarli a sforzi di trazione notevole, conservavano tutte le increspature del tessuto che complicavano colla loro resistenza alla distensione quella all'allungamento longitudinale del filo; quando esse sotto l'azione di un carico erano state quasi d'un tratto eliminate, lasciando luogo esclusivamente alla deformazione susseguente della lunghezza, cessato il carico si ristabilivano in parte, facendo che la curva qui salisse molto più marcatamente e lungamente che là non si fosse abbassata.

I fili di seta qui esaminati appartengono tutti alla stoffa adoperata pel primo condensatore, per cui la curva della carica totale in funzione del tempo fu riferita nella fig. 3. Questi fili venivano appesi ad un alto sopporto per la parte superiore, por-

tando in basso un piccolo uncino di metallo pesante pochi centesimi di grammo, il quale serviva e come zavorra per conservare il filo disteso senza deformarlo sensibilmente, e come punto di collimazione pel cannocchiale del catetometro, e sosteneva i pesi che si volevano lasciar agire sul filo. Non si ricorse a mezzi più delicati per valutare gli allungamenti, quali si sarebbero potuti realizzare avvolgendo il filo a un piccolo tamburo portante lo specchio per la lettura angolare colla scala, od altrimenti, perchè le bave di seta potevano solo sopportare pesi assai piccoli senza che fossero superati i limiti di elasticità; onde sarebbe occorso dare al tamburo una massa eccezionalmente leggera, ed eliminare nel modo più perfetto le resistenze passive che avrebbero ostacolato le piccolissime rotazioni. Del resto la sensibilità del catetometro, che dava col nonio e la vite micrometrica i centesimi di millimetro, era più che sufficiente per fili di lunghezza non inferiore ad 1 m.

Weber adottò per consiglio di Gauss un artificio ingegnoso che permetteva di variare per gradi comunque la tensione. Il filo era cioè teso orizzontalmente tra una vite di trazione ed un robusto filo verticale fisso alla parte superiore e portante un peso opportuno, immerso nell'acqua per eliminare le oscillazioni. Quando si ritraeva la vite, il 2° filo era deviato dalla verticale, e la componente orizzontale della forza dovuta al peso e scomposta nella direzione dei due fili, dava la tensione del filo di seta. L'angolo di deviazione era letto col cannocchiale e colla scala, di cui l'immagine si rifletteva su un piccolo specchio applicato al filo che si deviava. Si aveva così l'inconveniente che la tensione poteva solo essere diminuita nel filo gradatamente, dovendo essere in ogni momento il filo stirato per le letture; di più la tensione era continuamente variabile col tempo, per l'azione susseguente, in tutte le fasi variabili della deformazione. Tuttavia questa variazione, essendo proporzionale alla variazione di elongazione del filo verticale, potè portarsi in conto per determinare la legge del fenomeno introducendovi un nuovo coefficiente.

L'essenziale, se uno studio sistematico di queste deformazioni variabili si volesse fare, sarebbe di realizzare un mezzo per seguire quelle variazioni fino dai primi istanti in cui la forza è venuta ad agire; ora tanto il metodo di Weber quanto quello di carica diretta richiedono almeno un buon numero di secondi per aver col cannocchiale fatta la prima lettura; qui occorrevano a ciò generalmente 30″. Inoltre converrebbe sempre assoggettare il filo prima ad una serie di cariche con pesi eguali o maggiori di quello con cui si vuol sperimentare, e di scariche, a fine di eliminare tutti gli effetti di deformazione permanente. È naturalmente necessario sottrarre il filo ad ogni variazione di temperatura, perchè il coefficiente di dilatazione termica è notevole, e gli allungamenti su lunghezze notevoli si rendono molto sensibili.

Le figure 12 e 13 riportano le curve di carica e scarica mediante 1 gr. per un filo di seta lungo originariamente 103 cm. Dopo 40′ l'allungamento essendo di circa 26,45 mm., non molto inferiore all'allungamento massimo che sotto quel peso il filo avrebbe potuto subire, la variazione della deformazione dopo i primi 60″ appare circa 8,5 %. Se si vuol fare il confronto colla curva della carica totale del condensatore a seta naturale, si deve riferire la variazione di carica totale fra gli stessi limiti di tempo non a tutta la carica, perchè una gran parte di essa si sarebbe ad ogni modo condensata sulle armature del sistema se fosse mancato il dielettrico, ma alla sola porzione che si può presumere dovuta alla polarizzazione del medesimo.

Per avere una idea di questa basta sottrarre la carica istantanea ridotta nella ragione della costante dielettrica della seta ad 1. Ebbene qui si trova una variazione enormemente maggiore, perchè dopo i primi 60″ di carica la massima parte della carica di polarizzazione era ancora da formare. La curva di scarica del filo ricorda più approssimativamente la forma della curva di scarica del condensatore, ma in parte se ne accennò già il perchè. Questo carattere è comune a tutte le curve di cui una serie numerosa fu rilevata in condizioni variate di lunghezza, di peso.

Se si ricorre a bave di seta naturali, cioè tolte a fili naturali di bozzolo, che si presentano molto meglio distese, le differenze delle due curve scompaiono in gran parte come mostrarono parecchie serie di analoghe osservazioni. Però, se un dielettrico di questa natura si comportasse come la seta tessuta, e pare verosimile, bisognerebbe per ottenere tra gli stessi limiti di tempo una variazione paragonabile di polarizzazione considerare almeno il sistema privo della massima parte dell'umidità che allo stato naturale può avere condensata alla superficie ed internamente alla massa.

In ogni caso non pare inverosimile che i fenomeni di elasticità dipendano meno marcatamente dallo stato igrometrico della sostanza, e che scindendo in modo rigoroso la parte di quelli di polarizzazione che si devono alla presenza di corpi secondari si possano trovare variazioni dello stesso ordine di grandezza per alcuni corpi.

23. — Concetto di Maxwell sui dielettrici: esperienze di Hess.

È però chiaro che analogie della natura delle precedenti, le quali sono ridotte verosimilmente alla sola forma dei fenomeni, non ne implicano necessariamente una analogia stretta d'origine, sebbene possano studiarsi con frutto per dedurre degli uni o degli altri proprietà interessanti. Non altrimenti certe ipotesi artificiose possono talora svilupparsi utilmente, sebbene più che per la loro verosimiglianza in ordine ai fatti della natura esse meritino di essere accolte come semplice modo di descrizione e di rappresentazione di questi.

Così Maxwell si immaginava un condensatore a dielettrico lentamente polarizzabile come un complesso di tanti condensatori ideali, a polarizzazione cioè istantanea e ad isolamento perfetto, collegati fra di loro in parallelo mediante grandi resistenze. Effettivamente la discussione di questa ipotesi non contraddice ad alcuno dei risultati sperimentali, ed il Dr. Behn-Eschenburg coll'analisi del caso più elementare di due condensatori soli ha compendiato in formole semplici i risultati del suo studio precitato di un cavo a guttaperca, mostranti la variazione della carica col tempo e della capacità colla temperatura.

Recentemente il sig. Hess ha ripresa l'idea di Maxwell, ed in una memoria letta davanti la " Société Française de Physique „ (1), a conferma dei calcoli teorici confrontò il comportamento di un condensatore imperfetto con quello di un sistema di due condensatori messi in serie, possibilmente perfetti, ed aventi tra le armature l'uno una resistenza che si poteva ammettere infinita, l'altro una resistenza finita con-

(1) " La Lumière électrique „, 26 nov. e 10 dic. 92; " The Electrician „, 3 marz. 93.

venientemente grande. Quando si chiude il circuito della pila la differenza di potenziale agli estremi del sistema resta costante; ma perchè la corrente di carica del primo condensatore deve attraversare la resistenza derivata sulle armature del secondo, e, dopo aver raggiunto nei primi istanti un massimo, deve col tempo diminuire a zero, la differenza di potenziale sulle armature del condensatore *shuntato* dopo essere passata per un massimo cade ancor essa a zero, ed in corrispondenza quella dell'altro condensatore sale gradatamente fino al massimo valore permanente dato dalla forza elettromotrice della pila. Le condizioni di equilibrio non si realizzano dunque se non con una certa lentezza, che dipende solo dalla ragione delle due capacità e dalla resistenza derivata. Alla scarica succede il fatto inverso, perchè la corrente di scarica attraversa in senso opposto quella resistenza, e la differenza di potenziale delle armature in questo condensatore passando per un massimo negativo viene a zero, onde, essendo zero la somma delle due, la differenza di potenziale nel primo diminuisce solo gradatamente col tempo. Se gli estremi si isolano a un dato istante, la differenza negativa del condensatore *shuntato* deve diventar zero, e quella dell'altro condensatore ha ancora un valore positivo che appare come differenza di potenziale totale quando la prima si è, secondo la legge esponenziale ordinaria, annullata. Evidentemente però alla carica il rapporto della forza elettromotrice alla corrente non ha nulla di comune col valore della resistenza, perchè in questo circuito essa è infinita, e solamente se una resistenza finita esistesse ancora tra le armature del primo condensatore si arriverebbe ad equilibrio stabilito ad una corrente di regime, invariabile, per cui dividendo la differenza di potenziale sui morsetti della pila si avrebbe la misura della resistenza totale. In tal caso però il fenomeno non sarebbe più tanto semplice, perchè anche sulle armature del secondo condensatore si stabilirebbe una differenza permanente di potenziale.

In complesso i fenomeni di lenta polarizzazione si presentano con caratteri analoghi.

Il sig. Hess eseguì la sua esperienza con due condensatori a mica di capacità rispettive 0.1 e 0.5 mF, mettendo sulle armature di questo in derivazione una resistenza di circa 100 megohm.

Per avere una idea della approssimazione colla quale i fenomeni di polarizzazione lenta possono così essere artificialmente riprodotti fu qui istituita una serie sistematica di osservazioni, variando singolarmente la ragione delle due capacità mediante condensatori normali a mica graduati, e la resistenza derivata sulla prima di esse. La resistenza constava di sottili e lunghi tubi di vetro ripieni di una soluzione allungata di solfato di rame, variamente collegati in serie o in derivazione. Le curve furono rilevate per tempi brevissimi col pendolo, e per tempi ordinari nel modo solito, ed effettivamente corrispondono alla forma generale delle curve di carica dei condensatori da noi esaminati.

La variazione della capacità e della resistenza ha l'effetto che è facile *a priori* di prevedere. Poichè la curva di carica a parità di resistenza sale tanto più lentamente verso la tangente orizzontale, e possiede un ginocchio a curvatura tanto più ampia, quanto più piccola è la capacità *shuntata* rispetto quella isolata; e veramente al limite se quella capacità si riducesse a zero si avrebbe nel circuito solamente il secondo condensatore polarizzabile in tempo brevissimo, ma in serie la grande resi-

stenza ch'era derivata sul primo, pel cui effetto la curva esponenziale si manterrebbe per lungo tempo lontana dalla sua tangente. Se invece si riduce a zero la seconda capacità non ha più luogo alcuna carica; onde, quando quella è piccolissima, è piccola la quantità di elettricità che si mette in movimento e l'equilibrio è ben presto raggiunto. Se si varia poi la resistenza del *shunt* e le due capacità sono invariate, la curva si avvicina tanto più presto alla tangente quanto la resistenza è più piccola; se questa difatti si annullasse, la prima capacità non avrebbe più alcun effetto e la seconda si caricherebbe istantaneamente, per quanto la polarizzabilità della mica, che è qui un elemento secondario, lo concederebbe. Se la resistenza diventasse infinita non sarebbero più realizzate le condizioni qui poste, perchè si avrebbero due condensatori in cascata, e la capacità del sistema, diversa da quella che in tutti gli altri casi si aveva, si caricherebbe, com'è naturale, istantaneamente: ma se quella resistenza fosse solamente grandissima, la capacità effettiva sarebbe solo quella del 2° condensatore, a caricare la quale occorrerebbe un tempo lunghissimo.

Questo si è detto solo per conchiudere che con una scelta conveniente degli elementi del sistema si può sempre modificare a piacere l'andamento della curva, rendendo la variazione massima di carica, ed il tempo necessario perchè la carica sia completa, grandi quanto si vuole. È dunque sempre possibile con un sistema di questa natura approssimare la rappresentazione dei fenomeni di polarizzabilità susseguente, e la forma è sempre riversibile come pei dielettrici fu verificato. Ciò non implica però che in fatto alcun che di simile si verifichi, anzi è assolutamente verosimile che il processo di polarizzazione dipenda da cause molto meno complicate.

24. — Teoria dei dielettrici.

La teoria più semplice e verosimile dei dielettrici si può ancora formulare prendendo a base l' idea enunciata da Faraday, che il dielettrico consista in un sistema di piccole masse conduttrici disseminate in un mezzo perfettamente isolante.

Per una sfera conduttrice portata in un campo elettrostatico omogeneo è nota la legge semplicissima con cui si distribuisce l'elettricità indotta in ogni punto della superficie, variando la densità come il coseno dell'angolo che il raggio vettore corrispondente della sfera fa colla direzione del campo. Se il potenziale di questa elettricità indotta si esprime per mezzo delle funzioni sferiche aventi per modulo quell'angolo, che è la sua espressione più semplice, si vede subito la forza ad esso dovuta in un punto qualunque esterno avere a quella in un punto interno la ragione dei cubi del raggio e della distanza del punto esterno dal centro. Siccome in tutti i punti della sfera conduttrice il potenziale è lo stesso, la forza ivi dovuta alla elettricità indotta è eguale e opposta a quella del campo. Da ciò deriva che, se il dielettrico si considera costituito da simili masse conduttrici di dimensioni molecolari disseminate a distanze non immensamente piccole, si potrà nello spazio che una qualunque di quelle masse occupa ammettere trascurabile rispetto la forza del campo tutte quelle dovute alle masse indotte di elettricità, cioè si potrà ammettere ognuna di quelle masse polarizzata nello stesso modo come se la sola forza del campo esistesse, intendendo per

polarizzazione lo svilupparsi di masse elettriche di segno opposto per induzione elettrostatica.

La distribuzione di masse elettriche che è indotta così equivale per tutte le azioni esterne ad una distribuzione uniforme di elettricità sulle faccie terminali del dielettrico, contigue alle armature, come se una distribuzione uniforme di elettricità positiva nella massa del dielettrico, prima della polarizzazione neutralizzata da una eguale di elettricità negativa, all'atto di quella si fosse spostata di uno spazio elementare nella direzione del campo: e questa è la forma discussa da Maxwell. Questo spazio, e quindi la densità costante di quella distribuzione, è proporzionale alla intensità del campo, cioè alla densità della distribuzione uniforme iniziale di masse elettriche sulle armature. Se questa proporzionalità si riferisce alla densità massima che la elettricità indotta aveva sulla sfera, perchè questa a sua volta è proporzionale all'intensità del campo, si trova come coefficiente di proporzionalità un numero m che è caratteristico di ogni sostanza, e rappresenta il rapporto della porzione di volume occupato nel dielettrico dalle masse conduttrici al volume totale.

Ora è chiaro che, quanto quella densità di distribuzione fittizia è più grande alla superficie limite del dielettrico, tanto minore è diventato il potenziale delle armature se la quantità di elettricità è rimasta invariata. Per conservare alle armature lo stesso potenziale occorre dunque una quantità nuova di elettricità, e noi diciamo per definizione la capacità del sistema essere cresciuta per effetto della polarizzazione del dielettrico; è questo coefficiente di accrescimento che misura l'effetto della presenza del dielettrico, e che è perciò detto costante dielettrica del medesimo. È facile mostrare che esso ha per espressione $1 + \frac{3m}{1-m}$, cioè è direttamente funzione della parte proporzionale di volume occupata da sostanza conduttrice. Pei dielettrici comuni, dove la costante dielettrica è rappresentata da numeri di poche unità, noi dobbiamo solo ammettere pochi decimi del volume occupati da materia conduttrice; nei gas, dove questa parte non può essere che piccolissima, possiamo ritenere la costante dielettrica rappresentata da $1 + 3m$, cioè funzione lineare della densità come l'esperienza ha in ogni caso dimostrato. Nell'acqua, per citare uno tra gli elettroliti, la costante essendo elevatissima bisogna ammettere m notevole; ma si vede subito che la costante dielettrica deve diminuire crescendo la temperatura; difatti le esperienze recenti del sig. Heerwagen (1) hanno condotto alla formola

$$\kappa = 80{,}878 - 0.362\,(t - 17^\circ).$$

Così la discussione teorica permette di renderci conto dell'aumento di capacità quando un dielettrico è presente. Ma essa non contraddice alle manifestazioni che da noi si sono constatate di polarizzazione susseguente.

Difatti in ciò che s'è detto non s'è altrimenti definita la conduttività delle particelle del dielettrico se non ammettendo che il potenziale fosse lo stesso in condizioni di regime nei singoli punti d'ogni particella isolata. La forma di queste notoriamente non ha effetto, perchè tutto il ragionamento si può estendere al caso

(1) Wiedem. Ann., 6, 1893

di forme qualunque, purchè le particelle si considerino eguali per semplicità, e disseminate a distanza notevole rispetto le loro dimensioni; e questo è in genere d'accordo coi principii della fisica molecolare. Ma quella definizione null'altro implica necessariamente riguardo alla natura di quella conduttività, e nulla ci persuade ch'essa abbia molti caratteri comuni colla metallica, o che le resistenze che là intervengono abbiano misure paragonabili a quelle dei conduttori comuni, o che la distribuzione delle masse elettriche vi si faccia in tempi dello stesso ordine di grandezza. Nulla contraddice dunque all'ipotesi che la polarizzazione si vada facendo lentamente, e questa lentezza sia funzione della natura del corpo e delle condizioni in cui esso si trova. Quando si trova in presenza un altro corpo estraneo i fenomeni di induzione avvengono in questo indipendentemente, e nelle condizioni che per questo sono caratteristiche; se la costante di questo dielettrico è notevolmente più elevata di quella del primo, e se i fenomeni di polarizzabilità susseguente vi si verificano con molta lentezza, come indubbiamente accade per l'acqua, tracce insignificanti di esso possono bastare a mascherare il comportamento del dielettrico principale.

25. — Isteresi elettrostatica.

La energia di polarizzazione, che nel dielettrico si trova allo stato potenziale, verrebbe pertanto a poco a poco restituita man mano che, cessata l'azione esterna, le molecole polarizzate si riavvicinerebbero alla loro condizione primitiva. Ma sarebbe essa completamente restituita?

Se la conduttività delle particelle disseminate nel dielettrico fosse della natura di una conduttività metallica la polarizzazione sarebbe istantanea, e l'energia potenziale condensata nella massa sarebbe completamente ritrasformata in energia cinetica quando le armature si chiudessero in corto circuito. Ma la differenza che noi riscontriamo in quella conduttività ipotetica rispetto alla conduttività ordinaria fa prevedere che anche una quantità di energia possa nella doppia trasformazione essere dispersa in calore.

Se per esempio noi supponiamo che le molecole abbiano assi di polarizzabilità particolare, che cioè l'induzione di masse elettriche per le forze elettrostatiche avvenga in direzioni determinate di preferenza che in altre, le molecole conduttrici cercheranno di orientarsi così che l'asse di polarizzazione principale sia nella direzione del campo, tenderanno cioè a rotare come le molecole elastiche nella teoria di Weber. Allora la condizione stessa che farà non essere la polarizzazione istantanea farà che un lavoro sia speso a vincere le resistenze molecolari. Il meccanismo della polarizzazione elettrostatica si mostrerebbe così strettamente analogo a quello della polarizzazione magnetica. Il lavoro disperso potrà essere caratterizzato come un lavoro d'attrito molecolare se si ammetterà che un attrito esista tra le molecole, e che possa essere governato da leggi che abbiano analogia con quelle dell'attrito dei corpi solidi.

Se con un concetto analogo a quello dei magneti molecolari di Weber si volesse ammettere che le particelle del dielettrico possedessero per loro stesse una polarità elettrica permanente secondo assi determinati, ma orientati inizialmente in modo

indifferente, si incontrerebbe ancora l'ipotesi di un lavoro speso nelle rotazioni per l'orientamento delle molecole nel campo elettrostatico, ma la polarizzabilità della massa avrebbe un limite analogo a quello di saturazione dei corpi magnetici, e vi si avvicinerebbe dessa come questi alla saturazione loro, sempre più lentamente al crescere la forza elettrostatica. Questo però non è provato per ora dalla esperienza, la quale pare piuttosto conduca all'idea della proporzionalità della polarizzazione alla forza.

Comunque è certo che una perdita di energia nella polarizzazione avviene, come prova il fatto noto da tempo che un condensatore assoggettato a cariche alternate si riscalda. Quella perdita può essere con frutto e razionalmente confrontata colle perdite di isteresi magnetica, come hanno fatto recentemente il signor Steinmetz (1), il signor Janet (2), e l'ing. Arnò (3); vogliasi poi accogliere come più probabile l'ipotesi di Wiedemann di un vero attrito molecolare, o vogliasi cercar di seguire anche qui l'idea moderna accettata per spiegare il meccanismo della polarizzazione magnetica mediante le sole azioni mutue tra le masse elementari polarizzate.

È noto che il prof. Ewing è così riuscito a chiarire tutti i fenomeni di magnetizzazione nella fase variabile col tempo e nella porzione che rimane come residuo al cessare della forza (4), al che si prestavano meno completamente le teorie di Weber e di Maxwell sull'esistenza d'una forza direttrice tendente a riportare le molecole magnetiche alla loro prima posizione, od in ogni caso, o solamente quando da questa esse fossero deviate d'un angolo inferiore ad un limite dato. Ora le forze tra le masse elettriche sono della stessa natura e governate dalle stesse leggi delle forze tra masse magnetiche.

Nel caso della polarizzazione magnetica tutti i risultati della esperienza si ritrovano nella teoria se si suppone che un determinato tempo passi dall'applicazione della forza al momento in cui la magnetizzazione ha raggiunto il suo valore corrispondente. Quel tempo si è imparato a misurare, e ad esprimere in funzione di esso le perdite di isteresi; esperienze recentissime con correnti alternative eseguite nel laboratorio di Zurigo ne hanno messo in sodo la dipendenza dalla frequenza e dalla caduta di potenziale, e formeranno oggetto di un altro mio piccolo studio.

Nel caso della polarizzazione elettrostatica l'ipotesi di un ritardo di quella natura non offre per principio minore verosimiglianza, dal momento che le stesse variazioni di polarizzazione non avvengono che lentamente.

Se un ritardo simile interviene, non è nemmeno difficile immaginare artifizi opportuni per constatarlo e per misurarlo, così nel caso in cui quelle variazioni avvengano lentamente, come in quello in cui si debbano ad una corrente alternativa di frequenza qualunque; poichè in ciascuno di questi il dielettrico può presentare un comportamento diverso, dipendentemente dalla rapidità delle variazioni, o dalla ampiezza, o dalla forma loro.

---

(1) " Elektrotechnische Zeitschrift ", 29 aprile 1892.
(2) " Comptes rendus ", 20 febbraio 1893.
(3) " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", 16 ottobre 1892; 30 aprile 1893.
(4) " Proc. Roy. Soc. ", XLVIII, 1890; " Phil. Mag. ", settembre 1890.

Così presso una ordinaria macchina alternatrice sarebbe facile rilevare ed analizzare le curve della forza elettromotrice e della carica del condensatore, messo direttamente in serie sui suoi poli, per dedurne direttamente la differenza di fase. Per assoggettare invece a lente variazioni di polarizzazione un pezzo di dielettrico basterebbe lasciarlo oscillare in un campo elettrostatico sensibilmente uniforme, e qui si potrebbe studiare la variazione della legge di oscillazione per effetto del ritardo di polarizzazione, che originerebbe una coppia ritardatrice in ogni istante proporzionale al seno della sua misura angolare. Si constaterebbe così se quel ritardo esiste, perchè per scoprire la variazione di esso in funzione degli elementi che lo possono modificare occorrerebbe prima determinare esattamente l'azione che questi hanno sulla intensità della polarizzazione, cosa che non è ancora fatta. In modo analogo l'apparecchio recentemente costrutto dall'ing. Arnò utilizza colla maggiore semplicità ed eleganza il principio delle rotazioni elettrostatiche, e misura per mezzo della torsione di una sospensione bifilare il momento che un campo elettrostatico continuamente rotante esercita sopra il dielettrico.

È facile definire come questo momento sia funzione di quel ritardo, nell'ipotesi in cui ad esso sia esclusivamente dovuto.

Difatti noi possiamo immaginarci la direzione del campo precedente in ogni istante nella rotazione la direzione della polarizzazione per un angolo x. Siccome in un campo uniforme, finchè la distribuzione di elettricità indotta non origina forze notevoli rispetto quella del campo, ogni elemento del dielettrico si polarizza nello stesso modo, noi possiamo considerare questa polarizzazione come equivalente ad una distribuzione di masse elettriche di segno opposto sulle opposte faccie dell'elemento nella direzione della polarizzazione. La densità è quella che in un condensatore noi abbiamo già considerato idealmente alle faccie di termine del dielettrico contigue alle armature, e che ci è nota in funzione della costante dielettrica e della intensità del campo. Ogni elemento avrà dunque un momento elettrostatico, definendo così il prodotto delle masse di elettricità alle faccie opposte per la loro distanza; il momento sarà proporzionale al volume, e la somma di tutti i momenti elementari darà il momento totale. Nel campo rotante supposto uniforme la polarizzazione si produce ancora in modo analogo, salvo che un ritardo esiste, cioè la direzione del campo e quella del momento elettrostatico fanno un angolo fra di loro. Ma per definizione del campo elettrostatico ogni massa elettrica in questo sarà sollecitata nella direzione di esso da una forza ad essa proporzionale, e l'azione sull'elemento di dielettrico sarà un momento di rotazione elementare, e l'azione totale un momento totale eguale al momento elettrostatico moltiplicato per la intensità del campo e pel seno dell'angolo che noi abbiamo chiamato x.

Compendiando in formole, se K è la intensità del campo, ognuna delle sfere elementari conduttrici di cui noi immaginiamo costituito il dielettrico prende una distribuzione superficiale di elettricità indotta la cui densità in un punto qualunque, sul vettore che fa l'angolo φ colla direzione del campo, è

$$\frac{K}{\frac{4}{3}\pi} \cos \varphi = \sigma_0 \cos \varphi.$$

Se una di queste sfere conduttrici di raggio R è contenuta in ogni volume elementare

pari ad un cubo di lato α, immaginando in così fatti elementi suddiviso tutto il dielettrico, $\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{\alpha^3}$ è il numero che noi chiamammo già m, così che la densità superficiale della distribuzione di elettricità che idealmente ci rappresenta la polarizzazione del dielettrico è

$$m\,\sigma_0 = \frac{R^3}{\alpha^3}\,K\,,$$

che per noi è meglio conservare nella forma

$$\frac{m\,K}{\frac{4}{3}\pi}\,,$$

perchè noi ricaviamo m dalla costante dielettrica. Se il volume del dielettrico è V, ed il campo è uniforme, così che la polarizzazione lo sia a sua volta, il momento elettrostatico sarà dunque

$$V\,\frac{m K}{\frac{4}{3}\pi}\,,$$

ed il momento di rotazione

$$V\,\frac{m\,K^2}{\frac{4}{3}\pi}\,\text{sen}\,x,$$

a cui sono proporzionali le perdite così dette di isteresi elettrostatica.

Se per una data frequenza la polarizzazione avvenisse proporzionalmente al potenziale per ogni valore di questo, come per alcuni valori pare da noi dimostrato, le perdite sarebbero proporzionali al prodotto della intensità quadrata del campo pel seno dell'angolo che misura il ritardo della polarizzazione rispetto alla forza.

Una forma analoga compendia l'analisi dei fenomeni di polarizzazione magnetica nel caso di un trasformatore a corrente alternativa, ed esprime le perdite di isteresi in funzione del ritardo angolare della magnetizzazione rispetto alla forza, e del coefficiente di induzione propria della spirale primaria. Queste perdite, che l'esperienza mostra indipendenti dal carico del trasformatore, si possono rappresentare con

$$P_1\,I_{1.0}\,\text{sen}\,2\,\pi\,n\,x,$$

ove P_1 è la differenza efficace di potenziale sui morsetti primari; $I_{1.0}$ la intensità efficace della corrente primaria quando la spirale secondaria è aperta; $2\,\pi\,n\,x$ è il ritardo di magnetizzazione, se x si valuta in tempo. Ora la resistenza del primario non ha effetto sensibile rispetto alla selfinduzione Q_1 nella resistenza apparente, onde può ritenersi

$$I_{1.0} = \frac{P_1}{2\,\pi\,n\,Q_1}\,,$$

cioè le perdite di isteresi possono rappresentarsi con

$$\frac{P_1^2\,\text{sen}\,(2\,\pi\,n\,x)}{2\,\pi\,n\,Q_1}\,,$$

o con molta approssimazione con

$$\frac{P_1^2 x}{Q_1}.$$

Le nostre esperienze hanno dimostrato che crescendo P_1 il ritardo di magnetizzazione va lentamente diminuendo. D' altronde, essendo il ferro nei trasformatori generalmente lontano dalla saturazione, Q_1 cresce al crescere l'intensità di corrente, cioè la differenza di potenziale, come dimostra la forma della curva di magnetizzazione. Perciò per doppia ragione le perdite nel ferro crescono meno rapidamente del quadrato del potenziale primario, cioè della forza magnetizzante; e le due variazioni simultanee rispetto alla semplice legge di proporzionalità, le quali si possono rappresentare mediante diminuzioni rispettive dell'esponente nella formola, si accordano tra i limiti fra cui il trasformatore è generalmente adoperato in modo che quell'esponente ridotto si conservi sensibilmente costante e prossimo al valore 1,6 dato da Steinmetz. Ma è verosimile che per intensità di magnetizzazione molto minori, dove la curva di magnetizzazione si stacca più lentamente dalla tangente orizzontale, e per intensità molto maggiori, in corrispondenza alle quali Q_1 cresce assai lentamente, l'esponente della formola di Steinmetz non sarebbe perciò più esatto.

Nel caso di un condensatore nulla è permesso di dire per ora con sicurezza riguardo al ritardo di polarizzazione, perchè questo non è ancora mai stato direttamente misurato, ed è per ora una ipotesi. Però se un ritardo esiste è molto verosimile che la sua variazione in funzione del potenziale sia di un ordine di grandezza assai piccolo o nullo, per quanto possono far supporre le forme rilevate delle curve di polarizzazione, che, pure per tempi notevolmente più brevi di quelli che alle ordinarie frequenze corrispondono, si mostrano del tutto indipendenti dal potenziale. In tal caso le perdite di isteresi elettrostatica risulterebbero proporzionali al quadrato della intensità del campo, come già nelle sue prime esperienze sopra un condensatore a carta paraffinata il sig. Steinmetz (1) aveva verificato, misurando l'energia dissipata col wattometro.

L'ing. Arnò (2) nei primi risultati pubblicati delle sue misure dedusse da una serie di osservazioni sopra un cilindro di ebanite un esponente di variazione delle perdite d' isteresi elettrostatica in funzione del potenziale che si scosta poco dall'esponente di Steinmetz per la isteresi magnetica.

In seguito a ciò Steinmetz (3) ha ripetute le sue esperienze, misurando ancora direttamente l'energia dissipata mediante il wattometro; ma scegliendo tali valori della resistenza e selfinduzione della spirale in derivazione di questo, che il ritardo ω da essa prodotto nella corrente che l'attraversa sia poco differente dal ritardo α che in causa della polarizzazione non istantanea del dielettrico subisce la corrente di carica attraversante la spirale principale. Siccome nell'energia che il wattometro misura entra come fattore il seno della differenza $\alpha - \omega$, e siccome ω è costante,

---

(1) " Elektrotechnische Zeitschrift ", 29 aprile 1892.
(2) " Rendiconti della R. Acc. dei Lincei ", 30 aprile 1893.
(3) " Electrical World ", 26 agosto 1893.

il metodo è particolarmente atto a mettere in rilievo le variazioni di α, se esse succedono. Ma variazioni di questa natura tra i limiti estesi di queste osservazioni non fu possibile di constatare, onde parrebbe confermato che quel ritardo di polarizzazione sia costante.

Per rendersi ragione dei risultati delle esperienze di Arnò, Steinmetz si forma l'idea che nei dielettrici esista una doppia perdita di isteresi; una statica, la quale sarebbe analoga alla perdita di isteresi magnetica, e potrebbe essere governata da una legge eguale; ed una viscosa, la quale varierebbe come il quadrato della frequenza e della intensità del campo, non altrimenti che la perdita nel ferro per correnti di Foucault. Per piccole frequenze ed intensità di campo, come Arnò ha adoperato, la prima potrebbe preponderare sulla seconda, e per frequenze grandi ed intensità notevoli essere non di meno quasi completamente mascherata da questa.

L'ipotesi è ingegnosa, sebbene non accenni ad alcuna causa probabile per cui la isteresi statica debba variare con una legge non quadratica. L'analogia colle perdite per correnti di Foucault ha anche caratteri di verosimiglianza, poichè ogni modificazione dell'intensità del campo è prodotta mediante correnti variabili, le quali generano campi magnetici: nelle particelle conduttrici del dielettrico possono perciò prodursi correnti parassite; anzi queste sarebbero l'unica causa della dispersione di energia nei dielettrici secondo la teoria sostenuta da Hess (1).

Quanto all'osservazione sulla influenza della frequenza differente, essa ha forse peso minore in seguito alle esperienze del prof. Sahulka (2), eseguite pure sopra un condensatore a carta paraffinata. Queste confermarono la proporzionalità della dissipazione di energia al quadrato del potenziale, sebbene siano state verosimilmente fatte con frequenze assai minori di quella che Steinmetz ha adoperata, e più vicine a quella di Arnò.

Però resta la differenza dei limiti tra i quali l'intensità del campo fu variata nell'apparecchio di Arnò e si suol variare nei condensatori comuni. Infatti questi hanno quasi sempre uno spessore di dielettrico piccolissimo tra le singole armature, e tuttavia le misure dirette dell'energia dissipata con capacità non molto grandi richiedono l'impiego di potenziali notevolmente elevati. Per ora non è sufficientemente dimostrato che nell'intervallo totale che deve abbracciare quei limiti differenti il valore della costante dielettrica apparente, da cui noi dobbiamo dedurre il coefficiente m della nostra formola, sia costante, e non si può nemmeno escludere *a priori* che su di esso frequenze molto elevate possano avere un' influenza non trascurabile.

Sopratutto resta la differenza sostanziale della forma secondo la quale la periodica variazione di campo si produce nei condensatori caricati con una semplice corrente alternativa, e nell'apparecchio di Arnò a campo continuamente rotante. Nostre esperienze hanno mostrato che le perdite di isteresi magnetica dipendono sensibilmente dalla forma della corrente magnetizzante, anche quando la differenza è solo quella tra una curva sinusoidale semplice ed una curva complessa che risulta dalla somma di curve sinusoidali di frequenza diversa. Per ora non è ancor dimostrato

---

(1) " La Lumière électrique ", 26 nov.-10 dic. 1892.
(2) " Wiener Sitz. Ber. ", luglio 1893.

che nei campi magnetici rotanti le perdite di isteresi del ferro siano governate dalle stesse leggi che valgono nei campi somplicemente alternativi. Tanto meno si potrà presumere che leggi identiche valgano nei due casi per la isteresi elettrostatica.

Che se una differenza di questa natura si verificasse, il nostro ragionamento teorico non varrebbe più nemmeno rigorosamente nel caso del campo rotante delle esperienze di Arnò. Invero, il campo rotante in queste è generato mediante due campi alternativi componenti che si producono con intensità eguale e differenza di fase di 90° fra due coppie di lastre di dimensioni 42 $\times$ 21 mm., affacciate alla distanza di 42 mm. Questi campi sono dovuti a differenze di potenziale prodotte da una macchina Siemens, di cui la curva della forza elettromotrice è con molta approssimazione sinusoidale. Così è soddisfatta la prima condizione perchè il campo risultante abbia intensità indipendente dal tempo. Ma qui non sono soddisfatte che approssimatamente le condizioni per cui l'intensità sia indipendente dal punto dello spazio nel quale il campo si considera. Difatti i due campi elementari non sono certamente uniformi, e non lo può essere il campo risultante in tutto lo spazio occupato dal dielettrico; nè perciò lo può essere la polarizzazione di questo.

A ciò si potrebbe verosimilmente ovviare in gran parte generando invece di due soli campi due coppie di questi tra quattro sistemi di lastre a curvatura cilindrica, due a due opposte, e abbraccianti il cilindro cavo di sostanza che si studia in una forma analoga a quella degli elettrometri a quadrante di Edelmann. I campi opposti dovendo essere eguali, richiederebbero solo due differenze di potenziale; ma i campi tra lastre molto vicine e parallele potrebbero rendersi più intensi crescendo la sensibilità, e più omogenei, cosa indispensabile per poter valutare con conveniente approssimazione la forza ed il coefficiente di isteresi. Le quattro lastre interne potrebbero anche unirsi in un solo cilindro metallico, da tenersi a potenziale costante con una comunicazione a terra, e dove masse elettriche sarebbero solamente provocate per induzione; l'artificio sarebbe specialmente utile per esaminare il comportamento di sostanze ricavabili in fogli sottili facilmente pieghevoli, poichè allora basterebbe dar loro per sopporto un cilindro leggero per es. di carta rivestito di stagnola, oppure un cilindro di lastra sottilissima di alluminio.

Finalmente non può essere dimenticato che in queste manifestazioni dei fenomeni di isteresi, i quali devono evidentemente essere legati da vicino a quelli di polarizzazione lenta dei dielettrici, le condizioni esterne possono avere una grandissima influenza, e le proprietà del corpo che si studia possono essere in gran parte mascherate da quelle di corpi secondari, come traccie di umidità. Noi vedemmo che l'ebanite e la mica che assorbirono una piccola quantità d'acqua presentano una variazione di carica addirittura colossale: in tal caso la sola presenza di un essiccante ordinario nell'ambiente chiuso dell'apparecchio non sarebbe sufficiente a ridurre la sostanza allo stato normale.

L'ing. Arnò ha in questi ultimi mesi istituita una serie sistematica di misure sopra campioni di dielettrici i più disparati. Quando i nuovi risultati saranno noti potrà accertarsi se e fino a qual punto le previsioni teoriche siano verificate in quelle condizioni particolari di esperimentazione (1).

---

(1) Nei Rendiconti della seduta del 12 novembre 1893 della R. Accademia dei Lincei, pubblicati

Comunque, il problema della applicazione razionale dei condensatori alla distribuzione di correnti alternative, pel quale è resa tanto interessante la determinazione delle leggi quantitative di questi fenomeni, ha troppa importanza perchè ad esso non debba volgersi l'attenzione di tutti gli studiosi di cose elettriche.

---

dopo la presentazione di questa Memoria, sono riferiti i risultati delle misure dell'ing. Arnò a cui in questa s'era fatto allusione.

Questa lunga serie interessante di osservazioni, estesa a 14 dielettrici diversi, ha riconfermata nell'autore l'idea che la dissipazione di energia nel campo elettrostatico rotante sia dovuta ad una vera isteresi elettrostatica, regolata da una legge eguale a quella che Steinmetz verificò per l'isteresi magnetica nel ferro. Solamente una serie ulteriore di esperienze comparative potrà constatare se questa conclusione si verifichi anche nel caso dei condensatori nei circuiti di semplici correnti alternative.

Intanto nei risultati attuali è notevole che la mica, la quale, opportunamente preparata, si comporta rispetto ai fenomeni di polarizzazione come ottimo tra i dielettrici conosciuti, qui presenterebbe il massimo coefficiente di isteresi. La minima dissipazione di energia tra i dielettrici più comunemente adoperati si riscontrerebbe nella paraffina, e questo si accorda coi risultati di esperienze recenti del sig. Kleiner (*) e di altre ultimamente istituite nel laboratorio di Zurigo per misurare direttamente il riscaldamento del dielettrico sotto l'azione di cariche alternate ad alta frequenza ed alto potenziale. La variazione di temperatura della paraffina apparve quasi inapprezzabile, sebbene ricercata coi più delicati metodi di misura di resistenze metalliche, aventi coefficiente di variazione notevole.

Ma il risultato più importante sta nell'ordine di grandezza dei coefficienti di isteresi che Arnò ha misurato in valore assoluto. Difatti, ammettendo anche che nella mica e nelle altre sostanze il fenomeno non sia qui stato turbato dalla presenza di traccie di umidità, la dissipazione di energia nei dielettrici principali delle misure predette quando il campo elettrostatico ha una intensità eguale ad un'unità C.G.S. sarebbe compresa tra 556 e 21 erg per centimetro cubo e per 1″, essendo solo leggermente minore per la gommalacca e per l'ambra. Siccome la frequenza era di 40 periodi per 1″, l'energia dissipata sarebbe compresa tra 13.6 e 0.52 erg per 1 cm.^{3} e per ciclo di polarizzazione, e si conserverebbe per la maggior parte dei coibenti più vicina a questo limite minore. La grandezza di questi coefficienti sarebbe notevolmente più alta di quella dei coefficienti d'isteresi magnetica dati da Steinmetz, i quali per una massima induzione magnetica rappresentata da un'unità C.G.S. corrispondono ad una perdita per ciclo di 0.002 a 0.08 erg per 1 cm.^{3}, dal più dolce ferro fucinato al più duro acciaio adoperato per magneti permanenti, conservandosi per buoni materiali ordinari più vicina al limite minore. Però in quasi tutti gli apparecchi dove il ferro è utilizzato per le sue proprietà magnetiche, e dove le perdite di isteresi possono avere un'importanza non trascurabile, il flusso unitario d'induzione magnetica suol essere dell'ordine di parecchie migliaia. Nei condensatori comuni, anche in quelli costrutti per le più alte differenze di potenziale alternative, difficilmente l'intensità di campo supera un centinaio di unità assolute. Se nei due casi, per assumere valori non lontani dai medii, le intensità dei campi misurate nelle rispettive unità fossero rappresentate da 10.000 e da 100, e se le dispersioni di energia seguissero la stessa legge esponenziale, la ragione dei fattori esponenziali delle quantità di energia dissipate sarebbe all'incirca 1600 : 1, cioè di un ordine di grandezza che differisce poco da quello della ragione inversa dei rispettivi coefficienti di isteresi.

A parità di frequenza le dissipazioni di energia per unità di volume sarebbero dunque paragonabili!

(*) " Wiedem. Ann. ", 50. 1893.

INDICE DELLE MATERIE NEI DIVERSI PARAGRAFI

Fig. 1. 2 - Curve di carica del condensatore a seta

Fig. 3 - Carica totale

Fig. 4 - Carica residua

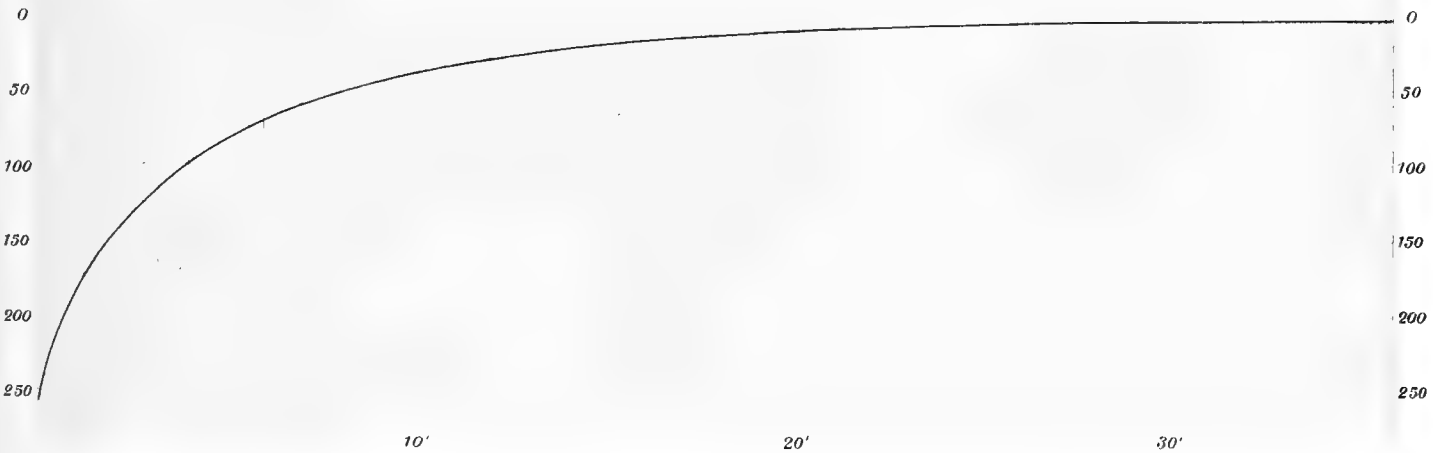



Fig. 10. 11 - Corrente di carica e scarica per un cond. a carta paraffinata

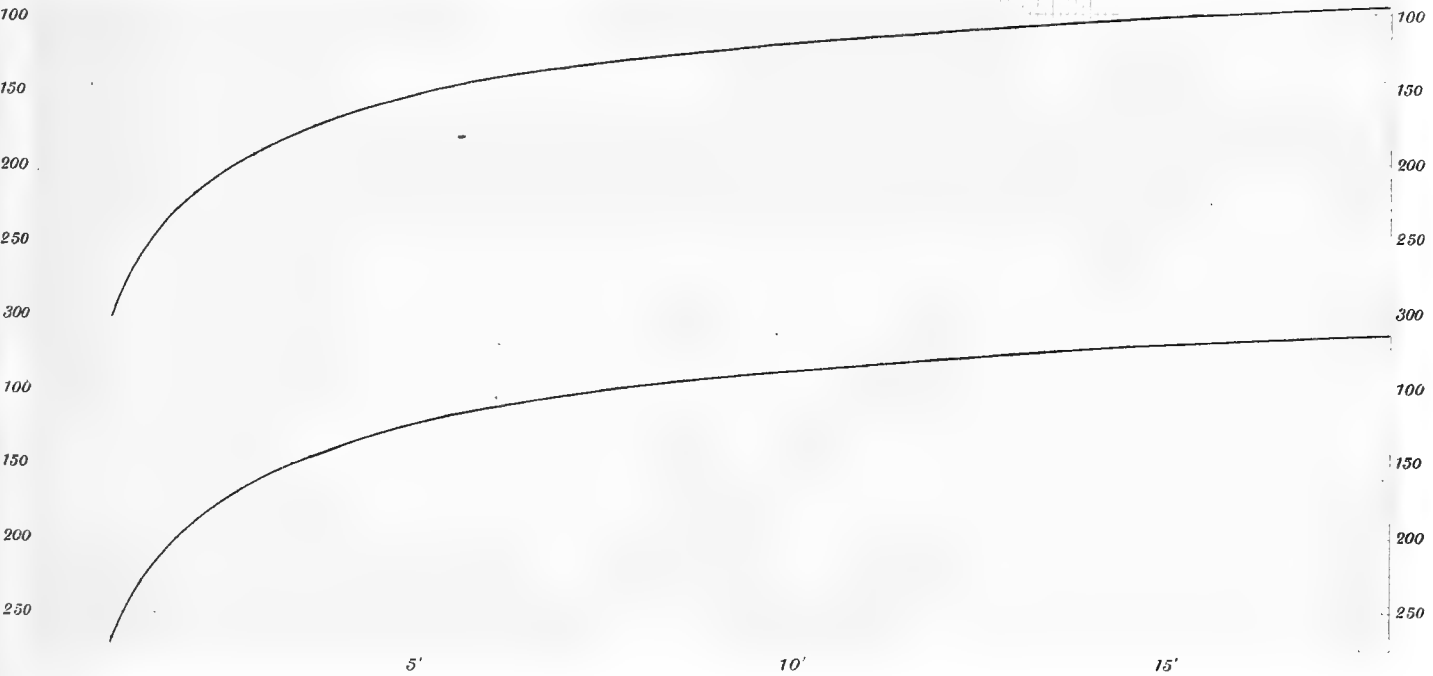



Fig. 5.6.7.8.9. - Curve di carica con dielettrici diversi

247 246 245 Seta

204 203 202 Mica

305 303 301 299 Paraffina

96 95 94 Ebanite

170 160 150 140 Vetro

0,05 0,10 0,15

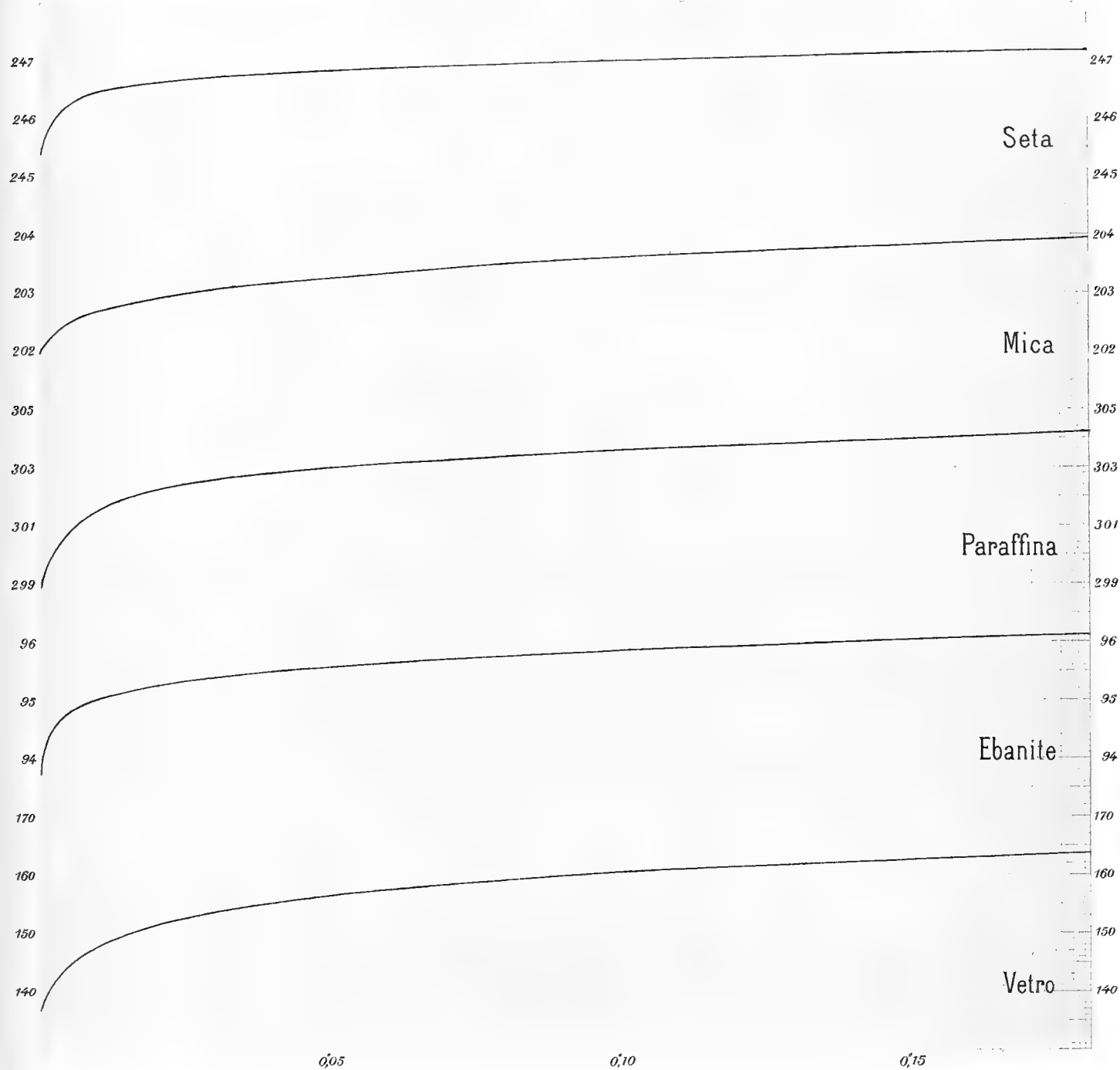
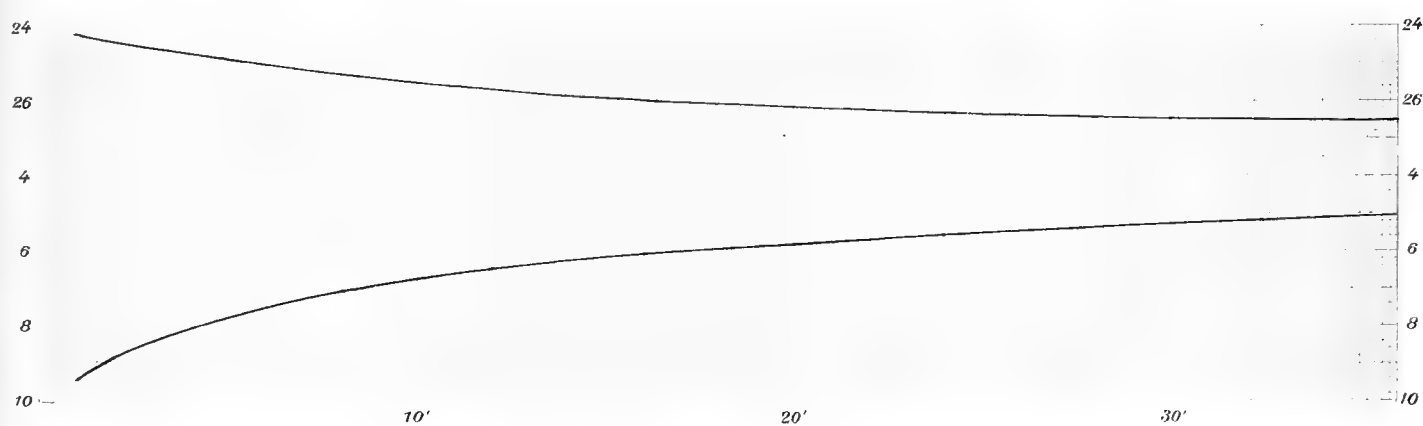



Fig. 12.13 - Deformazioni elastiche di un filo di seta

DITTERI DEL MESSICO

PARTE TERZA

MUSCIDAE CALYPTERATAE

OCYPTERINAE, GYMNOSOMINAE, PHASINAE, PHANINAE, TACHININAE, DEXINAE, SARCOPHAGINAE

MEMORIA

DEL

Dott. E. GIGLIO-TOS

Assistente al R. Museo di Anatomia comparata.

CON 1 TAVOLA

Approvata nell'Adunanza del 17 Dicembre 1893.

MUSCIDAE CALYPTERATAE

OCYPTERINAE

I. — Gen. **OCYPTERA.**

Latreille, *Histoire nat. des Insec. et Crustac.*, XIV, p. 378 (1804).

1. — ***Ocyptera Dosiades.***

Ocyptera Dosiades Walker (**37**), Part IV, p. 695. — van der Wulp (**34**), p. 15, 1. — Tyler Townsend (**31**), I, p. 143.

? *Ocyptera Euchenor* Walker (**37**), Part IV, p. 696. — Tyler Townsend (**31**), I, p. 144.

Ocyptera binotata Bigot (**2**), p. 44, 4. — Tyler Townsend (**31**), I, p. 144.

Ocyptera soror Bigot (**2**), p. 46, 8. — van der Wulp (**6**), II, p. 5, 1.

Ocyptera simplex Bigot (**2**), p. 47, 9.

Ocyptera atra Röder (**22**) p. 344.

Ho potuto esaminare 13 esemplari in parte maschi ed in parte femmine i quali corrispondono all'una od all'altra delle descrizioni sopracitate. Dopo un'osservazione accurata dei singoli individui non mi fu possibile assolutamente di distinguerli in varie specie, ma dovetti comprenderli in una sola ed unica, molto variabile però nella

colorazione. I caratteri costanti di questa specie sono la colorazione nera delle antenne, della proboscide, del torace e dello scudetto, dei piedi, e la colorazione bianca delle calittere. Variano invece assai la colorazione della faccia e dell'addome, l'intensità della infoscatura delle ali, la statura, la leggera pollinosità del torace, e le nervature alari; ma si nota un così graduale ed insensibile passaggio nel variare di essi che non mi fu possibile fare una separazione netta delle varie forme.

In tutti gli esemplari mancano le setole discali dell'addome e solamente sono presenti quelle presso il margine posteriore dei segmenti. Le macchie giallo-rossiccie laterali dell'addome sono talora così grandi da occupare buona parte dei segmenti secondo e terzo (*O. Dosiades*) e in tal caso le ali sono talora più intensamente offuscate (*O. binotata*); oppure le macchie addominali occupano una più piccola parte laterale dei segmenti (*O. soror*) e talora scompaiono affatto (*O. atra*). Le dimensioni variano da mm. 10 a mm. 7.

La faccia, generalmente a riflessi bianchicci, ha talora riflessi giallicci specialmente verso la sua sommità ed ai lati del fronte. Le ali sono più o meno intensamente offuscate; la vena trasversa apicale, talvolta fortemente, tal'altra più debolmente arcuata; la vena trasversa posteriore curva o quasi diritta; la vena quarta longitudinale munita di breve appendice o priva. La lunghezza degli uncini dei piedi è il carattere sessuale secondario del maschio.

Noto inoltre che il nome specifico di *soror* dato dal Bigot non potrebbe essere accettato, perchè già usato dal Wiedemann per indicare un'altra specie di *Ocyptera* del Capo di Buona Speranza (**40**) II, p. 652, 7.

Ocyptera minor Röder (**22**), p. 344, è distinta da questa specie per avere le setole discali sull'addome.

Hab. — Nord-America: Nova Scotia, Massachusset, Newfoundland (**37**), Baltimore (**2**), Quebec (**34**), Minnesota, New Messico, Jowa, Illinois (**31**) — Portorico (**22**) — Messico (**2**): Orizaba (**6**), Orizaba (Boucard, Sumichrast).

II. — Gen. **XANTHOMELANA.**

van der Wulp (**35**), p. 188.

2. — *Xanthomelana articulata.*

(Fig. 12, capo).

Xanthomelana articulata van der Wulp (**35**), p. 188.

Maschio. — *Faccia* concava bianco-gialliccia con riflessi dorati, ai lati delle antenne giallo-dorata; epistomio molto sporgente; ai lati della bocca una serie di piccole setole; vibrisse deboli ed inserite assai al di sopra del margine orale. — *Proboscide* lunga quanto è alto il capo, nera; *palpi* lunghi come la proboscide, filiformi, gialli, neri all'estremo apice. — *Fronte* larga al vertice un terzo della larghezza del capo, e tutta occupata quivi dalla striscia mediana larga, nera, vellutata; ai lati in basso giallo-dorata: ad ogni lato di essa una serie di deboli setole incrociate, che discendono solo fino alla base delle antenne. — *Antenne* nere; il primo

articolo cortissimo, il secondo un po' più lungo con alcuni peli superiormente; il terzo triplo del secondo, stretto, lineare, un po' concavo superiormente, un po' convesso al di sotto; stilo nero, lungo quanto il terzo articolo, ingrossato per quasi tutta la sua lunghezza. — *Occhi* grandi, giungenti fin presso al margine orale, oltrepassando le vibrisse, nudi. — *Torace* nero, vellutato; una fascia sottile trasversale nel mezzo e due larghe striscie laterali che congiungono la fascia al margine anteriore, giallo-dorate; petto e pleure grigio-pollinosi. — *Scudetto* nero; due setole all'apice incrociate e due più lunghe ai lati di queste divergenti. — *Addome* lungo, quasi conico, giallo, sparso di piccoli peli neri; sul secondo e terzo segmento una macchia nericcia longitudinale nel mezzo; sul quarto una simile macchia dilatata al margine posteriore in una fascia trasversale; il quinto ed il sesto totalmente neri; su ogni segmento, escluso il primo, due setole dorsali mediane e due laterali, solo marginali. — *Ventre* uniformemente giallo. — *Piedi* neri; anche, base dei femori anteriori e mediani e metà basale dei femori posteriori, gialle; uncini e pulvilli lunghi; pulvilli giallicci. — *Ali* nere, gradatamente meno offuscate dal margine anteriore al posteriore; cellula apicale chiusa e peduncolata all'apice dell'ala; quarta vena longitudinale curva alla sua piegatura; piccola vena trasversa posta al di là del mezzo della cellula discoidale; vena trasversa posteriore fortemente convessa. — *Calittere* gialliccie. — *Bilancieri* gialli.

Lunghezza mm. 6.

Un solo maschio.

HAB. — Messico (**35**): Orizaba (SUMICHRAST).

GYMNOSOMINAE

III. — Gen. GYMNOSOMA.

MEIGEN (**17**), II, p. 278, 100.

3. — *Gymnosoma* — ?

Un solo esemplare mancante di capo determinato dal BELLARDI come appartenente al genere *Gymnosoma*, e coll'addome quasi simile a quello di *G. rotundatum*, cioè globoso, giallo-ranciato, con una macchia tondeggiante nera sul dorso di ogni segmento presso il margine posteriore.

HAB. — Puebla (SAUSSURE).

IV. — Gen. CISTOGASTER.

LATREILLE (**8**), V, p. 511.

4. — *Cistogaster ferruginosa.*

Cistogaster ferruginosa VAN DER WULP (**35**), p. 187.

Riferisco a questa specie, stando alla breve diagnosi del VAN DER WULP, un maschio di circa 7 mm. di lunghezza, colla faccia, i lati del fronte, il torace e lo

scudetto ocracei, con riflessi dorati sulla faccia ed ai lati del torace; il terzo articolo delle antenne alla sua base e nella parte inferiore e l'addome sono fulvi; i primi articoli delle antenne, la striscia mediana del fronte, e le striscie del torace poco distinte, la base dell'addome ed i piedi sono neri; le ali un po' gialliccie alla base; le calittere gialle.

HAB. — Messico (**35**): Mexico (TRUQUI).

5. — *Cistogaster variegata.*

Cistogaster variegata VAN DER WULP (**35**), p. 187.

Un solo esemplare maschio distinto da *C. ferruginosa* per le dimensioni minori (mm. 5 circa), per il terzo articolo delle antenne nero e di forma ovale, per le quattro striscie del torace più distinte e per avere sui segmenti quarto e quinto dell'addome delle macchie confuse nere al margine posteriore.

HAB. — Messico (**35**): Orizaba (SUMICHRAST).

PHASINAE

V. — Gen. **TRICHOPODA.**

Trichiopoda LATREILLE (**8**), V, p. 512.

6. — *Trichopoda lanipes.*

Thereva lanipes FABRICIUS (**11**), p. 220, 10.
Trichiopoda lanipes LATREILLE (**8**), V, p. 512.
Trichopoda lanipes WIEDEMANN (**40**), II, p. 270, 4. — ROBINEAU-DESVOIDY (**21**), p. 284, 5. — WALKER (**37**), Part IV, p. 696. — OSTEN SACKEN (**20**), p. 146. — TYLER TOWNSEND (**31**), Paper I, p. 138.

Tre femmine.

HAB. — Carolina (**11**, **40**, **21**) — Georgia (**37**) — New Mexico (**31**) — Messico: Cuantla (SAUSSURE).

7. — *Trichopoda pyrrhogaster.*

Trichopoda pyrrhogaster WIEDEMANN (**40**), II, p. 272, 6. — VAN DER WULP (**34**), p. 15, 3; (**6**), II, p. 3, 2. — TYLER TOWNSEND (**31**), I, p. 138.
Trichopoda pyrrhogastra RÖDER (**22**), p. 344.

Due soli maschi.

HAB. — Sud-America? (**40**) — Guadalupa (**34**), Portorico (**22**) — Guatemala: San Gerónimo (**6**) — Messico: Orizaba, Cuernavaca (SUMICHRAST).

8. — ***Trichopoda pennipes.***

Musca pennipes Fabricius (**10**), p. 348, 149.
Dictya pennipes Fabricius (**11**), p. 327, 5.
Phasia jugatoria Say (**28**), p. 172, 2. — Complete Writ., II, p. 364.
Trichopoda pennipes Wiedemann (**40**), II, p. 274, 9. — Robineau Desvoidy (**21**), p. 283, 1. — Walker (**37**), Part IV, p. 696. — Osten Sacken (**20**), p. 146. — van der Wulp (**34**), p. 15, 2; (**6**), II, p. 3, 1. — Brauer e Bergenstamm (**7**), I, p. 147 (part.). — Tyler Townsend (**31**), Paper I, p. 138.

Un solo maschio privo di capo.

Hab. — Nord-America (**10**, **37**, **11**, **40**): Carolina (**21**), Indiana (**28**), Florida, Georgia (**37**), New Mexico (**31**) — Repubblica Argentina (**34**) — Messico: Presidio (**6**), Orizaba (Sumichrast).

VI. — Gen. ACAULONA.

van der Wulp (**6**), II, p. 4.

9. — ***Acaulona costata.***

Acaulona costata van der Wulp (**6**), II, p. 4, 1, tab. III, fig. 1, 1*a*, 1*b*. — Brauer e Bergenstamm (**7**), II, p. 388. — Tyler Townsend (**31**), Paper I, p. 141.

Un solo esemplare che reputo maschio per avere gli uncini ed i pulvilli dei tarsi assai sviluppati, e che differisce solo da quelli descritti da van der Wulp per l'addome di forma più stretta e più allungata di quanto è rappresentato nella figura. Le appendici genitali da quell'autore disegnate non sono in esso visibili, forse perchè ripiegate sotto il ventre che è concavo. Io credo fermamente che gli esemplari esaminati dal van der Wulp sieno femmine, avendo essi gli uncini ed i pulvilli dei tarsi molto piccoli.

Hab. — Messico: Orizaba, Medellin presso Vera Cruz (**6**). — Senza indicazione di località messicana (Sumichrast).

PHANINAE

VII. — Gen. PENTHOSIA.

van der Wulp (**35**), p. 189.

10. — ***Penthosia satanica.***

(Fig. 1, capo).

Scopolia satanica Bigot (**5**), p. 254, 5.
Penthosia satanica van der Wulp (**35**), p. 190.

Maschio. — *Faccia* obliquamente ritratta, nera, lucente, con riflessi argentini ai lati, se si osserva obliquamente dall'alto; epistomio appena sporgente; una serie

di peli tenui lungo le creste facciali; guancie alte circa più della metà del diametro longitudinale degli occhi; vibrisse appena distinte inserite al margine orale. — *Proboscide* e *palpi* neri. — *Fronte* un po' sporgente, larga circa un terzo del capo, nerovellutata, munita di una serie di peli sottili ai lati di una larga striscia mediana indistinta. — *Occhi* nudi. — *Antenne* lunghe nere, obliquamente dirette in avanti; primo e secondo articolo brevi e quasi uguali; il terzo molto più lungo, circa sei volte il secondo, appena più largo nel mezzo, tronco all'apice; stilo nero, lungo quanto il terzo articolo, sottile, appena pubescente. — *Occipite* piatto in alto, fortemente rigonfio in basso dietro alla bocca, nero lucente. — *Torace* quadrangolare, nero un po' lucente, rivestito di peli neri, più lunghi sulle pleure ed agli angoli anteriori, munito di qualche setola alla base delle ali, ed agli angoli posteriori. — *Scudetto* grande, semicircolare, nero, con due setole per ogni parte al margine e due altre apicali un po' più deboli, fortemente incrociate. — *Addome* più stretto del torace, molto più lungo di esso, quasi cilindrico, simile a quello delle specie di *Ocyptera,* ricurvo all'apice e munito di un ipopigio sporgente e bitubercolato; uniformemente nero, lucente, tendente al violaceo, rivestito di corti peli neri, con due setole dorsali ed una laterale solo marginali e brevi sui segmenti terzo, quarto e quinto; segmento primo brevissimo, gli altri lunghi e quasi fra loro uguali; il secondo munito ai lati di lunghi peli neri. — *Ventre* colorato come l'addome, ma più lungamente peloso. — *Piedi* lunghi, robusti, pelosi e setolosi, di color nero-pece, un po' lucente; i femori anteriori con tre serie di setole, una lungo il margine superiore, due lungo il margine inferiore, di cui una interna, l'altra esterna; gli altri femori con setole irregolarmente disposte, le tibie anteriori prive di setole fuorchè all'apice, le mediane e le posteriori munite di qualche setola anche verso il mezzo; le tibie posteriori più robuste e curve; i tarsi lunghi quasi quanto le tibie cogli articoli apicali un po' dilatati e con alcuni lunghi peli apicali sull'ultimo. — *Uncini* e *pulvilli* molto lunghi; i pulvilli giallo-pallidi. — *Ali* interamente fuliginose; cellula apicale chiusa e peduncolata; la quarta vena longitudinale piegata ad angolo retto e quivi appendicolata; vena trasversa apicale e vena trasversa posteriore ripiegate ad S; piccola vena trasversale posta quasi nel mezzo della cellula discale. — *Calittere* e *bilancieri* neri; questi fulvi alla base.

Femmina. — Differisce per il fronte appena un po' più largo, i piedi un poco meno pelosi e specialmente poi per i pulvilli e gli uncini meno lunghi e l'apparato copulatore che in essa appare formato da una piccola appendice ricurva in basso, sporgente dall'ultimo segmento dell'addome che è tronco obliquamente.

Lunghezza mm. 15 circa.

La specie *Hermyia afra* Robineau Desvoidy (**21**), p. 227, 1, ben distinta da questa, non è forse di questo stesso genere?

Maschi: 3. — Femmine: 2.

Hab. — Messico (**5**): Orizaba (Sumichrast).

VIII. — Gen. **HEMYDA.**

ROBINEAU DESVOIDY (**21**), p. 226, III.

11. — ***Hemyda armata.***

Ancylogaster armatus BIGOT, Bull. Soc. entom. de France, 1884, p. LXX.

Tre maschi.

La espressione usata da BIGOT nella diagnosi del suo genere *Ancylogaster:* " *antennis.... segmento tertio angusto, obtuso, secundo maxime longiore* „ è molto oscura e trasse in errore il distinto ditterologo TYLER TOWNSEND che credette essere il secondo articolo assai più lungo del terzo, mentre è l'opposto. Quest'errore è evidente nella sua tavola analitica dei generi delle *Ocypteridae* in: " The North American genera of Calypteratae Muscidae „ Paper I (Proced. ent. Soc. Washington, II, n° 1 — 1891), a p. 98.

HAB. — Messico (BIGOT): Orizaba (SUMICHR.).

TACHININAE

IX. — Gen. **ECHINOMYIA.**

Echinomya DUMÉRIL, *Exposition d'une méthode natur. pour la classif. et l'étude des Ins.* (1798); *Consid. gén. sur la Classe des Ins.*, p. 231 (1823).

12. — ***Echinomyia robusta.***

Tachina robusta WIEDEMANN (**40**), II, p. 290, 15.
Echinomyia analis MACQUART (**16**), 1r suppl., p. 144, 4, tab. 12, fig. 3. — TYLER TOWNSEND (**32**), p. 10.
Echinomyia haemorrhoa VAN DER WULP (**33**), p. 145, 17, pl. 4, fig. 13-16. — WILLISTON (**41**), p. 30.
Echinomyia robusta VAN DER WULP (**34**), p. 19, 8; (**6**), p. 32, 1, tab. II, fig. 10 *a*. — TYLER TOWNSEND (**31**), Paper III, p. 93.
Peleteria robusta BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), Pars II, p. 408. — TYLER TOWNSEND (**32**), p. 11.
?! *Tachinodes robusta* BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), Pars II, p. 409 nec ibid. p. 438.

Un solo esemplare femmina, alquanto guasto, che concorda bene colla descrizione del WIEDEMANN. Il carattere delle setole sulle guancie è troppo costante in alcune specie di questo genere, sieno europee od esotiche, perchè la *Tachina* (*Echinomyia*) *Anaxias* di WALKER (**37**) Part. IV, p. 726, possa essere identificata con questa specie, giacchè nella descrizione è detto: " no bristles on the sides of the face „.

Hab. — Montevideo (40) — Repubblica Argentina (34) — Colombia (16) — Nord America (33): White Mountains (41); Costantine, Nebraska, Jowa, Carlinville, New Hampshire, New York, Ottawa (31) — Costa Rica: Volcan de Irazu (6) — Messico: Ciudad in Durango (6), Cordova (Saussure).

13. — *Echinomyia filipalpis.*

Echinomyia filipalpis Rondani (27), p. 15. — Tyler Townsend (32), p. 10.
Echinomyia Cora Bigot (3), p. cxl; (4), p. 81, 3.
Echinomyia robusta van der Wulp (6), p. 32, 1 (partim).

Dalla breve diagnosi di *E. Cora* Bigot non appare che questa specie differisca da *E. filipalpis* Rondani se non per la colorazione bruno-scura delle tibie. In quasi tutti gli esemplari da me osservati le tibie, specialmente le posteriori, hanno almeno nel mezzo un color ferruginoso scuro, in qualcun altro sono pressochè nere. Non credo che la specie *E. Cora* possa venir distinta da quella del Rondani per questo solo carattere.

Maschi: 4 — Femmine: 1.

Hab. — Chilì (27) — Messico (4): Oaxaca (Sallé).

14. — *Echinomyia cinerascens.*

Echinomyia cinerascens Bigot (5), p. 256, 12.

Un solo esemplare femmina mancante delle antenne, che riferisco perciò dubbiosamente alla specie suddetta. — *Faccia* bianca con due setole alle guancie. — *Fronte* dello stesso colore con qualche riflesso bruno e la striscia mediana fulvo-rossiccia. — *Torace* nero, come al solito grigio-pulverulento: angoli posteriori testaceo-bruni, così anche lo scudetto. — *Addome* nero, notevolmente cosparso della solita pulverulenza argentina, assai abbondante, mancante solo al margine posteriore dei segmenti, assai più splendente e visibile sull' ultimo segmento: i lati del secondo e terzo segmento sono bruno-testacei. — *Piedi* neri. — *Ali* grigie, gialliccie alla base e lungo un certo tratto del margine anteriore.

Hab. — Messico (5): Solco (Sumichrast).

15. — *Echinomyia macrocera.*

Echinomyia macrocera Bigot (3), p. cxl; (4), p. 81, 4.

I palpi sono assolutamente filiformi nei due sessi. In un esemplare maschio osservai un po' di color ferruginoso-scuro ai lati del secondo e terzo segmento dell'addome. L'addome della femmina è, come al solito, alquanto più corto e quasi subgloso, mentre quello del maschio è assai più oblungo coll'organo copulatore assai

sviluppato e sporgente di color nero lucente, e coperto di numerosi peli neri misti a setole.

Riferisco a questa stessa specie un maschio ed una femmina che differiscono per la maggiore statura e per la pruinosità del torace e dello scudetto molto più abbondanti. Potrebbero forse essere distinti in una nuova specie.

Maschi: 4 — Femmine: 2.

Hab. — Messico (4): Oaxaca (Sallé).

X. — Gen. MICROPALPUS.

Macquart (15), II, p. 80.

16. — *Micropalpus fulgens.*

Tachina fulgens (Hoffgg) Meigen (18), IV, p. 259, 34, tab. 41, fig. 23. — Zetterstedt (43), III, p. 1096, 93.
Linnaemya Heraclei Robineau-Desvoidy (21), p. 53, 3.
Linnaemya analis Rob.-Desv. (21), p. 54, 4.
Linnaemya distincta Rob.-Desv. (21), p. 54, 5.
Linnaemya aestivalis Rob.-Desv. (21), p. 54, 6.
Linnaemya borealis Rob.-Desv. (21), p. 54, 7.
Micropalpus Heraclei Macquart (15), II, p. 81, 3.
Micropalpus analis Macquart (15), II, p. 82, 4.
Micropalpus borealis Macquart (15), II, p. 82, 5.
Micropalpus comptus Rondani (26), III, p. 70, 7. — Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 133 e II, p. 408.
Micropalpus fulgens Meigen (18), VII, p. 217, 1, tab. 70, fig. 12-15. — Schiner (29), I, p. 428. — van der Wulp (6), II, p. 34, 1.

Un solo esemplare femmina, colle antenne affatto nere, lo scudetto interamente testaceo e la parte mediana delle tibie di mezzo alquanto testaceo-oscura.

Non ritengo sinonimo di questa specie il *M. fulgens* Macquart (15) II, p. 83, 10, perchè nella sua descrizione è detto: " Troisième article des antennes subitement élargi „ che credo invece un carattere distintivo della specie seguente.

Hab. — Europa (Auct.) — Nord America (21) — Messico: Presidio, Ciudad in Durango (6), Orizaba (Sumichrast).

17. — *Micropalpus comptus.*

Tachina comta Fallén (9), II, Muscides, p. 24, 48. — Zetterstedt (43), III, p. 1094, 91.
? *Tachina marmorata* Meigen (18), IV, p. 261, 36.

? *Micropalpus marmoratus* Meigen (**18**), VII, p. 217, 3.
Micropalpus fulgens Macquart (**15**), II, p. 83, 10.
Micropalpus comtus Schiner (**29**), I, p. 429.

Due esemplari femmine, di cui uno mancante del terzo articolo delle antenne, che riferisco con dubbio però a questa specie, essendo distinti dalla antecedente per la forma subitamente allargata del terzo articolo antennale, per avere le guancie munite di una o due setole e l'addome più snello.

Hab. — Europa (Auct.) — Messico: Tuxpango (Sumichrast), Tampico (Saussure).

XI. — Gen. **GYMNOMMA.**

van der Wulp (**6**), II, p. 38.

18. — *Gymnomma novum.*

(Fig. 2, capo).

Gymnomma novum Giglio-Tos (**13**), p. 1.

Femmina. — *Faccia* gialla: epistomio assai prominente; lati della faccia sparsi di piccoli e brevi peli, ma sprovvisti di vere setole. — *Proboscide* nera, alquanto lunga. — *Fronte* assai larga, più stretta in alto, nericcia, giallo-pollinosa, con due serie di setole, e fra queste sono sparsi dei peli alquanto lunghi; striscia mediana rossiccia. — *Antenne* gialle; terzo articolo circa doppio del secondo, securiforme, notevolmente dilatato verso l'estremità e obbliquamente troncato, nero, appena un po'giallo alla base; stilo assai lungo, robusto, appena visibilmente pubescente. — *Occipite* adorno di peli gialli, assai lunghi ed abbondanti in basso. — *Torace* e *petto* giallo-olivaceo-pollinosi, le striscie nere appena visibili; due appaiate mediane anteriori e due laterali interrotte alla sutura; alcune setole nere assai lunghe ai lati ed al margine posteriore. — *Scudetto* fulvo, leggermente giallo-pollinoso, privo di spine e solo munito di setole, di cui alcune assai lunghe. — *Addome* ovale, privo di vere spine, fulvo, con una macchia nera nel mezzo dei segmenti primo, secondo e terzo; quella del secondo si estende dal margine anteriore al posteriore; quella del terzo è abbreviata anteriormente; sul quarto una macchia bruna meno distinta, abbreviata anteriormente e quivi biloba. Il primo segmento è sprovvisto di setole; il secondo ne ha sul dorso due discali e due marginali, ed una per parte ai lati; il terzo ne ha due discali ed una serie di 10-12 marginali; il quarto ne porta molte, specialmente alla sua estremità. — *Ventre* fulvo, nero all'apice, dove è specialmente coperto da numerose setole e peli neri frammisti. — *Piedi* fulvi con peli neri e setole nere, notevolmente lunghe sulle tibie posteriori (i piedi di mezzo mancano); uncini neri alla loro estremità; pulvilli gialli. — *Ali* brune, un po' gialle alla base; piccola vena trasversale posta quasi nel mezzo della cellula discale; cellula apicale largamente aperta; vene trasverse apicale e posteriore alquanto curve. — *Calittere* e *bilancieri* giallo fulvi. — Lungh. mm. 9.

Questa specie è notevolmente simile a *G. discors* VAN DER WULP (**35**), p. 193, ma la ritengo una specie distinta per la diversa forma del terzo articolo delle antenne e la presenza di setole discali anche sul secondo segmento.

Una sola femmina.

HAB. — Mexico (SUMICHRAST).

XII. — Gen. **MICROTRICHOMMA.**

GIGLIO-TOS (**13**), p. 1.

Faccia, guancie, epistomio, proboscide e fronte come nel genere *Echinomyia;* guancie prive di setole; palpi un po' clavati; antenne come in *Echinomyia,* non raggiungenti l'epistomio; terzo articolo ovale appena più lungo del secondo; stilo lungo, non geniculato, col secondo articolo assai sviluppato; occhi relativamente piccoli, pelosi; addome con due setole discali sul secondo e terzo segmento, due marginali sul secondo e la solita serie di marginali sul terzo e parecchie anche discali sul quarto; nella femmina i tre articoli intermedi dei tarsi anteriori dilatati ed il fronte con due setole orbitali.

19. — *Microtrichomma intermedium.*

Nemorea intermedia VAN DER WULP (**6**), II, p. 50, 5.
Microtrichomma intermedium GIGLIO-TOS (**13**), p. 2.

Femmina. — *Faccia* bianco-gialliccia, alquanto concava, coll' epistomio un po' prominente; le guancie assai grandi ed il margine boccale colle setole disposte come nelle specie di *Echinomyia.* — *Palpi* gialli. — *Fronte* giallo-pollinosa ai lati, assai larga, colla striscia mediana bruno-fulva e un po' stretta in alto. — *Antenne* giallo-fulviccie; il terzo articolo bruniccio nella metà apicale; stilo nero, appena pubescente. — *Occhi* pelosi. — *Torace* e *scudetto* densamente pollinosi; il primo colle solite striscie nere sottili, ma ben distinte sul davanti; gli angoli posteriori e lo scudetto un po' ferruginei. — *Scudetto* munito di lunghe setole al margine e nel mezzo di alcuni peli spinosi e di qualche corta spina. — *Addome* nero lucentissimo, ovale ed un po' più largo del torace. Sul primo segmento una setola marginale laterale; sul secondo due discali e due marginali dorsali ed una per parte marginale; sul terzo due setole discali dorsali ed una serie di altre marginali; sul quarto molte discali. — *Piedi* neri; femori e tibie ferruginoso-scuri, setolosi e pelosi; pulvilli gialli; uncini gialli, neri all'apice. — *Ali* un po' grigie, gialliccie alla base. — *Calittere* gialle. — Lunghezza mm. 10.

Una sola femmina.

HAB. — Messico: Xucumanatlan ed Omilteme in Guerrero (**6**), Mexico (**6**) (CRAVERI).

XIII. — Gen. **NEMOCHAETA.**

VAN DER WULP (6), II, p. 38.

20. — *Nemochaeta dissimilis.*

Nemochaeta dissimilis VAN DER WULP (6), II, p. 39, 1, tab. II, fig. 18, 18*a*.
Tachinodes dissimilis BRAUER e BERGENSTAMM (7), II, p. 409 e 427.

Un solo maschio che differisce da quello descritto da VAN DER WULP per avere la faccia bianca, il torace cinereo-pollinoso e lo scudetto ferrugineo.

HAB. — Costa Rica: Cache (6), Mexico (SUMICHRAST).

21. — *Nemochaeta seminigra.*

Tachina seminigra WIEDEMANN (40), II, p. 296, 26.
Jurinia analis MACQUART (16), II, 3e partie, p. 39, 1, tab. III, fig. 8. — OSTEN SACKEN (20), p. 149. — RÖDER (22), p. 345. — TYLER TOWNSEND (32), p. 8.
Tachina divisa WALKER (38), p. 270.
Echinomyia seminigra SCHINER (30), p. 331, 118.
Tachinodes seminigra BRAUER e BERGENSTAMM (7), II, p. 409, 439. — TYLER TOWNSEND (32), p. 11.

Gli esemplari che esaminai corrispondono assai bene specialmente alla descrizione di *Tachina divisa* di WALKER. Trovai questi esemplari segnati in collezione da BELLARDI col nome di *Jurinia analis* MACQUART.

Maschi: 8 — Femmine: 6.

HAB. — Brasile (40,16) — Parà (38) — Colombia, Chilì (30) — Portorico (22) — Messico (16): Orizaba, Oaxaca (SUMICHRAST).

22. — *Nemochaeta incerta.*

(Fig. 3, capo).

Nemochaeta incerta GIGLIO-TOS (13), p. 2.

Maschio. — Simile nell'aspetto ad alcune specie del genere *Echinomyia*. — *Capo* alquanto più largo del torace. — *Faccia* bianchiccia, poco inclinata all'indietro; epistomio alquanto sporgente; guancie assai larghe; lati della faccia sparsi di peli neri lungo il margine anteriore degli occhi, più rari in basso. — *Proboscide* nera; palpi gialli. — *Fronte* assai larga, un po' più stretta in alto con una serie di setole frammiste ad altri peli neri, di cui taluni anche setolosi; striscia mediana fulvo-rossiccia; peli dell'occipite abbondanti e gialli. — *Antenne* coi primi articoli gialli; il secondo munito di peli al margine superiore, di cui alcuni lunghi e quasi setolosi;

il terzo nero alquanto più lungo del secondo, col margine superiore notevolmente convesso, l'inferiore rettilineo. — *Torace* nero, grigio-pollinoso, colle solite striscie nere alquanto distinte; pleure e petto neri, grigio-pollinosi. — *Scudetto* testaceo-ferruginoso, munito specialmente al margine posteriore di lunghe setole e nel mezzo di peli neri, ma privo di spine. — *Addome* cordiforme, lucente con riflessi sericei, nero-azzurrognolo alla base, in una larga striscia mediana e su tutto il quarto segmento; rivestito di peli neri specialmente lunghi sul quarto segmento; i lati del secondo e terzo segmento largamente ed oscuramente ferruginosi; mancano le vere spine e le setole molto robuste sono così disposte: una per ogni lato al margine posteriore del primo segmento; due dorsali ed una laterale, marginali sul secondo; una serie di marginali sul terzo e parecchie anche discali sul quarto. — *Ventre* ferrugineo in una zona mediana trasversale, setoloso lungo il mezzo. — *Genitali* assai grandi, sporgenti, pelosi all'apice. — *Piedi* affatto neri; i femori e le tibie, specialmente le mediane e posteriori setolose; l'ultimo articolo dei tarsi munito all' apice di alcuni lunghi peli; uncini molto lunghi e neri; quelli dei piedi posteriori solo neri all'apice, gialli nel resto; pulvilli gialli. — *Ali* quasi limpide, nervature gialliccie; vena trasversale apicale fortemente curva alla base, quindi diritta; la vena trasversale posteriore diritta alla base, quindi curva. — *Calittere* bianche; *bilancieri* nericci. — Lunghezza del corpo mm. 12.

Due soli maschi.

HAB. — Oaxaca (SUMICHRAST).

23. — *Nemochaeta dubia.*

(Fig. 8, antenna).

Nemochaeta dubia GIGLIO-TOS (**13**), p. 2.

Maschio. — *Capo* alquanto più largo del torace. — *Faccia* bianco-gialliccia; epistomio poco sporgente; lati della faccia nudi. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli. — *Antenne* gialle nei primi articoli; il secondo articolo appena con pochi peli superiormente; articolo terzo nero, appena lungo come il secondo. — *Fronte* assai largo, giallo-pollinoso; striscia mediana fulva. — *Torace* assai densamente giallo-pollinoso, come anche le pleure ed il petto, colle solite striscie nere. — *Scudetto* ferruginoso, anch'esso giallo-pollinoso. — *Addome* cordiforme, lucente con riflessi sericei, oscuro-ferrugineo e con una striscia mediana nera appena appariscente, che scompare alla estremità del terzo segmento; i lati del quarto segmento alquanto fulvo-pollinosi. — Le setole dell'addome, i piedi e le ali come in *N. incerta.* — *Calittere* brune.

Questa specie ha molta somiglianza colla *N. incerta*; ne differisce tuttavia notevolmente per la mancanza assoluta di peli neri sulle guancie, per il terzo articolo delle antenne minore, per la pollinosità gialla del torace, per il colore dell'addome e delle calittere. È anche simile all'*Echinomyia dispar* VAN DER WULP (**6**) II, p. 34, 6, tab. II, fig. 14ª, ma ne differisce per il terzo articolo delle antenne, per la colorazione delle calittere e del torace. — Lunghezza mm. 12.

Un solo maschio.

HAB. — Non è indicata nè la località del Messico, nè da chi fu raccolta.

24. — *Nemochaeta crucia.*

Nemochaeta crucia Giglio-Tos (**13**), p. 2.

Maschio. — *Corpo* robusto un po' tozzo. — *Capo* alquanto più largo del torace. — *Faccia* gialliccia; epistomio alquanto sporgente. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli. — *Fronte* grigio-nericcia, gialliccio-pollinosa; striscia mediana larga e fulva sopra la base delle antenne, molto più stretta e bruna al vertice. — *Occhi* nudi. — *Antenne* coi primi articoli bruni, talora un po' gialli, talora quasi neri; il secondo articolo con peli sul margine superiore di cui qualcuno assai lungo; il terzo appena più lungo del secondo, nero e fortemente convesso al margine superiore. — *Torace* nero, un po' lucente, alquanto grigio pollinoso, specialmente in avanti, e colle solite striscie nere assai distinte; le pleure più densamente grigio-gialliccio-pollinose. — *Scudetto* nero-pece, un po' grigio pollinoso alla base, privo di vere spine. — *Addome* assai più largo del torace, cordiforme, tutto rivestito di peli densi e corti, più lunghi all'apice; di color piceo, con riflessi sericei su cui si intravede confusamente una striscia mediana nera terminante all'estremità del terzo segmento; le setole robuste disposte come in *N. incerta;* il quarto segmento un po' fulvo-pollinoso, visibile se osservato assai obliquamente di fianco. — *Ventre* piceo; una zona mediana longitudinale di vere spine. — *Piedi* neri; femori anteriori densamente gialliccio-pollinosi dal lato posteriore; ultimo articolo dei tarsi con alcuni peli lunghi; uncini fulvi, neri all'apice; pulvilli giallo-fulvicci. — *Ali* un po' grigie; nervature come in *N. incerta.* — *Calittere* brune, con riflessi sericei.

Femmina. — Differisce per il fronte notevolmente più largo e con due setole orbitali ricurve in basso, il secondo articolo delle antenne molto più peloso sul margine superiore, i pulvilli e gli uncini dei piedi assai più corti e le calittere alquanto più brune. I tarsi anteriori non sono visibilmente più dilatati che nel maschio. — Lunghezza mm. 15 circa.

Questa specie è forse la stessa che *Fabricia infumata* Bigot (**4**), p. 85,1? Dalla breve descrizione di questo autore non potrei affermarlo; non sono accennate in essa la forma e le dimensioni del terzo articolo delle antenne che nel genere *Fabricia* è visibilmente più breve del secondo.

Hab. — Mexico (Truqui), Tuxpango (Sumichrast), Huastec.

25. — *Nemochaeta pernox.*

Nemochaeta pernox Giglio-Tos (**13**), p. 2.

Maschio. — *Faccia* giallognola; epistomio assai prominente; lati della faccia con alcuni peli neri lungo gli occhi; proboscide nera; palpi gialli, assai clavati e con alcuni peli neri alquanto lunghi al di sotto presso l'apice. — *Fronte* nericcia, un po' gialliccio-pollinosa; striscia mediana quasi nera. — *Antenne* nere; il secondo articolo un po' peloso e setoloso sul margine superiore; il terzo alquanto più lungo

del secondo, assai largo, e convesso al margine superiore; stilo nero, appena visibilmente pubescente. — *Occhi* nudi. — *Torace* nero, grigio-pollinoso, colle solite striscie nere assai distinte. — *Scudetto* nero-piceo, munito di lunghe e robuste setole al margine posteriore e rivestito nel mezzo di ispidi peli corti. — *Addome* robusto, più largo assai del torace, piceo con riflessi sericei, rivestito di peli rigidi neri, procumbenti e più lunghi all'apice; sul primo segmento una sola setola laterale marginale per ogni lato; sul secondo due o quattro dorsali ed una per ogni lato, tutte marginali; sul terzo una serie di setole solo marginali assai robuste; sul quarto parecchie discali. — *Ventre* piceo, con la sola striscia di setole spinose lungo il mezzo. — *Genitali* assai sporgenti e pelosi. — *Piedi* neri, robusti, tutti pelosi e setolosi; l'ultimo articolo dei tarsi con alcuni peli più lunghi; uncini molto lunghi, fulvi, neri all'apice; pulvilli molto sviluppati, gialli. — *Ali* un po' grigie; le vene come nelle altre specie. — *Calittere* picee.

Femmina. — Differisce per il fronte un po' più largo, colle due setole solite orbitali, curve in basso; i pulvilli e gli uncini dei piedi assai più piccoli. I tarsi anteriori non sono visibilmente più dilatati. — Lunghezza mm. 18 circa.

Assai simile a *N. crucia* questa specie ne differisce tuttavia notevolmente per le dimensioni maggiori, l'addome assai più largo e privo di pollinosità sul quarto segmento, e per la forma diversa del terzo articolo delle antenne.

Maschi: 2. — Femmine: 1.

Hab. — Mexico (Boucard)?, Orizaba (Sumichrast).

26. — *Nemochaeta chrysiceps.*

Jurinia chrysiceps Robineau-Desvoidy (**21**), p. 37, 8.
Tachina (Jurinia) chrysiceps Walker (**37**), Part. IV, p. 715.
Jurinia flavifrons Jaennicke (**14**), p. 82, 109.

Maschio. — *Faccia* e *palpi* gialli; *proboscide* nera. — *Fronte* bruniccia, densamente giallo-pollinosa; striscia mediana bruno-fulva. — *Antenne* coi primi articoli gialli; il terzo nero, un po' più lungo del secondo, molto convesso. — *Torace* gialliccio pollinoso, specialmente sul davanti, colle solite striscie nere assai distinte — *Scudetto* nero, nel mezzo irto di spine corte e non robuste, alcune più lunghe e più forti al margine posteriore, fra le setole lunghe e robuste. — *Addome* nero-azzurrognolo lucentissimo, densamente coperto di lunghi peli neri, fra cui spiccano delle setole robustissime, quasi simili a spine, così disposte: sei o sette dorsali e tre per ogni lato solamente marginali sul secondo segmento; una serie sul terzo di setole marginali; molte sul quarto discali; la solita striscia di altre spine lungo il mezzo del ventre. — *Piedi* neri, setolosi e pelosi; i femori anteriori giallo-pollinosi dal lato posteriore; uncini lunghi, fulvi, ad apice nero; pulvilli gialli. — *Ali* bruniccie, la vena trasversa posteriore quasi retta. — *Calittere* picee. — Lunghezza mm. 15 circa.

Maschi: 2.

Hab. — Brasile (**21**) — Messico (**14**): Mexico (Sumichrast).

27. — *Nemochaeta jurinioides.*

(Fig. 5, capo).

Nemochaeta jurinioides Giglio-Tos (**13**), p. 2.

Maschio. — *Corpo* robusto. — *Faccia* bianco-gialliccia; i lati di essa e le guancie munite di peli neri ben visibili; epistomio assai sporgente; proboscide nera; palpi gialli. — *Fronte* gialliccio-pollinosa; la striscia mediana bruno-fulva, molto larga in basso sopra la base delle antenne, molto stretta al vertice. — *Occhi* nudi. — *Antenne* coi primi articoli fulvo-brunicci; il secondo con alcuni lunghi peli neri sul margine superiore; il terzo nero, appena più lungo del secondo, dilatato all'estremità a forma quasi di martello; il margine superiore poco convesso, l'inferiore notevolmente concavo, l'apice obliquamente troncato; stilo nero. — *Torace* nero, densamente coperto di peli neri fra cui sono sparse le setole, appena un po' grigio-pollinoso anteriormente; gli angoli anteriori, i lati, ed una grande macchia quadrangolare al margine posteriore di fronte allo scudetto, picei; petto e pleure neri. — *Scudetto* piceo con lunghe setole nere al margine, irto nel mezzo di corte spine. — *Addome* assai più largo del torace, cordiforme, piceo, appena lucente, munito di robustissime setole e di qualche spina; il quarto segmento fulvo pollinoso, specialmente se osservato obliquamente da lato; le setole e le spine così disposte: sul secondo segmento, due dorsali ed una per lato tutte marginali e alcune spine discali corte ma robuste nel mezzo di esso; sul terzo una serie di setole robustissime marginali e alcune corte spine discali solo nel mezzo; il quarto con parecchie setole quasi spinose discali sparse fra i lunghi peli neri che lo ricoprono. — *Ventre* munito delle solite spine lungo il mezzo. — *Genitali* picei e pelosi. — *Piedi* robusti, neri, pelosi e setolosi; uncini neri; pulvilli fulvi. — *Ali* grigiastre; la piccola vena trasversale offuscata di nero; la vena trasversale posteriore diritta per un piccolo tratto alla base, quindi fortemente curva. — *Calittere* picee. — Lunghezza mm. 15.

Un solo maschio.

Hab. — Oaxaca (Sallé).

28. — *Nemochaeta* (?) *aberrans.*

(Fig. 9, capo).

Nemochaeta (?) *aberrans* Giglio-Tos (**13**), p. 2.

Non possedendo di questa specie che un solo esemplare femmina ed alquanto deteriorato, non mi credo autorizzato a creare per esso un nuovo genere, sebbene i caratteri suoi sieno tali da non potersi porre nel genere *Nemochaeta.* Solo momentaneamente pertanto io la comprendo in questo genere, aspettando che l'esame di altri esemplari possa permettere la creazione di un genere apposito.

Per la forma del corpo, del torace, dell'addome, per la disposizione delle setole, per le nervature delle ali è in tutto simile alle altre specie di *Nemochaeta.* I caratteri differenziali principali stanno nella forma del capo e dei palpi. Il capo è ante-

riormente rigonfio fra gli occhi, press'a poco come nella specie del genere *Gonia;* i lati della faccia sono perciò assai larghi e quasi tumefatti, con una impressione sulle guancie ai lati dell'epistomio, e colle guancie rigonfie in basso; la faccia è quasi verticale appena concava e l'epistomio leggermente sporgente; il fronte è assai largo, e la striscia mediana larga tanto che al vertice occupa buona parte della larghezza del fronte; ai lati di essa (sebbene nell'esemplare in questione sieno cadute) tuttavia si vede dalle impressioni lasciate una serie di setole che giunge fino al livello delle inserzioni delle antenne con altre due setole più esterne orbitali. I palpi sono filiformi. La proboscide e le antenne sono come in *Nemochaeta,* ma il terzo articolo antennale, appena più lungo del secondo, è quasi rettilineo al margine superiore ed inferiore, e all'apice quasi troncato.

Femmina. — *Faccia* gialla; proboscide nera; palpi gialli. — *Fronte* gialla come la faccia; la larga striscia mediana fulva. — *Occhi* nudi. — *Antenne* gialle; il terzo articolo nero nella metà apicale. — *Torace, scudetto* ed *addome* neri, lucenti; un po' di pollinosità grigia specialmente sul davanti del torace; le solite striscie nere del torace poco distinte; petto nero, come il torace, grigio-pollinoso sulle pleure. Sull'addome le setole sono così disposte: due dorsali ed una per parte ma tutte marginali sul secondo segmento; una serie di sole setole marginali sul terzo, e parecchie discali sul quarto; tutto l'addome è rivestito di corti peli rigidi, procumbenti, più lunghi all'apice; sul ventre una zona mediana longitudinale di spine. — *Piedi* neri, robusti, pelosi e setolosi; uncini neri, e pulvilli gialli, ambedue poco sviluppati. — *Ali* bruniccie, nere alla base. — *Calittere* picee. — Lunghezza mm. 15 all'incirca.

Hab. — Metztillan.

XIV. — **Gen. JURINIA.**

Robineau-Desvoidy (**21**), p. 34, n. II. — Macquart (**16**), II, 3e partie, p. 37, 3.

29. — ***Jurinia dichroma.***

Jurinia dichroma van der Vulp (**6**), II, p. 27, 1, tab. II, fig. 5, 5 *a*.

Sebbene la *Iurinea apicalis* Jaenniche (**14**), p. 82,110, sia distinta da questa specie per la colorazione ferruginea dell'addome e per qualche altro carattere, tuttavia deve essere notevolmente somigliante a questa per l'aspetto generale.

Maschi: 6. — Femmine: 9.

Hab. — Costa Rica: Rio Sucio, Volcan de Irazu (**6**) — Messico: Ciudad in Durango (**6**), Mexico (Truqui, Craveri), Cuernavaca.

30. — ***Jurinia basalis.***

? *Tachina (Jurinia) basalis* Walker (**37**), Part IV, p. 713.

Molto dubbiamente riferisco a questa specie del Walker un esemplare femmina, alquanto deteriorato, mancante di quasi tutti i piedi, e che nel resto corrisponde alquanto alla descrizione data da quest'autore.

Hab. — Giamaica (**37**) — Huastec (Sallé).

XV. — Gen. DEJEANIA.

ROBINEAU-DESVOIDY (**21**), p. 33.

31. — *Dejeania corpulenta.*

Tachina corpulenta WIEDEMANN (**40**), II, p. 280, 1.
Dejeania rufipalpis MACQUART (**16**), II, 3e partie, p. 35, 5, tab. III, fig. 1. — BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), II, p. 409 e 438.
Dejeania corpulenta SCHINER (**30**), p. 337, 143 (exclus. synom.). — OSTEN SACKEN (**20**), p. 147 e 256, nota 265. — VAN DER WULP (**34**), p. 16, 1; (**6**), II, p. 9, 4, tab. I, fig. 4. — WILLISTON (**41**), p. 297. — BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), II, p. 409 e 426. — TYLER TOWNSEND (**32**), p. 5 [nec *D. corpulenta* MACQUART (**16**), II, 3e partie, p. 35, 4 e (**15**), II, p. 77, 22 *(Echinomyia)*].
Dejeania vexatrix OSTEN SACKEN (**19**), p. 343.

Parecchi esemplari molto diversi in dimensioni da mm. 10 a mm. 15 e quasi tutti femmine.

HAB. — Sud-America (**30**) — Colombia: Bogota (**34**) — Nord-America: Colorado (**19**), Nuovo Messico, Arizona (**41**) — Costa Rica: Cache, Volcan de Irazu (**6**) — Panama: Volcan de Chiriqui (**6**) — Messico (**40, 16, 6**): Oaxaca, Mexico, Solco (SALLÉ, TRUQUI, SUMICHRAST).

32. — *Dejeania aurea.*

Dejeania aurea GIGLIO-TOS (**13**), p. 3.

Maschio. — *Corpo* tozzo, coll'addome assai largo, il torace molto più stretto ed il capo più stretto ancora del torace. — *Faccia* gialla col fronte e l'epistomio notevolmente sporgenti. — *Proboscide* nera; palpi gialli, lunghi un po' meno della proboscide, assai sottili, cigliati ai lati di peli neri più lunghi all'estremità. — *Fronte* gialla, notevolmente stretta in alto con una sola serie di setole ai lati della linea mediana fulvo-rossiccia. — *Antenne* gialle; il terzo articolo ovale un po' giallo alla base ed al di sotto, nero nel resto; stilo nero. — *Occhi* nudi. — *Torace* tutto densamente coperto di pollinosità gialla; giallo su tutto il petto, le pleure, ai lati ed al margine posteriore del dorso; il disco si intravede nero al di sotto della pollinosità; le striscie solite nere non sono appariscenti. — *Scudetto* giallo-fulvo sparso di robuste spine nere. — *Addome* fulvo-rossiccio, tutto densamente coperto di lunghi peli giallo-sulfurei, fra cui spiccano le spine nere; quasi ovale, spiccatamente bilobo posteriormente, coi segmenti così notevolmente convessi ai lati che i margini laterali non sono determinati da una curva continua, ma da una serie di curve corrispon-

denti ad ogni segmento; anche il margine posteriore dei segmenti è notevolmente concavo nel mezzo del dorso. Il segmento primo è nero nel mezzo; il secondo, il terzo ed il quarto segmento portano nel mezzo alla loro base una macchia triangolare nera come in *D. corpulenta*. Le spine sono tutte marginali, fuorchè alcune discali sul quarto segmento; sono assai numerose sul primo segmento, formando una serie alquanto interrotta ai lati del dorso; formano una serie quasi ininterrotta sul secondo e una serie continua sul terzo; sul quarto sono sparse fra i peli nella sua metà apicale, essendo la metà basale priva di esse. — *Ventre* fulvo rossiccio; verso i lati del margine posteriore dei segmenti nericcio e nel mezzo con una serie marginale di robuste spine. — *Genitali* fulvo-rossicci, come l'addome. — *Piedi* giallo-fulvi, con rare setole nere e con peli setolosi gialli sui femori; uncini neri nella metà apicale, assai lunghi; pulvilli gialli. — *Ali* e *calittere* gialliccie. — Lunghezza mm. 11.

Questa specie è rassomigliantissima nell'aspetto e nelle dimensioni a *D. corpulenta;* ne differisce però per molti caratteri e sono convinto si debba considerare come una specie distintissima. Oltre ai peli dell'addome che non sono fulvi ma giallo-sulfurei, come in *Saundersia aurea,* sono ancora caratteri distintivi la forma dell'addome, la notevolmente minore larghezza del torace e del capo, la forma dei palpi molto più sottili e più pelosi, il fronte assai più stretto, ed il primo segmento dell'addome più sviluppato munito di spine marginali anche nel mezzo del dorso, mentre in *D. corpulenta* è solamente munito di qualche spina ai lati. Le ali sono anche proporzionatamente assai più strette.

Un solo maschio.

Hab. — Solco (Sumichrast).

XVI. — Gen. SAUNDERSIA.

Schiner (30), p. 333.

33. — *Saundersia aurea.*

(Fig. 4, capo).

Saundersia aurea Giglio-Tos (13), p. 3.

Maschio. — *Faccia* gialla con epistomio assai sporgente; ai lati della faccia due setole assai robuste, nere ed una serie di altre setole meno forti, talune filiformi, che si estendono fino a congiungersi colle setole frontali. — *Proboscide* nera, assai lunga. — *Fronte* assai larga, un po' più stretta in alto, di color giallo più fulvo; la striscia mediana giallo-rossiccia. — *Occipite* giallo, un po' bruno in alto, densamente vestito di lunghi peli dorati, e con una serie di corte setole al margine posteriore degli occhi. — *Antenne* fulve; il secondo segmento con corti peli neri all'apice nella parte superiore; il terzo appena leggermente bruniccio nel mezzo, assai bruscamente allargato all'apice e quivi obliquamente troncato, securiforme; stilo nero, assai lungo, diritto, appena pubescente. — *Torace* con disco nero, fulvo-pollinoso, con quattro striscie longitudinali nere più distinte; i lati, una macchia quadrangolare di fronte allo scudetto e tutto il petto di color fulvo; superiormente il torace è

cosparso di peli più lunghi giallo-dorati fra cui stanno le solite setole nere. — *Scudetto* fulvo; sparso di spine nere, più lunghe al margine posteriore; due setole mediane molto più lunghe si estendono dal margine posteriore fino a metà del secondo segmento addominale, ricurve in basso. — *Addome* fulvo, ovale, sub-globoso, coperto di lunghissimi peli giallo-sulfurei, lucenti, più abbondanti e più lunghi all'apice; sul primo segmento una macchia nera mediana sotto allo scudetto, ma nessuna setola, nè spina; sul secondo e sul terzo una serie di spine robuste nere al margine posteriore e molte altre nel mezzo di cui le mediane più lunghe e robuste; sul quarto qualche spina nera ai lati e nel mezzo. — *Ventre* fulvo, nero lucente al margine posteriore del terzo segmento e su tutto il quarto; i peli giallo-sulfurei sono rarissimi; le spine nere sono corte e numerosissime sulla parte nera del terzo segmento e su tutto il quarto; più rare ma più lunghe nel mezzo del margine posteriore di tutti i segmenti. — *Piedi* interamente fulvi; gli uncini neri nella metà apicale, i pulvilli gialli, ma non molto grandi; i femori con setole nere robuste sparse qua e là fra le altre setole gialle come quelle dell'addome, ma meno robuste; le tibie munite di setole solamente nere, rare e assai lunghe. — *Ali* quasi limpide; base diffusamente gialla; vene gialle fin presso all'estremità; piccola vena trasversale posta circa nel mezzo della cellula discale; le vene trasversali apicale e posteriore curve e di color bruno. — *Calittere* e *bilancieri* giallicci.

Un individuo, che credo femmina, si distingue per il terzo articolo delle antenne meno dilatato e assai meno obliquamente troncato all'apice e per il primo segmento dell'addome munito di spine al margine posteriore, di cui una per parte ai lati, assai lunga, e tre più corte per ogni parte della linea mediana. Inoltre i segmenti dell'addome sono tutti più scuri al margine posteriore. — Lunghezza del corpo mm. 14.

Come appare dalla descrizione questa specie è molto simile per l'aspetto a quella descritta dal Rondani col nome di *Epalpus rubripilus* (**24**), p. 7, 4, della Venezuela, e ridescritta poi dal van der Wulp come specie nuova col nome di *Saundersia rufopilosa* (**6**), II, p. 22, 5, tab. I, fig. 18. Ne è però ben distinta per vari caratteri; nella *S. rubripila* Rondani il terzo articolo delle antenne è nero, l'addome ha una striscia dorsale nera, ben distinta, le ali sono bruniccie ed i peli dell'addome non sono giallo-dorati, ma fulvo-rossicci.

Maschi: 2. — Femmina? 1.

Hab. — Mexico (Craveri), Angang.

34. — *Saundersia Jaennickei.*

Micropalpus rufipes Jaennicke (**14**), p. 79, 109. — Osten Sacken (**20**), p. 150.
Saundersia rufipes van der Wulp (**6**), II, p. 27.

Un solo esemplare femmina che differisce alquanto dalla descrizione del Jaennicke per le macchie dell'addome, ed il colore del ventre e le dimensioni alquanto minori.

Femmina. — *Faccia* gialla; epistomio assai prominente; guancie prive di setole. — *Fronte* nericcia, giallo-pollinosa; la striscia mediana bruno-rossiccia; due serie di setole. — *Antenne* gialle; terzo articolo appena più lungo del secondo, quasi ret-

tangolare, appena più dilatato all'apice e quivi leggermente arrotondito. — *Torace* e *petto* giallo-olivaceo-pollinosi; angoli posteriori fulvo-rossicci. — *Scudetto* fulvo-rossiccio con una serie di spine nere al margine posteriore e alcune altre verso il mezzo. — *Addome* pure fulvo-rossiccio, sparso di peli corti, non fitti, neri, più lunghi ai lati e munito di spine robuste nere; il primo segmento, superiormente, è privo di spine e porta solo ai lati alcuni peli setolosi; il secondo ha nel mezzo alcune spine irregolarmente disposte, di cui talune al margine posteriore; ai lati qualche spina marginale; il terzo ha alcune spine discali ed una serie di altre marginali assai numerose, prolungata anche sul ventre, dove sono più corte; il quarto, eccettuato il terzo basale, tutto sparso di spine anche nella parte ventrale: il primo, il secondo ed il terzo segmento portano nel mezzo una macchia nera, oblunga in questi due ultimi; nel quarto forse tale macchia è svanita. — *Ventre* fulvo-rossiccio come l'addome; una striscia mediana di spine che si prolunga fino al margine posteriore del primo segmento, dove sono più lunghe. — *Piedi* fulvo-rossicci, assai setolosi, specialmente le tibie di mezzo ed anche le posteriori; tarsi e pulvilli gialli; uncini neri alla metà apicale. — *Ali* brune; vena apicale trasversale poco curva. — *Calittere* e *bilancieri* bruno-gialli. — Lunghezza mm. 12.

Ho cambiato nome a questa specie, perchè la specie brasiliana *Hystricia rufipes* MACQUART (**16**), suppl. 4°, p. 172, 8, avendo i palpi corti, appartiene quasi senza dubbio a questo genere *Saundersia.*

HAB. — Panama (**14**) — Mexico (SALLÉ).

35. — *Saundersia bipartita.*

Saundersia bipartita VAN DER WULP (**6**), II, p. 25, 11, tab. II, fig. 3, 3 *a*.

Un individuo femmina concorda molto bene colla descrizione del VAN DER WULP. Un altro esemplare pure femmina differisce per dimensioni maggiori (14 millim. circa), le ali più brune, ed il terzo articolo delle antenne un po' più largo.

HAB. — Costa Rica; Cache (**6**) — Messico: Ciudad in Durango (**6**), Mexico (TRUQUI).

36. — *Saundersia bicolor.*

Saundersia bicolor WILLISTON (**41**), p. 304.

Una sola femmina differente dalla descrizione del WILLISTON per avere i piedi interamente giallo-fulvi, esclusi i tarsi.

HAB. — Nuovo Messico, Arizona, California, Washington (**41**) — Messico: Mexico (TRUQUI).

37. — *Saundersia macula.*

Micropalpus macula MACQUART (**16**), II, 3e partie, p. 46, 2, tab. V, fig. 2.
Saundersia macula SCHINER (**30**), p. 334, 130. — VAN DER WULP (**6**), II, p. 21, 3, tab. I, fig. 16. — BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), II, p. 409. — TYLER TOWNSEND (**32**), p. 7.
Saundersia (Epalpus) macula BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), II, p. 433.

Un solo maschio che differisce dalla descrizione del VAN DER WULP per avere le macchie dell'addome e le calittere perfettamente bianco-candide. La macchia dell'addome è limitata solo al mezzo e non si dilata ai lati.

HAB. — Sud America (**16**, **30**) — Costa Rica: Rio Sucio (**6**) — Mexico (CRAVERI).

38. — *Saundersia albomaculata.*

Micropalpus albomaculatus JAENNICKE (**14**), p. 80, 105.
Saundersia albomaculata VAN DER WULP (**6**), II, p. 21, 4, tab. I, fig. 17. — BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), II, p. 409.

Due maschi e due femmine. — In un maschio e nelle femmine l'addome non è di color nero ma ferruginoso-scuro; la macchia bianca dell'addome è estesa fino ai lati ed anche un po' sul ventre; le calittere sono bianche. — Lunghezza mm. 14 circa.

HAB. — Guatemala: Quezaltenango (**6**) — Messico (**14**): Ciudad in Durango (**6**), Mexico (CRAVERI), Oaxaca (SALLÉ).

39. — *Saundersia rufipes.*

Hystricia rufipes MACQUART (**16**), 4e suppl., p. 172, 8, tab. XV, fig. 11.
Saundersia ? rufipes VAN DER WULP (**6**), II, p. 27. N. B.
Saundersia rufipes TYLER TOWNSEND (**32**), p. 7.

Maschio. — *Faccia* gialla; guancie prive di vere setole. — *Fronte* bruniccia, grigio-gialliccio-pollinosa; la striscia mediana bruno-rossiccia. — *Antenne* coi primi articoli testacei; il secondo peloso superiormente; il terzo nero, un po' testaceo al margine inferiore che è rettilineo; il margine superiore curvo. — *Torace* nero, densamente gialliccio-pollinoso, colle striscie nere sottili, ma assai ben distinte. — *Scudetto* ferruginoso-scuro, un po' gialliccio-pollinoso, con setole lunghe al margine posteriore e spine nere anche nel mezzo. — *Addome* quasi subgloboso, nero lucentissimo, coperto di assai rigidi e corti peli neri e di molte spine. — *Piedi* neri; le tibie ed i tarsi ferruginoso-scuri, questi ultimi all'estremità più chiari; uncini gialli coll'apice nero; i pulvilli gialli. — *Ali* grigiastre, gialliccie alla base; vena trasversale posteriore alquanto curva. — *Calittere* nereggianti.

Femmina. — Differisce per i tarsi anteriori dilatati ed il terzo articolo delle antenne un po' meno curvo superiormente. — Lunghezza mm. 10-11.

Gli esemplari da me esaminati differirebbero da quelli del Macquart per la sola nervatura trasversale posteriore forse un po' più curva.

Maschio: 1 — Femmine: 2.

Hab. — Brasile (**16**) — Mexico (Truqui, Sumichrast).

40. — *Saundersia nigriventris.*

Hystricia nigriventris Macquart (**16**), II, 3e partie, p. 44, 1, tab. IV, fig. 3.
Micropalpus nigriventris Macquart (**16**), 1r suppl., p. 150.
Cryptopalpus hystrix Rondani (**27**), p. 18.
Saundersia nigriventris Schiner (**30**), p. 334, 131. — Röder (**23**), p. 10. — Tyler Townsend (**32**), p. 7.
Saundersia (Epalpus) nigriventris Brauer e Bergenstamm (**7**), II, p. 409 e 435.
Saundersia rufitibia van der Wulp (**6**), II, p. 24, 8.

Due sole femmine, in cui le tibie sono ferruginoso-scure, l'ultimo articolo dei tarsi giallo all'estremità, i pulvilli gialli, gli uncini neri all'apice, i femori anteriori gialliccio-pollinosi nel lato posteriore. In tutti e due gli esemplari, guardando obliquamente l'addome dai lati e dalla parte posteriore, si vede che l'estremità del terzo segmento e la base del quarto sono sparsi di una pollinosità fulvo-rossiccia.

Hab. — Sud-America (**30**) — Colombia (**16, 23**): Sancta-Fè de Bogota (**16, 27**) — Messico: Orizaba (**6**) (Sumichrast).

41. — *Saundersia picea.*

(Fig. 10, capo).

Saundersia picea Giglio-Tos (**13**), p. 3.

Maschio. — *Faccia* bianca, epistomio assai prominente; guancie prive di setole ma bianco-pelose. — *Proboscide* nera. — *Fronte* nera, veduta da lato; gialliccio-pollinosa vista dall'alto; striscia mediana bruno-rossiccia, quasi nera in alto. — *Antenne* nere; il secondo articolo un po' peloso superiormente; il terzo appena più lungo del secondo, convesso al margine superiore, rettilineo a quello inferiore; stilo assai lungo, nero, appena visibilmente pubescente. — *Occhi* nudi. — *Torace* nero, poco densamente grigio-pollinoso colle solite striscie nere alquanto distinte. — *Scudetto* piceo, munito di setole molto lunghe al margine posteriore e nel mezzo irto di spine. — *Addome* piceo, un po' fulvo-pollinoso alla base del quarto segmento; talora si intravede appena una larga striscia nera longitudinale nel mezzo, confusa col colore fondamentale dell'addome; i primi segmenti e specialmente il secondo sono coperti densamente da peli corti ma rigidi e neri; il primo segmento manca affatto di setole

e di spine; il secondo ed il terzo portano delle spine, non troppo robuste, ma quasi setoliformi, solamente al margine posteriore, od, eccezionalmente, qualcuna dorsale, posta però molto vicino a quelle marginali; il quarto segmento, fuorchè alla base, munito di spine disposte in varie serie. — *Ventre* piceo con una striscia mediana di vere spine. — *Genitali* picei, con peli neri all'apice. — *Piedi* affatto neri, con setole assai lunghe nere, specialmente sulle tibie mediane e posteriori; i femori anteriori grigio-pollinosi dal lato posteriore con una serie di setole sopra e sotto; uncini molto lunghi, gialli nella metà basale; pulvilli gialli. — *Ali* grigie; vena trasversale apicale fortemente curva alla base, quindi diritta; cellula apicale aperta; vena trasversa posteriore diritta per un buon tratto, quindi ricurva prima di congiungersi colla quarta longitudinale. — *Bilancieri* e *calittere* picei.

Femmina. — Differisce solo per i soliti caratteri sessuali, cioè per il fronte alquanto più largo ed i tarsi anteriori un po' dilatati; inoltre per la statura alquanto maggiore e l'addome più largo. — Lunghezza mm. 10-12.

Maschi: 3 — Femmine: 2.

Hab. — Mexico (Sumichrast).

XVII. — Gen. **HYSTRICIA.**

Macquart (**16**), II, 3e partie, p. 43.

42. — ***Hystricia ambigua.***

Hystricia ambigua Macquart (**16**), 4e suppl., p. 172, 9. — van der Wulp (**6**), II, p. 13, 3, tab. I, fig. 7. — Tyler Townsend (**32**), p. 6.
? *Hystricia ambigua* Williston (**41**), p. 298.
Pseudohystricia ambigua Brauer e Bergenstamm (**7**), I, p. 132, II, p. 409 e 422.

Maschi: 2. — Femmine: 3.

Hab. — Colorado (**41**, **7**) — Costa Rica: Rio Sucio, Cache, Volcan de Irazu (**6**) — Guatemala: San Gerónimo (**6**) — Messico (**16**, **41**): Orizaba (**6**) (Sumichrast), Mexico (Sallé), Solco.

43. — ***Hystricia pollinosa.***

Hystricia pollinosa van der Wulp (**6**), II, p. 14, 5, tab. I, fig. 8.

I tre esemplari della collezione Bellardi, uno maschio e due femmine, differiscono da quelli descritti dal suddetto autore per la statura alquanto minore (14 a 15 millim.).

Hab. — Guatemala: San Gerónimo — Costa Rica: Rio Sucio e Cache (**6**) — Mexico (Truqui): Metztillan (Saussure).

44. — *Hystricia amoena.*

Hystricia amoena Macquart (16), II, 3e partie, p. 44, 2. — van der Wulp (6), II, p. 16, 8, tab. I, fig. 11. — Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 131, II, p. 409 e 422.

Macquart descrisse il maschio di questa specie e van der Wulp la femmina. Nella collezione Bellardi non esistono che due maschi, che concordano bene colle descrizioni.

Hab. — Costa Rica: Volcan de Irazu (6) — Messico (16): Coscom (Sumichrast).

45. — *Hystricia micans.*

Hystricia micans van der Wulp (6), II, p. 16, 9, tab. I, fig. 12.

Maschio. — *Corpo* robusto. — *Faccia* bianco-gialliccia con qualche piccolo pelo ai lati; guancie munite in basso di parecchi e lunghi peli neri; epistomio assai prominente. — *Palpi* gialli, alquanto ingrossati all'apice e quivi muniti al di sotto di alcuni peli neri alquanto lunghi. — *Fronte* assai sporgente, larga in basso, molto più stretta in alto. — *Occhi* irti di peli lunghi fulvicci. — *Antenne* coi primi articoli gialli; il secondo con lunghi peli sul margine superiore; il terzo nero, lineare, leggermente concavo al margine superiore e convesso all'inferiore, un po' arrotondato all'apice, almeno il doppio in lunghezza del secondo. — *Torace* col disco nero, leggermente grigio-pollinoso colle solite striscie nere poco distinte; i lati giallo-fulvi. — *Scudetto* giallo-fulvo, irto di spine. — *Addome* rosso, assai più largo del torace, cordiforme, munito di robuste spine nere, che rivestono la metà posteriore del secondo, terzo e quarto segmento; sul secondo segmento si estendono nel mezzo fin verso la base; sul primo segmento ve ne sono solo alcune ai lati. Le incisioni dei segmenti presentano un riflesso bianco-argentino, se osservati molto obliquamente dal di dietro. Sul mezzo del dorso di ogni segmento, fuorchè sul quarto, una macchia quasi rotonda nera. — *Genitali* rossi come l'addome, molto sporgenti e muniti di un ciuffo di lunghi peli neri setolosi all'apice. — *Ventre* irto lungo il mezzo di spine nere. — *Piedi* robusti, fulvi; i femori rivestiti di peli lunghi gialli, misti a setole nere; uncini gialli, all'apice neri; pulvilli gialli. — *Ali* e *calittere* bruno-gialliccie. — Lunghezza mm. 14-15.

Questa specie, sebbene ben distinta per vari caratteri dalla *H. amoena*, è però nel complesso assai simile ad essa.

Due soli maschi.

Hab. — Costa Rica: Rio Sucio, Volcan de Irazu (6) — Messico: Oaxaca (Sallé).

46. — *Hystricia soror.*

Hystricia soror Williston (41), p. 298. — van der Wulp (6), II, p. 15, 6, tab. I, fig. 9.

Un maschio e tre femmine. — Nel maschio lo scudetto è bruno-pece, nelle femmine è invece quasi nero. In una femmina il torace è notevolmente più pollinoso e le quattro solite striscie sono ben distinte. Nel resto concordano bene con quelli descritti da Williston e van der Wulp.

Hab. — Nord-America: Arizona (41) — Guatemala: San Gerónimo — Costa Rica: Cache (6) — Mexico (Sallé e Sumichrast).

XVIII. — Gen. **TROPIDOPSIS.**

Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 132.

47. — *Tropidopsis pyrrhaspis.*

Tachina pyrrhaspis Wiedemann (40), II, p. 307, 47.
Hystricia pyrrhaspis Macquart (16), II, 3e partie, p. 43. — Schiner (30), p. 332, 122. — van der Wulp (6), II, p. 18, 12.
Tachina Anthemon Walker (37), Part IV, p. 733.
? *Tachina Amisias* Walker (37), Part IV, p. 734.
Tropidopsis pyrrhaspis Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 132; II, p. 409 e 438. — Tyler Townsend (32), p. 6.

Ho esaminato sei esemplari, tutti maschi, molto varianti in dimensioni (lunghezza da 13 a 18 mm.), ma assai costanti nella colorazione delle varie parti del corpo, col quarto segmento addominale costantemente nero, ma solo in taluni è nero anche l'apice del terzo.

Tachina Anthemon di Walker corrisponde perfettamente a questa specie; non ho potuto però riscontrare il carattere a cui egli accenna: “ facets (of eyes) on the fore part rather larger than those elsewhere „ che forse è poco distinto.

Hab. — Sud-America (30) — Brasile (40, 37) — Guatemala: Las Mercedes, San Gerónimo, Cubilguitz, Lanquin (6) — Messico: Cordova (6), Tuxpango, Orizaba.

XIX. — Gen. **BLEPHARIPEZA.**

Macquart (16), II, 3e partie, p. 54, 10.

48. — *Blepharipeza leucophrys.*

Tachina leucophrys Wiedemann (40), II, p. 308, 49.
Blepharipeza rufipalpis Macquart (16), II, 3e part., p. 55, 1, tab. VI, fig. 1; I suppl., p. 158. — Bigot, *Histor. fis. polit. y nat. de Cuba,* VII, Ins., p. 343. — Rondani (25), p. 8, 12. — Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 96.

Tachina (Blepharipeza) latifrons Walker (**38**), p. 284.
Tachina (Blepharipeza) nigrorufa Walker (**38**), p. 284.
Blepharipeza leucophrys Schiner (**30**), p. 336, 139. — Röder (**22**), p. 345. — Williston (**41**), p. 304. — Bigot (**4**), p. 89. — Brauer e Bergenstamm (**7**), II, p. 402 e 432. — Tyler Townsend (**32**), p. 9; (**31**), Paper III, p. 89.
Belvosia rufipalpis van der Wulp (**34**), p. 25, 17.
Belvosia leucophrys van der Wulp (**6**), II, p. 30, 2, tab. II, fig. 9, 9 *a*.

Undici esemplari dei due sessi, che differiscono alquanto nelle dimensioni e in qualche altro carattere. Tutti hanno le tibie posteriori cigliate; in taluni le spine discali dell'addome sono molto numerose e robuste, in altre scarse e quasi mancanti; così anche lo scudetto è in alcuni irto di spine nel mezzo; in tutti è di color piceo. Anche il colore dell'addome varia dal nero lucente al piceo, e la pollinosità del torace è più o meno densa. In un esemplare femmina un po' più piccolo degli altri la base delle ali è notevolmente più nera. Sono però convinto che essi appartengono tutti alla stessa specie, non essendovi un carattere solo costante che valga a distinguerli in due specie diverse.

Hab. — Sud-America (**38**): Repubblica Argentina (**34**), Brasile (**40, 25, 30, 34, 41**) — Guiana (**16**) — Colombia (**38, 30, 34**) — Nord-America: Connecticut, Pensilvania (**41**) — Cuba (**16**) (Bigot) — Portorico (**22**) — San Domingo (**41**) — Costa Rica: Rio Sucio, Volcan de Irazu (**6**) — Messico (**16, 4**): Presidio, Orizaba, Medellin presso Vera Cruz (**6**), Guanajuato (**31**), Orizaba, Mexico, Oaxaca (Sumichrast e Sallé), Solco.

XX. — Gen. BELVOSIA.

Robineau-Desvoidy (**21**), p. 103.

49. — *Belvosia analis.*

Belvosia analis Macquart (**16**), I suppl., p. 160, 2, tab. XIV, fig. 4.

Maschio. — *Corpo* tozzo, robusto. — *Capo* più largo del torace. — *Faccia* assai obliquamente ritratta, bianco-argentina, molto larga; epistomio appena leggermente sporgente; le due setole orali più lunghe inserite assai al di sopra del margine orale; le creste della faccia munite di sei o sette setole che si estendono per quasi due terzi della lunghezza della faccia; la fossa facciale assai profonda; le guancie brevemente pelose nella parte più bassa ai lati della bocca. — *Proboscide* nera, corta — *Palpi* gialli, lunghi come la proboscide, fortemente clavati. — *Fronte* nericcia, alquanto grigio-pollinosa, molto larga in basso, più ristretta in alto, ma tuttavia ancora larga quivi quanto un terzo del capo; la striscia mediana quasi nera, molto larga in basso, molto più stretta al vertice; ai lati di essa due serie di setole per parte, ricurve all'indietro. — *Antenne* lunghe, che si portano fin presso alle due vibrisse più lunghe

orali; i due primi articoli giallo-brunicci; il secondo munito di setole al margine superiore ed alquanto allungato; il terzo circa due volte e mezzo il secondo, nero, rigonfio superiormente alla sua base; stilo nero assai lungo. — *Occhi* assai grandi, nudi. — *Torace* quasi quadrato, nero, leggermente cinereo-pollinoso anteriormente colle solite striscie nere sottili e poco distinte, coperto di ispidi e corti peli neri. — *Scudetto* piceo, irto di corti peli neri, e munito al margine di lunghe e robuste setole nere. — *Addome* alquanto più largo del torace, ovale e tozzo, nero vellutato, coperto di peli neri, corti e rigidi, procumbenti; il quarto segmento giallo-dorato per una densa pollinosità che lo ricopre e sparso di rari, piccoli e brevi peli neri; due setole marginali sul dorso del primo e secondo segmento ed una per parte ai lati; una serie continua di setole marginali robuste e simili a spine sul terzo e sul quarto. — *Piedi* robusti, neri, pelosi e setolosi; le tibie posteriori cigliate, con qualche setola posteriormente; uncini molto lunghi, gialli, neri all'apice; pulvilli fulvi, assai sviluppati. — *Ali* brune, gradatamente più nereggianti verso la base; la piccola vena trasversa avanti il mezzo della discale è molto obliqua; quella posteriore leggermente fatta ad S. — *Calittere* picee. — Lunghezza mm. 12.

Un solo maschio.

Assai simili a questa, e forse anche appartenenti alla medesima specie, sono le due seguenti *Belvosia Weyenberghiana* VAN DER WULP **(34)**, p. 26, 18, pl. I, fig. 16 e *B. leucopyga* VAN DER WULP, Notes from the Leyden Museum, IV, p. 84, 17 e **(34)**, p. 27, 19, tutte e due specialmente distinte per avere i due articoli basali delle antenne neri.

HAB. — Brasile? **(16)** — Messico: Tuxpango (SUMICHRAST).

50. — *Belvosia bella.*

(Fig. 6, capo; 6*a*, ano).

Belvosia bella GIGLIO-TOS **(13)**, p. 3.

Femmina. — *Capo* più largo del torace. — *Faccia* obliquamente ritratta come in *B. analis,* bianco-argentina, larga; guancie nude anche nella parte più bassa; le setole sulle creste facciali più spaziate e solo in numero di tre o quattro. — *Proboscide* corta, nera. — *Palpi* gialli, clavati. — *Fronte* molto larga, appena più stretta in alto, bruniccia ed un po' cinereo-pollinosa; la striscia mediana fulva; ai lati di questa una sola serie per parte intera di setole ed altre tre setole orbitali rivolte in basso. — *Occhi* nudi. — *Torace* di forma trapezoidale, cioè più stretto posteriormente, grigio-pollinoso nel mezzo, colle solite striscie nere alquanto distinte, di cui le laterali più larghe e diffuse; lungo i lati di esso sulle pleure e sul petto densamente gialliccio-pollinoso. — *Scudetto* nericcio alla base, quindi a poco a poco testaceo fino all'apice, munito al margine di lunghe setole nere. — *Addome* appena più largo del torace, ovato ed ottuso all'apice, nero, e sparso di pollinosità gialliccia, fuorchè sul primo segmento ed all'apice del secondo e del terzo; i lati del secondo segmento un po' ferruginosi; la pollinosità del terzo segmento più gialla e più densa; il quarto segmento, poco sviluppato ed in parte nascosto sotto il terzo tutto giallo-dorato,

come in *B. analis*, per una densa pollinosità di tal colore che lo ricopre; le setole così disposte: due marginali dorsali ed una per parte laterali piccole sul primo e secondo segmento; una serie di marginali più robuste e simili a spine sul terzo; un'altra serie di marginali sul quarto, i cui margini posteriori ravvicinati formano una fessura longitudinale all'apice dell'addome. — *Ventre* convesso, ferrugineo, densamente pollinoso su tutto il terzo segmento ed alquanto alla base del secondo. — *Piedi* robusti, neri, pelosi e setolosi; le tibie posteriori cigliate e con alcune setole dal lato esterno; pulvilli gialli; uncini neri; ambedue poco sviluppati. — *Ali* un poco gialliccie, specialmente alla base; le nervature press'a poco come in *B. analis.* — *Calittere* bianche. — Lunghezza mm. 10.

Una sola femmina.

Hab. — Non è indicata la località del Messico in cui fu raccolta.

XXI. — Gen. CHAETOGENA.

Rondani (26), III, p. 172, 175.

51. — *Chaetogena carbonaria.*

(Fig. 19, capo).

Chaetogena carbonaria Giglio-Tos (13), p. 4.

Maschio. — *Faccia* bianco-argentina, molto obliquamente ritratta; epistomio non sporgente, con due vibrisse lunghissime e convergenti; qualche setola ai margini laterali della bocca; creste facciali molto rilevate, munite di una serie di 10-11 lunghe setole, gradatamente decrescenti verso l'alto e ricurve in basso, che si estendono fino alla base del terzo articolo delle antenne; guance pelose ai lati della bocca. — *Proboscide* mediocre, nera, colle labbra assai sviluppate; *palpi* lunghi come la proboscide, ricurvi in alto, neri alla base, fulvi nel resto, un po' ingrossati all'apice e pelosi verso il mezzo. — *Fronte* molto sporgente, assai larga, un po' più stretta in alto, nera ai lati con riflessi grigio-gialliccio-pollinosi; striscia frontale nera, larga appena più dei lati; da ogni parte di essa una serie confusa di setole miste a peli che discendono dal mezzo fino all'apice del secondo articolo delle antenne ed al vertice tre setole più lunghe ricurve all'indietro e due ocellari ricurve in avanti e divergenti. — *Occhi* grandi, inferiormente assai lontani dalle vibrisse, irti di lunghi e fitti peli fulvi. — *Antenne* grandi, lunghe quanto la faccia, inserite sull'apice della sporgenza frontale, nere, adagiate nella fossa facciale; il primo articolo corto, il secondo un po' più lungo e con qualche pelo al margine superiore; il terzo molto largo, lineare, un po' arrotondato all'apice, lungo da 4 a 5 volte il secondo; stilo lungo e sottile, appena un po' ingrossato alla base; il secondo articolo brevissimo. — *Torace* nero, grigio-gialliccio-pollinoso con quattro striscie nere ben distinte; le mediane più sottili, le laterali più larghe e interrotte alla sutura; pleure e petto neri, pollinosi come il torace. — *Scudetto* nero piceo; la pollinosità grigia è solo visibile osservandola obbliquamente dal di dietro. — *Addome* sub-conico, largo quanto il torace, ma un po' più lungo, terminato all'apice da lunghi peli neri, misti a setole; tutto

nero-opaco con riflessi pollinosi fulvi alle incisioni e sul ventre, appena distinte se osservate molto obliquamente; le setole, tutte marginali sui primi tre segmenti, così disposte: sul primo e sul secondo due dorsali e una o due laterali; sul terzo una serie di 8-10 assai spaziate ma robuste; sul quarto parecchie discali miste a lunghi peli neri. — *Ventre* coi riflessi pollinosi alla base dei segmenti ben più distinti. — *Piedi* robusti, ed assai lunghi, neri, pelosi e setolosi; i piedi anteriori hanno i femori grigio-pollinosi dal lato posteriore, con una serie di setole ben ordinate dal lato esterno e da quello interno; le tibie al loro apice ed i tarsi alla base con riflessi sericei fulvo-dorati; le tibie mediane con due lunghe setole esternamente e le posteriori con due setole verso il mezzo e due presso all'apice quasi appaiate; l'ultimo articolo di tutti i tarsi muniti di lunghissimi peli; gli uncini ed i pulvilli molto lunghi; i pulvilli gialli. — *Ali* ialine, un po' fulviccie alla base e lungo un certo tratto della costa, che è setolosa all'ima base; la terza vena longitudinale con qualche setola alla base; la cellula apicale largamente aperta e sboccante prima dell'apice; la vena apicale trasversa molto concava alla base, quindi diritta; la quarta vena longitudinale priva di appendice al gomito; la piccola vena trasversa posta un poco prima del mezzo della cellula discale; la vena trasversa posteriore un po' bisinuosa. — *Calittere* bianche orlate di bruniccio. — Lunghezza mm. 13-14.

Due soli maschi.

Hab. — Orizaba (Sumichrast).

52. — *Chaetogena cincta.*

Chaetogena cincta Giglio-Tos (**13**), p. 4.

Per la forma del corpo e delle varie sue parti e per la disposizione delle setole è assolutamente simile a *C. carbonaria*. Differisce nella colorazione.

Maschio. — *Faccia* gialliccia ai lati, argentina nel mezzo; guancie pelose in basso ai lati della bocca. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli, pelosi in basso verso il loro mezzo. — *Fronte* giallo-pollinosa ai lati; la striscia frontale nera. — *Antenne* nere, stilo sottile e lungo. — *Torace* nero, grigio-gialliccio pollinoso, colle striscie come in *C. carbonaria;* petto e pleure grigio-pollinosi. — *Scudetto* nero all'ima base, un po' rossiccio all'apice e densamente grigio-pollinoso, fuorchè alla base. — *Addome* nero; i lati del secondo segmento largamente e quelli del terzo alla base ferruginosi; alla base dei segmenti secondo e terzo e quarto una fascia grigio-pollinosa, larga quanto la metà dei segmenti; le incisioni argentino-pollinose se osservate obliquamente dal di dietro. — *Ventre* quasi tutto argentino-pollinoso. — *Piedi, ali* e *calittere* come in *C. carbonaria.*

Femmina. — Differisce per il fronte un po' più largo, e due setole orbitali ricurve in basso oltre alle altre come nel maschio; il torace, lo scudetto e l'addome più densamente pollinosi e quest'ultimo non ferruginoso ai lati; i pulvilli e gli uncini assai più corti. — Lunghezza mm. 12-13.

Maschi: 2. — Femmine: 1.

Hab. — Orizaba (Sumichrast).

53. — *Chaetogena gracilis.*

(Fig. 7, antenna).

Chaetogena gracilis Giglio-Tos (**13**), p. 4.

Femmina. — *Faccia* argentina, assai obliquamente ritratta; epistomio non sporgente; vibrisse proprio al margine boccale; creste facciali munite di una sola serie di 6-7 setole ricurve in basso, che si estende fin presso alla base del terzo articolo delle antenne; guancie molto strette. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli appena un po' ingrossati verso l'apice. — *Fronte* giallo-dorata, assai larga e sporgente; la striscia mediana nera; ai lati di essa una serie di setole che si estende dal mezzo fino all'apice del secondo articolo delle antenne; fra queste, due più lunghe presso la base delle antenne convergono e si incrociano al di sopra di queste; due setole orbitali ricurve in basso; tre altre più interne di cui la mediana più piccola ricurve all'indietro; due ocellari ricurve in avanti e divergenti. — *Occhi* irti di peli bianchicci, grandi, che giungono in basso fin presso al margine boccale. — *Antenne* lunghe quanto la faccia, nere, inserite al di sopra del mezzo degli occhi; il primo articolo brevissimo, il secondo un po' più lungo del primo, un po' peloso superiormente; il terzo almeno quadruplo del secondo, quasi tronco all'apice, stretto alla base e gradatamente più dilatato verso l'estremità; stilo più corto del terzo articolo delle antenne ingrossato fin presso all'apice. — *Torace* nero, densamente grigio-pollinoso; le due striscie nere mediane non distinte, le laterali larghe e un po' confuse; petto e pleure grigio-pollinosi. — *Scudetto* nero, densamente grigio-pollinoso. — *Addome* largo quanto il torace, ma un po' più lungo, sub-conico, nero un po' lucente; tutti i segmenti, fuorchè il primo interamente e una stretta fascia al margine posteriore degli altri, grigio-pollinosi; sul primo e secondo segmento due setole marginali dorsali ed una per parte laterali; sul terzo una serie di sei a sette marginali; sul quarto qualcuna discale; quelle del primo segmento molto deboli e corte, le altre molto robuste e lunghe. — *Ventre* nero, grigio-pollinoso fuorchè all'apice, alle incisioni e in una sottile striscia longitudinale mediana. — *Piedi* neri, robusti, pelosi e setolosi; i femori anteriori grigio-pollinosi dal lato posteriore; uncini e pulvilli molto piccoli; pulvilli fulvi. — *Ali* quasi ialine; le vene come nelle altre specie precedenti. — *Calittere* bianche. — *Bilancieri* bruni. — Lunghezza mm. 9.

Questa specie che per la colorazione è un po' simile a *C. cincta* ne è però ben distinta per la forma più gracile del corpo, del terzo articolo delle antenne e dello stilo e per la mancanza di striscie nere distinte sul torace.

Hab. — Una sola femmina raccolta da Boucard senza indicazione di località.

XXII. — Gen. **BLEPHARIPODA.**

Brauer e Bergenstamm (**7**), I, p. 96 - pro *Blepharipa* Rondani (**26**), IV, p. 13.

54. — *Blepharipoda mexicana.*

(Fig. 18, capo).

Blepharipoda mexicana Giglio-Tos (**13**), p. 6.

Femmina. — *Faccia* giallo-dorata, obliquamente ritratta, e appena concava sopra all'epistomio; vibrisse incrociate, inserite un po' al di sopra del margine boccale; sulle creste laterali una serie di setole sottili e deboli, gradatamente più brevi, che si estende visibilmente oltre la metà della faccia; guancie alquanto grandi, circa la metà dell'altezza degli occhi, pelose. — *Proboscide* nera; *palpi* fulvi, leggermente ingrossati dalla base all'estremità, ricurvi in alto. — *Fronte* giallo-dorata, come la faccia, più stretta in alto; la striscia frontale nera, opaca; ai lati di questa una serie di setole discendenti fino all'apice del secondo articolo delle antenne, ricurve in dentro; due di esse al vertice ricurve all'indietro; due orbitali robuste ricurve in basso; e due ocellari più piccole; una doppia serie di piccole setole al margine posteriore degli occhi. — *Occhi* grandi, discendenti fin presso all'apice delle antenne, nudi. — *Antenne* un po' meno lunghe della faccia; il primo ed il secondo articolo bruno-fulvi; il secondo un po' più lungo del primo, peloso di sopra; il terzo nero, lineare, triplo del secondo, arrotondato all'apice; stilo molto lungo, nero, ingrossato dalla base fin verso il mezzo. — *Torace* nero, bianco-gialliccio-pollinoso; così le pleure ed il petto; sul dorso quattro striscie nere ben distinte, di cui le laterali più larghe, posteriormente quasi confuse colle mediane; un'altra striscia nera nel mezzo, breve, di fronte allo scudetto. — *Scudetto* grigio-pollinoso, nero alla base, rossiccio nel mezzo e testaceo all'apice; tre setole per parte lunghe e due all'apice più corte e sottili. — *Addome* ovale, appena più largo del torace, acuto, nero, tutto cosparso, fuorchè sul primo segmento, di pollinosità bianchiccia, più o meno visibile secondo l'incidenza della luce, racchiudente macchiette irregolari nere; la pollinosità sul quarto segmento, gialliccio-dorata; sul primo segmento una setola per parte marginale; sul secondo due dorsali ed una laterale tutte marginali; sul terzo una serie di otto setole marginali; sul quarto molte discali. — *Ventre* convesso, uniformemente bianchiccio pollinoso; la serie delle setole marginali del terzo segmento si continua su tutta la larghezza del ventre dove sono più brevi. — *Piedi* neri, pelosi e setolosi (mancano gli anteriori); tibie posteriori cigliate al lato esterno; due setole nel mezzo dal lato interno e due appaiate presso l'apice; pulvilli ed uncini mediocri; pulvilli bruno-fulvi. — *Ali* limpide, appena un po' bruniccie alla base e lungo un tratto della costa; piccola vena trasversa obliqua posta un po' prima del mezzo della discale; cellula apicale largamente aperta prima dell'apice dell'ala; nessuna appendice al gomito della quarta vena longitudinale; la vena trasversa apicale un po' concava; la vena trasversa posteriore dritta alla base, quindi obliqua. — *Calittere* bianche, orlate di gialliccio. — Lunghezza mm. 13.

Una sola femmina, simile alla specie europea *B. scutellata,* ma distinta specialmente per la colorazione della faccia, e la mancanza di setole dorsali sul primo segmento dell'addome.

Hab. — Tehuacan.

XXIII. — **Gen. ACROGLOSSA.**

Williston (42), p. 1916.

Williston nel 1889 creava questo genere per un dittero (*A. hesperidarum*) allevato da Harris da un *Epargyreus tityrus.* Ma nel 1891 i ditterologi Brauer e

Bergenstamm non accettavano tal genere, siccome quello che a loro parere " non può essere distinto dal genere Spallanzania di Rondani „; (7) II, p. 354. Nella collezione Bellardi di ditteri messicani esiste un dittero che corrisponde perfettamente ai caratteri generici di *Acroglossa*. Confrontato da me colla specie *Spallanzania hebes* europea, tipo del genêre, esistente nella collezione Bellardi di ditteri europei, ho potuto convincermi che le due forme non hanno altro di comune fra di loro che la disposizione delle setole sul fronte e sull'addome. Nel resto della forma del capo diversificano moltissimo. In *Acroglossa* il fronte e la faccia sono assai meno rigonfi e larghi, questa più obliquamente ritratta e munita di una serie regolare di setole sulle creste laterali, mancanti in *Spallanzania*, inoltre le antenne, il cui secondo articolo è notevolmente corto, ed il terzo molto più lungo e di forma ben diversa da quello corrispondente in *Spallanzania*, avvicinano questo genere a *Frontina*, come ben a ragione credette Williston, oppure meglio al genere *Baumhaueria* col quale ha ancora comune i peli ai lati della faccia. Da quest'ultimo genere differisce poi specialmente per la grandezza relativa degli occhi che discendono molto in basso in *Acroglossa* e sono invece assai piccoli in *Baumhaueria;* e per questo stesso carattere dovrebbe forse la specie *Baumhaueria discrepans* van der Wulp (6), II, p. 115, 1, tab. III, fig. 17, essere compresa nel genere *Acroglossa*, se essa non differisse però per le nervature delle ali come si può vedere dalla figura. Il genere *Distichona* van der Wulp (6), II, p. 44, differisce per aver la faccia verticale molto larga, il fronte più largo, le vibrisse un po' distanti dal margine boccale, le guancie larghe, le antenne più corte e i lati della faccia pelosi. Inoltre, se la figura del capo di profilo è esatta, le antenne sono inserite quasi al di sotto del mezzo degli occhi, mentre in *Acroglossa* sono visibilmente al di sopra.

55. — *Acroglossa tessellata.*

Acroglossa tessellata Giglio-Tos (13), p. 5.

Femmina. — *Faccia* dorata, obliquamente ritratta, coll'epistomio leggermente sporgente; creste laterali assai pronunziate e munite di una serie regolare di setole ricurve in basso che si estende fin quasi presso alla base del terzo articolo delle antenne; lati della faccia sparsi di peli neri; le guancie alte appena un quarto dell'altezza degli occhi; vibrisse inserite un po' al di sopra dell'epistomio, lunghe e incrociate. — *Proboscide* nera, lunga quanto è alta la faccia, colle labbra sottili; *palpi* gialli appena un po' più ingrossati all'apice. — *Fronte* larga assai sporgente, giallo-dorata, colla striscia mediana nera; ai lati di questa una serie regolare di setole che scendono ai lati fin sotto all'apice del secondo articolo delle antenne; due setole orbitali ricurve in basso: e due altre ricurve all'indietro; due ocellari ricurve in avanti e divergenti. — *Occhi* assai grandi, nudi, discendenti fino all'apice delle antenne. — *Antenne* nere, lunghe, che si portano fin presso alle vibrisse; il primo articolo cortissimo, il secondo un po' più lungo, il terzo lineare, gialliccio alla base, quasi troncato all'apice, lungo almeno tre volte il secondo; stilo nero, robusto; il secondo assai lungo, il terzo lungo quanto il terzo articolo delle antenne, leggermente geniculato col secondo, ed ingrossato fin oltre la metà basale. — *Torace* densamente grigio-gialliccio-pollinoso specialmente in sul davanti ed ai lati; le quattro striscie

nere assai larghe e distinte; petto e pleure grigio-pollinosi. — *Scudetto* nero, grigio-pollinoso, testaceo al margine posteriore specialmente all'apice. — *Addome* ovato, un po' più largo del torace, nero, tutto densamente grigio-gialliccio-pollinoso, con riflessi neri irregolari ed indescrivibili; il quarto segmento tutto giallo quasi dorato; le setole sono solamente marginali fuorchè sul quarto segmento dove talune sono anche discali; esse sono due dorsali ed una laterale sui due primi segmenti, ed una serie di 6-8 sul terzo. — *Piedi* robusti, neri, setolosi; tutte le tibie, specialmente le posteriori ferruginose nel mezzo; uncini e pulvilli fulvi. — *Ali* un po' grigie; la cellula apicale aperta e terminata assai prima dell'apice; vena apicale trasversa leggermente concava alla base quindi diritta; la vena trasversa posteriore appena bisinuosa. — *Calittere* bianche. — *Bilancieri* bruni. — Lunghezza mm. 9.

Questa specie è simile a *Frontina acroglossoides* Tyler Townsend (**31**), Paper II, p. 367, la quale però differisce per avere sul torace tre strisce nere e sul secondo segmento dell'addome due setole discali oltre alle marginali, oltre ai caratteri propri del genere.

Una sola femmina.

Hab. — Oaxaca (Sumichrast).

XXIV. — Gen. **MYSTACOMYIA.**

Giglio-Tos (**13**), p. 4.

Capo quasi emisferico. — *Faccia* perpendicolare, non molto larga; i lati di essa privi di peli; *epistomio* e *fronte* non sporgenti. — *Antenne* inserite all'altezza del mezzo degli occhi, brevi che appena giungono al mezzo della faccia, verticali; il terzo articolo stretto, lineare, arrotondato all'apice, appena doppio del secondo in lunghezza; stilo lungo, nudo. — *Vibrisse* orali distinte, a notevole distanza dalla bocca, più avvicinate all'apice delle antenne che ad essa. — Margini laterali della bocca muniti di una serie di fitti peli corti neri che prolungandosi sulle creste laterali della faccia oltrepassano appena le vibrisse. — *Occhi* irti di fitti peli; così grandi che si estendono per quasi tutta l'altezza del capo, oltrepassando in basso le vibrisse e rimanendo separati dal margine laterale della bocca da un breve tratto di guancie. — *Palpi* filiformi. — *Fronte* stretta, con una sola serie di setole non lunghe nè robuste ai lati della striscia mediana. — *Occipite* piatto. — *Scudetto* assai grande con setole lunghe al margine. — *Addome* ovale, tozzo; il primo segmento grande come gli altri; mancano affatto le setole dorsali e quelle laterali sono così disposte: una piccola sul primo ed una più lunga sul secondo; due o tre sul terzo, e una serie al margine posteriore del quarto, all'apice dell'addome frammiste con peli quasi altrettanto lunghi. — *Piedi* un po' robusti; tibie posteriori cigliate dal lato esterno. — *Ali* colla cellula marginale largamente aperta prima dell'apice; vena trasversa apicale un poco concava; piccola vena trasversale obliqua; la vena trasversa posteriore leggermente bisinuata; il margine anteriore cigliato all'ima base.

Questi caratteri generici si convengono al maschio; quelli della femmina sono finora sconosciuti.

La specie tipica è la seguente:

56. — *Mystacomyia rubriventris.*

Mystacella rubriventris VAN DER WULP (**6**), II, p. 52, 1.
Mystacomyia rubriventris GIGLIO-TOS (**13**), p. 4.

Maschio. — *Faccia* bianca con riflessi cinerei. — *Palpi* gialli, *proboscide* nera. — *Fronte* molto stretta in alto; la striscia frontale nera. — *Occhi* irti di fitti e corti peli bianchicci. — *Antenne* nere; i primi due articoli gialli. — *Torace* bianco-gialliccio-pollinoso, con cinque striscie nere ben distinte di cui le tre mediane più sottili, quelle laterali più larghe e diffuse, un po' interrotte alla sutura; *petto* e *pleure* gialliccio-pollinosi. — *Scudetto* assai grande, testaceo; alcune setole lunghe al margine. — *Addome* ovato, testaceo, argenteo-pollinoso su tutti i segmenti, nero nel mezzo del primo segmento sotto allo scudetto e lungo una striscia mediana dorsale; abbreviata all'apice del terzo segmento; molti peli corti, neri, procumbenti, lo ricoprono e si fanno più lunghi sul quarto segmento formando all'apice dell'addome un ciuffo; le setole disposte come è detto nella diagnosi generica. — *Piedi* neri pelosi e setolosi; le tibie posteriori un po' ferruginoso-scure nel mezzo e cigliate; uncini lunghi, neri; pulvilli lunghi e grigi. — *Ali* limpide, gialliccie alla base e lungo il margine anteriore. — *Calittere* bianche. — Lunghezza mm. 10.

Un solo maschio.

HAB. — Messico: Atoyac in Vera Cruz, Tuxpango (**6**), Mexico (BOUCARD).

XXV. — Gen. EXORISTA.

MEIGEN (**17**), II, p. 280, 108.

57. — *Exorista rufilatera.*

Exorista rufilatera RONDANI (**24**), p. 9 e 10.
Masipoda geminata BRAUER e BERGENSTAMM (**7**), I, p. 162; II, p. 402 e 430. — TYLER TOWNSEND (**32**), p. 17.
Exorista latimana VAN DER WULP (**6**), II, p. 67, 12, tab. III, fig. 10.

I nove esemplari della collezione BELLARDI sono tutti maschi, epperò non ho potuto notare il peculiare carattere della grande dilatazione dell'ultimo articolo dei tarsi che è esclusivo della femmina. Ma dalla disposizione delle setole frontali nei maschi, tutte bene ordinate in una serie sola ai due lati della striscia mediana frontale, ho potuto riconoscere che senza dubbio appartengono alla specie *Exorista latimana* di VAN DER WULP, sinonima di *Masipoda geminata* BRAUER e BERGENSTAMM. Nella collezione di ditteri del Museo zoologico di Torino ho però trovato il tipo della specie descritto da RONDANI col nome di *Exorista rufilatera* nel 1850 e porta ancora l'etichetta con tale indicazione scritta dal Rondani stesso. Anche questo esemplare è un maschio e posto a confronto cogli altri maschi della collezione Bellardi non ne

differisce e senza alcun dubbio appartengono tutti alla stessa specie. Il nome dato dal Rondani ha perciò la priorità e l'ho dunque sostituito agli altri due.

Le variazioni principali che si notano negli esemplari suddetti e che hanno poca importanza si riferiscono essenzialmente allo scudetto che in taluni è tutto nero coll'apice grigio, in altri è più o meno rossiccio verso l'apice ed in altri poi, come nell'esemplare tipico, è tutto rossiccio, esclusa la base che è nera. Anche il colore rossiccio ai lati dell'addome è più o meno diffuso ed in qualche esemplare il secondo segmento porta anche due setole marginali sul dorso, che mancano negli altri e nel tipo.

Hab. — Venezuela (24) — Brasile (32) — Messico: La Venta, Tierra Colorada, Amula, Xucumanatlan e Sierra de las Aguas Escondidas in Guerrero, Atoyac e Medellin in Vera Cruz, Teapa in Tabasco (6), Orizaba (6, 7), Orizaba e Tuxpango (Sumichrast).

58. — *Exorista trivittata.*

Exorista trivittata van der Wulp (6), II, p. 70, 17.

Maschio. — Nero, grigio-pollinoso. — *Faccia* un po' obliquamente ritratta, giallo-pollinosa con qualche riflesso bruno; guancie nericcie e pelose ai lati della bocca. — *Fronte* giallo-pollinosa; la striscia mediana stretta e nera; una serie di setole per parte che discendono fino all'apice del secondo segmento delle antenne. — *Antenne, palpi* e *proboscide* neri. — *Occhi* pelosi. — *Torace* grigio-gialliccio pollinoso; tre striscie longitudinali nere molto larghe e ben distinte; ai lati di quella mediana un'altra striscia più sottile presso al margine anteriore; petto e pleure neri, gialliccio-pollinosi. — *Scudetto* nero, grigio-pollinoso, un po' fulviccio all'apice. — *Addome* sub-conico, nero, lucente, peloso; la pollinosità bianca forma delle larghe fascie su tutti i segmenti (fuorchè il primo), interrotte nel mezzo e ben più distinte alla base di essi; una fascia un po' meno larga al margine posteriore dei medesimi segmenti è nera, perchè priva di pollinosità; le setole solamente marginali così disposte: una per lato sul primo segmento; due dorsali ed una o due laterali sul secondo; una serie sul terzo e quarto, quelle di quest'ultimo frammiste coi lunghi peli anali. — *Ventre* nero; la fascia bianca basale dei segmenti assai più stretta. — *Piedi* neri; una serie di setole anteriore ed un'altra posteriore sui femori anteriori; alcune assai lunghe sparse sul margine interno dei femori posteriori; due setole assai lunghe esternamente sulle tibie mediane; le posteriori un po' cigliate e con due setole più lunghe verso il mezzo ed altre due all'apice, appaiate; l'ultimo articolo dei tarsi con lunghi peli; uncini lunghi neri; pulvilli lunghi, fulvi. — *Ali* limpide, un po' bruniccie lungo la costa ed alla base. — *Calittere* bianche. — Lunghezza mm. 10.

Non rimangono in collezione che due maschi di cui uno mancante dell'addome.

Hab. — Messico: Atoyac in Vera Cruz, Teapa in Tabasco (6), Orizaba (Sumichrast).

XXVI. — Gen. **TRICHOLYGA.**

RONDANI (**26**), III, p. 184, gen. 89.

59. — ***Tricholyga gracilens.***

(Fig. 16, capo).

Tricholyga gracilens GIGLIO-TOS (**13**), p. 5.

Maschio. — *Capo* più largo del torace. — *Faccia* bianca obliquamente ritratta; epistomio non sporgente; vibrisse inserite al margine orale, lunghe, incrociate; immediatamente sopra ad esse due setole più piccole; il resto delle creste facciali nudo; guancie molto strette nude. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli sporgenti dall'epistomio. — *Fronte* largo, appena più stretto in alto, bianco con riflessi brunicci; striscia frontale larga, nera; ai lati di questa una serie di setole robuste di cui una a mezzo il fronte ricurva all'indietro e più lunga, le altre convergenti e discendenti fin oltre la base dello stilo delle antenne. — *Occipite* piatto. — *Occhi* grandi, irti di peli lunghi, giallicci. — *Antenne* lunghe come la faccia, nere, inserite quasi contro al mezzo degli occhi; il secondo articolo talora fulvo-bruno; terzo, stretto alla base, appena più dilatato all'apice; stilo lungo, ingrossato alla base, nudo. — *Torace* nero, cosparso di pollinosità cenerino-glauca; quattro striscie nere anteriormente poco distinte. — *Scudetto* grande, del color del torace, anche pollinoso. — *Addome* conico, nero lucente, con fascie di pollinosità glauco-cenerina alla base dei segmenti escluso il primo; setole robuste, nere, solo marginali fuorchè sul quarto segmento; le due setole marginali mediane del terzo segmento un po' lontane dal margine. — *Piedi* neri molto setolosi; pulvilli brunicci, mediocri; femori anteriori cenerini al di sotto. — *Ali* grigie; la quarta e quinta vena longitudinale appendiculate all'apice; cellula apicale aperta prima dell'apice dell'ala; vena trasversa apicale quasi diritta; vena trasversa posteriore molto obliqua e curva prima di congiungersi alla quarta longitudinale; 1ª e 3ª vena longitudinale, cigliate visibilmente per tutta la loro lunghezza; la 5ª cigliata solo nella metà basale. — *Calittere* bianche. — *Bilancieri* giallicci. — Lunghezza mm. 10.

Due sole femmine senza indicazione di località messicana (BOUCARD).

60. — ***Tricholyga insita.***

Tricholyga insita GIGLIO-TOS (**13**), p. 5.

Maschio. — *Faccia* cenerino-gialliccia, obliquamente ritratta; epistomio appena sporgente; vibrisse inserite al margine orale lunghe, incrociate; sopra ad esse due altre setole lunghe quanto esse e quindi alcune altre più brevi sulle creste facciali fin circa al mezzo della faccia; guancie mediocri munite in basso di alcuni piccoli peli. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli. — *Fronte* cenerina a riflessi neri ai lati, assai più stretta degli occhi al vertice; striscia mediana nera; serie delle setole frontali

discendenti fino alla base del terzo articolo delle antenne. — *Occhi* irti di lunghi peli fulvicci. — *Antenne* nere, un po' meno lunghe della faccia; articolo 2° con una setola al margine superiore; articolo 3° largo, triplo del secondo, arrotondato all'apice e un po' convesso al margine superiore, fulvo alla base; stilo nudo. — *Torace, scudetto* e *addome* neri alquanto lucenti, cenerino-pollinosi, specialmente il torace sulle pleure e l'addome alla base dei segmenti, escluso il primo; due setole discali sul secondo e terzo segmento dell'addome oltre le marginali. — *Piedi* neri, setolosi; uncini lunghi; pulvilli lunghi e fulvi; femori cenerini al di sotto. — *Ali* grigie; vena trasversa apicale concava alla base quindi molto obliqua; vena trasversa posteriore molto obliqua; piccola vena trasversa un po' prima della metà della cellula discale. — *Calittere* grigie. — *Bilancieri* bruni. — Lunghezza mm. 7.

Un solo maschio senza indicazione di località messicana (Boucard).

XXVII. — Gen. **CYRTOPHLOEBA.**

Rondani (**26**), III, p. 187, gen. 30.

61. — *Cyrtophloeba horrida.*

(Fig. 11, capo, 11*a*, ala).

Cyrtophloeba horrida Giglio-Tos (**13**), p. 6.

Maschio. — *Faccia* bianca con riflessi nericci, molto obliquamente ritratta; guancie strette nude, epistomio non sporgente; vibrisse al margine orale, lunghe, incrociate; sopra alle vibrisse due o tre setole sulle creste facciali; sui lati della faccia una serie di quattro lunghe setole robuste, ricurve in basso. — *Proboscide* nera; *palpi* fulvi. — *Fronte* larga più degli occhi anche al vertice, nericcia ai lati; striscia mediana picea; setole frontali lunghe discendenti fin sotto alla base delle antenne, dove comincia la serie delle setole facciali. — *Occhi* irti di lunghi peli fulvi. — *Antenne* nere, lunghe un po' meno della faccia; articolo secondo un po' lungo, superiormente fulvo e con due setole; terzo largo, doppio del secondo, arrotondato all'apice, convesso al margine superiore; stilo mediocre, nudo, nero, ingrossato fin oltre la metà. — *Torace, scudetto* e *addome* neri, alquanto lucenti; dorso del torace leggermente cenerino-pollinoso con quattro striscie abbastanza distinte; una fascia bianca stretta alla base dei segmenti addominali, escluso il primo; setole solamente marginali, fuorchè sul quarto segmento; le due mediane del secondo e del terzo sono però alquanto allontanate dal margine; addome conico. — *Piedi* neri; pulvilli fulvi. — *Ali* grigie, nericcie lungo la costa e alla base; vene trasverse offuscate di nericcio; piccola vena trasversa al di là del mezzo della cellula discale; cellula apicale aperta assai prima dell'apice dell'ala; vena trasversa apicale concava alla base quindi obliqua; vena trasversa posteriore convessa e posta a mezza distanza tra la piccola vena trasversa e la vena trasversa apicale; prima vena longitudinale interamente cigliata; la terza cigliata fin oltre la piccola vena trasversa. — *Calittere* bruniccie. — Lunghezza mm. 8.

Un solo esemplare senza indicazione di località messicana (Sumichrast).

XXVIII. — Gen. PHOROCERA.

ROBINEAU-DESVOIDY (21), p. 131, XVI.

62. — *Phorocera parvula.*

Phorocera parvula VAN DER WULP (6), II, p. 78, 4.

Femmina. — Nera lucente; i lati della faccia e del fronte sono fulvi; la base dei segmenti dell'addome bianco-pollinosi; le calittere bianche, le ali ialine. — Lunghezza mm. 6.

Quattro esemplari tutti femmine che si accordano bene colla descrizione del VAN DER WULP.

HAB. — Messico: Orizaba (6). — Vennero raccolti da BOUCARD, ma non è indicato in quale località del Messico.

63. — *Phorocera atriceps.*

Phorocera atriceps VAN DER WULP (6), II, p. 79, 5.

Femmina. — Nera opaca, e pelosa; i lati della faccia e del fronte neri; l'addome un po' rossiccio ai lati del terzo e quarto segmento; ali ialine; calittere bianchiccie. — Lunghezza mm. 6.

Quattro esemplari femmine, che bene si accordano colla descrizione del VAN DER WULP.

HAB. — Messico: Orizaba, Venta de Zopilote e Amula in Guerrero (6). — Gli esemplari della collezione furono raccolti da BOUCARD, ma non è indicata la località del Messico.

XXIX. — Gen. PLAGIA.

MEIGEN (18), VII, p. 201, 6.

64. — *Plagia americana.*

Plagia americana VAN DER WULP (6), II, p. 102, 2, tab. III, fig. 19.

Due esemplari femmine, di cui uno corrisponde bene alla descrizione del VAN DER WULP, l'altro differisce per avere la terza vena longitudinale spinosa molto al di là della piccola vena trasversale. Tutti e due hanno una piccola appendice all'angolo della quarta vena longitudinale che nella figura del VAN DER WULP non è indicata.

HAB. — Messico: Orizaba, Venta de Zopilote, Xucumanatlan ed Omilteme in Guerrero, Teapa in Tabasco (6). — Raccolti da BOUCARD senza indicazione di località.

65. — *Plagia mexicana.*

(Fig. 13, capo).

Plagia mexicana Giglio-Tos (**13**), p. 5.

Femmina. — Nera, cinereo-pollinosa. — *Faccia* e *fronte* gialle; la striscia frontale bruna; vibrisse lunghe ed incrociate; due o tre piccole setole sopra di esse; le setole frontali oltrepassanti la base del terzo articolo delle antenne; la setola terminale ricurva in basso; le due setole di questa serie nella parte più alta del fronte ricurve all'indietro; tre setole orbitali ricurve in basso. — *Proboscide* nera e corta; *palpi* bruno-fulvi. — *Occhi* nudi, grandi. — *Antenne* nere; primi articoli brevissimi; il terzo almeno triplo del secondo, raggiungente quasi il margine orale. — *Torace* trapezoidale, assai più largo in avanti, grigio-pollinoso, colle striscie nere confuse; stilo nero, ingrossato fino alla sua metà. — *Scudetto* nero, grigio-pollinoso. — *Addome* stretto, conico, nero-lucente; il secondo e terzo segmento con una fascia cinereo-pollinosa, visibile specialmente alla base; sul secondo segmento due setole dorsali ed una laterale marginali; sul terzo due dorsali lontane dal margine e due o tre laterali veramente marginali; sul quarto alcune discali. — *Piedi* neri, pelosi e setolosi; uncini e pulvilli minuti. — *Ali* quasi limpide; la prima vena longitudinale spinosa per tutta la sua lunghezza; la terza fino molto al di là della piccola vena trasversa; la vena trasversa apicale, appena concava all'ima base, poi leggermente ondulata ed obliqua; una piccola appendice al gomito della quarta vena longitudinale. — *Calittere* bianche. — Lunghezza mm. 8.

Ne osservai una sola femmina, molto simile a *P. americana*, ma che mi parve dover distinguere per la colorazione gialla della faccia, la maggior lunghezza del terzo articolo delle antenne e la forma trapezoidale del torace. Per gli stessi caratteri differisce anche da *P. aurifrons* Tyler Townsend (**31**), Paper V.

Hab. — Non è indicata la località del Messico, in cui fu raccolta da Boucard.

66. — *Plagia dicta.*

Plagia dicta Giglio-Tos (**13**), p. 5.

Femmina. — *Faccia* cenerina obliquamente ritratta; epistomio appena sporgente; guancie strette nude; vibrisse al margine orale; tre o quattro setole sopra le vibrisse; il resto delle creste facciali nudo. — *Proboscide* nera coll'apice fulvo; *palpi* fulvi. — *Occhi* irti di brevissimi peli. — *Fronte* in avanti alquanto sporgente, larga meno degli occhi, cenerina ai lati, nera sulla striscia mediana; una serie di setole ad ogni lato discendente fino alla base delle antenne; due setole orbitali. — *Antenne* nere, lunghe quanto la faccia; secondo articolo con setole al margine superiore; terzo articolo largo, lineare, quintuplo del secondo; stilo nudo. — *Torace* e *scudetto* neri, cenerino-pollinosi, specialmente sulle pleure; sul dorso del torace quattro striscie appena distinte. — *Addome* conico, nero, lucente; una fascia stretta bianca alla base dei segmenti; due setole marginali dorsali sul primo segmento; due discali e due mar-

ginali sul secondo; due discali e una serie di marginali sul terzo; alcune discali sul quarto. — *Piedi* neri; femori cenerini inferiormente; pulvilli giallicci. — *Ali* grigie; vena trasversa apicale concava alla base quindi molto obliqua; vena traversa posteriore bisinuosa. — *Calittere* grandi, bianchiccie. — *Bilancieri* giallicci. — Lungh. mm. 7.

Una sola femmina senza indicazione di località messicana.

XXX. — Gen. **METOPIA.**

Meigen (17), II, p. 280.

67. — *Metopia perpendicularis.*

Metopia perpendicularis van der Wulp (6), II, p. 115, 1, tab. III, fig. 18, 18*a*.

Un solo esemplare femmina che differisce da quelli descritti da van der Wulp specialmente per la forma della vena posteriore trasversale che è diritta all'ima base, quindi concava e poi un po' obliqua; la vena trasversa apicale è leggermente ondulata. L'addome nero, un po' lucente, appare, visto dal di dietro, munito di macchie bianchiccio-pollinose sui tre ultimi segmenti separate da una linea mediana longitudinale e da due laterali.

Hab. — Messico: Amula in Guerrero, Cuernavaca in Morelos (6), Solco (Sumichrast).

XXXI. — Gen. **MASICERA.**

Macquart (15), II, p. 118.

68. — *Masicera bilineata.*

Masicera bilineata van der Wulp (6), II, p. 112, 17.

Un solo esemplare femmina (raccolto da Boucard senza indicazione di località) che differisce solamente da quello descritto da van der Wulp, perchè il primo segmento dell'addome non è apparentemente più breve del secondo.

Hab. — Messico: Temax in North Yucatan (6).

69. — *Masicera sesquiplex.*

Masicera sesquiplex Giglio-Tos (13), p. 6.

Femmina. — *Faccia* gialla, bianchiccia nella depressione mediana, quasi perpendicolare; vibrisse al margine orale; due o tre peli al di sopra di esse immediatamente; il resto delle creste facciali nudo; guancie un po' pelose ai lati della bocca, molto strette. — *Proboscide* nera e corta; *palpi* gialli. — *Fronte* un po' più stretta

in alto e quivi larga quanto gli occhi, gialla; la striscia mediana nera, larga quanto i lati; per ogni parte di essa una serie di setole, di cui le tre più basse scendono al di sotto della base delle antenne; e le tre più alte sono ricurve all'indietro; due setole orbitali ricurve in basso. — *Occhi* grandi, oltrepassanti l'apice delle antenne e raggiungenti il livello delle vibrisse, nudi. — *Antenne* nere un po' più corte della faccia; il primo articolo brevissimo, il secondo assai lungo, il terzo una volta e mezzo lungo quanto il secondo o poco più; stilo lungo un po' più delle antenne, ingrossato nel terzo basale, quindi sottile. — *Torace* densamente grigio-gialliccio-pollinoso; anteriormente più largo, quattro striscie nere ben distinte in avanti; le laterali più larghe si confondono posteriormente colle mediane; petto e pleure gialliccio-pollinosi. — *Scudetto* nero alla base, gradatamente testaceo rossiccio verso l'estremità, anch'esso pollinoso. — *Addome* ovato, tutto gialliccio-pollinoso, fuorchè il primo segmento, una sottile striscia mediana sul secondo e terzo segmento e due altre laterali poco distinte ed i margini posteriori che sono neri; il quarto segmento affatto giallo-dorato per la densa pollinosità che lo ricopre; sul primo e secondo segmento due setole dorsali ed una laterale, marginali; quelle dorsali del primo deboli; sul terzo una serie di setole robuste; sul quarto alcune discali. — *Ventre* grigio-pollinoso. — *Piedi* neri; le tibie posteriori brevemente cigliate all'esterno, e come le altre anche munite di alcune setole; uncini e pulvilli piccoli; pulvilli un po' giallicci. — *Ali* limpide; la piccola vena trasversa un po' prima del mezzo della discale; la vena trasversa posteriore dritta alla base, poi obliqua; la vena trasversa apicale obliqua, appena concava alla base. — *Calittere* bianche; *bilancieri* bruni. — Lunghezza mm. 8.

Questa specie è molto simile a *M. auriceps* Macquart (**16**), II, 3e part., p. 59, 1, per la colorazione del capo, del torace e dell'addome, ma la ritengo ben distinta per la mancanza di setole sulle creste facciali.

Una sola femmina.

Hab. — Senza indicazione della località messicana (Boucard).

70. — *Masicera usta.*

Masicera usta Giglio-Tos (**13**), p. 6.

Femmina. — *Faccia* giallo-dorata, un po' obliquamente ritratta; creste facciali nude; guancie pelose ai lati della bocca; *proboscide* nera; *palpi* gialli. — *Fronte* dorata; le setole come in *M. sesquiplex*; la striscia nera più stretta dei lati. — *Antenne* lunghe circa quanto la faccia e nere; il terzo articolo lineare, triplo del secondo, arrotondato all'apice; stilo nero, ingrossato alla base per un certo tratto e leggermente pubescente, lungo e sottile nel resto. — *Torace* dorato; le due striscie mediane sottili ma ben distinte; le laterali più larghe ma interrotte alla sutura; pleure aureo-pollinose. — *Addome* ovato sub-conico, nero; sul secondo, terzo e quarto segmento una fascia dorata alla base, più visibile lungo le incisioni; quella del quarto segmento larga quanto la metà della lunghezza e più intensa; le setole solamente marginali fuorchè sul quarto segmento; due dorsali ed una laterale sul primo e secondo segmento, una serie sul terzo. — *Ventre* con fascie aureo-pollinose come il

dorso dell'addome. — *Piedi* neri, pelosi e setolosi; uncini e pulvilli piccoli; pulvilli fulvi. — *Ali* limpide largamente alla base, al margine posteriore ed all'apice; offuscate intensamente nella regione mediana anteriore; la cellula apicale aperta un po' prima dell'apice dell'ala; la vena trasversa apicale fa colla quarta longitudinale un angolo molto ottuso ed è appena leggermente piegata vicino all'apice; la vena trasversale posteriore fortemente bisinuosa; la piccola vena trasversale corrisponde al mezzo della cellula discale. — *Calittere* bianchiccie, a margine gialliccio. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 7.

Questa specie sebbene molto affine a *M. picta* VAN DER WULP (**6**), II, p. 108, tab. III, fig. 13, 13*a*, ne è però distinta specialmente per i disegni del torace e le nervature delle ali.

HAB. — Messico (BOUCARD).

71. — *Masicera vittata.*

Tachina vittata WALKER (**38**), p. 301 (nec ibidem, p. 273). — TYLER TOWNSEND (**32**), p. 15.

WALKER non descrisse che il maschio di questa specie; io descrivo la femmina aggiungendovi quei caratteri che sono oggidì necessari per una buona descrizione.

Femmina. — *Faccia* gialliccia e fronte gialla; creste facciali nude; guancie strettissime; *proboscide* nera e *palpi* fulvo-bruni; la striscia frontale nera più larga dei lati; le setole disposte come in *M. glauca.* — *Antenne* nere; il terzo articolo triplo del secondo, raggiungente quasi l'epistomio, lineare, arrotondato all'apice; stilo nero, lungo, ingrossato alla base e appena pubescente. — *Occhi* grandi, che raggiungono quasi le vibrisse. — *Torace* giallo-pollinoso, così il petto e le pleure; sul dorso quattro striscie larghe, nere, ben distinte. — *Scudetto* nero, gialliccio-pollinoso nella metà apicale. — *Addome* ovato, nero-opaco; sui segmenti secondo, terzo e quarto una stretta fascia dorato-pollinosa alla base, appena interrotta nel mezzo, ed un po' dilatata ai lati; oltre alle solite setole marginali due discali sul dorso del secondo e terzo segmento, un po' più deboli. — *Piedi* neri, alquanto lunghi; i tarsi un po' più lunghi delle tibie; pulvilli bruno-fulvi. — *Ali* affumicate, fuorchè lungo il margine posteriore ed all'apice; cellula apicale aperta presso l'apice; vena apicale facente un angolo ottuso colla quarta longitudinale, obliqua, ed appena piegata presso l'apice; piccola vena trasversa posta al mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore bisinuosa. — *Calittere* gialliccie. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 7.

Due femmine.

HAB. — Sud-America (**38**) — Senza indicazione della località messicana (BOUCARD).

72. — *Masicera strigata.*

Masicera strigata VAN DER WULP (**6**), II, p. 105, 2.

Una sola femmina che differisce dal tipo descritto per avere le ali ialine.

HAB. — Messico: Venta de Zopilote in Guerrero, Cuernavaca in Morelos, Atoyac in Vera Cruz, Teapa in Tabasco (**6**) — Senza indicazione di località messicana (BOUCARD).

73. — *Masicera glauca.*

Masicera glauca Giglio-Tos (**13**), p. 6.

Femmina. — *Faccia* bianchiccia nella depressione mediana, gialliccia ai lati che sono molto stretti e nudi; guancie strettissime; vibrisse inserite proprio al margine orale ed incrociate; *proboscide* e *palpi* gialli. — *Fronte* quasi non sporgente, un po' più stretta in alto, gialla; la striscia nera, larga al vertice un po' più delle parti laterali; ai lati di questa una serie di setole convergenti, di cui le due inferiori poste al di sotto della base delle antenne e raggiungenti quasi l'apice del secondo articolo e le due ultime superiori ricurve all'indietro; due setole orbitali ricurve in basso; due ocellari ricurve in basso e divergenti. — *Antenne* nere; il secondo articolo peloso, al di sopra breve; il terzo lineare, stretto, un po' incavato al margine superiore presso la base, arrotondato all'apice, lungo almeno quattro volte il secondo e raggiungente quasi l'epistomio; stilo nero, lungo, sottile, ingrossato per un breve tratto alla base. — *Occhi* nudi, così grandi che raggiungono le vibrisse. — *Torace*, *scudetto* e *addome* tutti di color nero-pruna, coperti di una fine pollinosità cinereo-glauca; così anche le pleure ed il petto. — *Scudetto* munito ai lati di due lunghe setole e di altre due più lunghe all'apice che giungono fino a metà del terzo segmento addominale; e nel mezzo di due setole più piccole. — *Addome* ovato, rigonfio; il primo segmento manca di pollinosità, è lungo quanto il secondo ed ha una sola setola marginale ad ogni lato (quelle dorsali sono così sottili che non si distinguono dagli altri peli); sugli altri segmenti è più visibile alla base ed ai lati, variando però secondo l'incidenza della luce; il secondo segmento ha solo setole marginali, due dorsali ed una per lato; il terzo ed il quarto ne hanno anche due dorsali discali oltre alla solita serie marginale. — *Ventre* convesso, colorato come l'addome. — *Piedi* picei, pelosi e setolosi; i femori anteriori grigio-pollinosi; uncini e pulvilli piccoli; pulvilli gialli. — *Ali* un po' grigie; cellula apicale aperta presso all'apice dell'ala; piccola vena trasversale prima del mezzo della cellula discale: vena trasversa posteriore appena concava alla base, quindi alquanto obbliqua. — *Calittere* grigie. — Lunghezza mm. 8.

Una sola femmina.

Hab. — Senza indicazione della località messicana (Boucard).

XXXII. — Gen. DEGEERIA.

Meigen (**18**), VII, p. 249, 37.

74. — *Degeeria mexicana.*

Degeeria mexicana Giglio-Tos (**13**), p. 7.

Maschio. — *Corpo* snello, nero, un po' lucente, peloso. — *Faccia* grigia con riflessi neri, assai obliquamente ritratta; guancie strette, pelose in basso ai lati della

bocca; margini orali muniti di lunghi peli setolosi; vibrisse al margine orale, incrociate; al di sopra di esse alcune piccole setole sulle creste facciali, che si estendono appena per un terzo dell'altezza della faccia; lati della faccia nudi. — *Proboscide* nera; *palpi* filiformi neri e pelosi. — *Fronte* molto stretta in alto, bianchiccia; la striscia mediana nera, più stretta in alto, ma al vertice occupante quasi tutta la larghezza; ai lati di questa una serie sola di setole convergenti, di cui tre o quattro superiori ricurve all'indietro, e le cinque inferiori al di sotto della base delle antenne si estendono fino oltre l'apice del secondo segmento delle antenne; due setole brevi ocellari. — *Occhi* grandi, nudi. — *Antenne* lunghe, raggiungenti quasi l'epistomio, nere; il secondo articolo un po' peloso superiormente; il terzo triplo del secondo, lineare; stilo lungo, sottile, ingrossato per un breve tratto alla base. — *Torace* nero, alquanto lucente, peloso, appena con qualche leggero riflesso bianco agli angoli anteriori e sulle pleure, se osservato molto obliquamente. — *Scudetto* grande, triangolare, nero lucente, con due lunghe setole divergenti all'apice. — *Addome* conico, nero lucente, sparso di peli eretti, fra cui sono frammiste le setole; le incisioni con riflessi bianchi, se osservate molto obliquamente; sul primo segmento, lungo quanto il secondo, due setole dorsali ed una per parte tutte marginali; sul secondo, e sul terzo e sul quarto oltre alle marginali anche due discali dorsali. — *Piedi* alquanto lunghi, neri; i femori anteriori con una serie posteriore ed un'altra anteriore di setole; gli altri irregolarmente setolosi; tarsi un po' più lunghi delle tibie; uncini e pulvilli mediocremente lunghi; pulvilli gialli. — *Ali* offuscate di bruno lungo il margine anteriore e gradatamente più limpide verso il margine posteriore e l'apice che sono ialini; cellula apicale aperta presso all'apice dell'ala; vena trasversa apicale che fa colla quarta longitudinale un angolo molto ottuso (nella maggior parte degli esemplari non forma un vero angolo ma una curvatura); piccola vena trasversa pressochè nel mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore fortemente bisinuosa. — *Calittere* brune come la parte offuscata delle ali. — Lunghezza mm. 7-8.

Questa specie che a quanto pare è comune nel Messico, è alquanto simile alla europea *D. separata* (*Tachina*) Meigen (18), IV, p. 406, 290, ed anche a *D. nigrocostalis* van der Wulp (6), II, p. 151, 1, tab. IV, fig. 10, dalla quale però differisce notevolmente per le vene alari.

Undici esemplari tutti maschi, di cui uno differisce per avere le ali quasi ialine ed i riflessi bianchi alle incisioni dell' addome un po' più distinti; ed un altro per avere i palpi e la proboscide all'apice bruno-fulvi.

Hab. — Orizaba (Sumichrast).

75. — *Degeeria anthracina.*

Degeeria anthracina Bigot (5), p. 259, 30.

Stante la breve descrizione del Bigot non posso assicurare che un esemplare maschio della collezione, che corrisponde bene ai caratteri accennati in essa, convenga anche coll'esemplare tipico per gli altri caratteri che non vi sono accennati. Credo perciò conveniente di ripetere la descrizione sull'esemplare da me esaminato.

Maschio? — Nero, lucente; *faccia* con qualche riflesso bianchiccio, molto inclinata all'indietro, colle creste facciali munite di piccole setole per quasi tutta la loro lunghezza; vibrisse inserite al margine orale; guancie strettissime. — *Proboscide* nera; *palpi* bruni. — *Fronte* larga al vertice circa un terzo del capo; striscia frontale nera, larga assai; una serie di setole ai lati di essa che discende fin presso all'apice del secondo segmento delle antenne. — *Antenne* lunghe quanto la faccia; il terzo articolo sei o sette volte lungo quanto il secondo. — *Torace* con qualche leggero riflesso bianchiccio agli angoli anteriori. — *Addome* conico, acuto; sul secondo segmento due setole discali oltre alle solite marginali. — *Ali* ialine; cellule apicali aperte presso all'apice; gomito della quarta vena longitudinale curvo; piccola vena trasversa prima del mezzo della cellula discale: vena trasversa posteriore perpendicolare sulla quarta longitudinale e diritta. — *Calittere* bianche. — Lungh. mm. 4.

Hab. — Messico (**5**) — Senza indicazione di località messicana (Boucard).

76. — *Degeeria insecta.*

Degeeria insecta Giglio-Tos (**13**), p. 7.

Femmina? — *Faccia* obbliquamente ritratta, cinerea; argentina se osservata dall'alto; vibrisse inserite un po' al di sopra del margine orale; alcune setole immediatamente sopra di essa sulla cresta facciale estese per un terzo dell'altezza della faccia; guancie un po' più larghe che nelle specie precedenti, pelose. — *Proboscide* nera, con labbra gialle; *palpi* gialli. — *Fronte* alquanto sporgente, assai larga, un po' più stretta in alto, colorata come la faccia; la striscia mediana nera, più stretta delle parti laterali; una sola serie di setole per parte convergenti, di cui le tre prime superiori ricurve all'indietro, le due ultime inferiori al di sotto della inserzione delle antenne; due setole ocellari. — *Occhi* nudi. — *Antenne* nere, lunghe assai meno della faccia; il secondo articolo con alcuni peli lunghi e rigidi al margine superiore; il terzo triplo almeno del secondo, stretto e lineare. — *Torace* col petto e le pleure, e *scudetto* uniformemente e densamente cinereo-pollinosi; sul dorso del torace nessun accenno di striscie nere. — *Addome* nero, coperto di peli lunghi neri; alla base del secondo e terzo segmento una fascia cinereo-pollinosa ben distinta, larga quanto la metà della lunghezza del segmento; sul quarto la fascia è visibile solo ai lati; le setole solamente marginali, fuorchè alcune discali sul quarto; due dorsali ed una per parte laterale sul primo o secondo segmento; una serie sul terzo. — *Piedi* neri; uncini e pulvilli piccoli; pulvilli fulvi. — *Ali* ialine; cellula apicale aperta presso l'apice dell'ala; piccola vena trasversa posta prima del mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore appena obliqua e quasi diritta, posta più vicina alla curvatura della quarta vena longitudinale, che alla piccola vena trasversa. — *Calittere* bianche. — Lunghezza mm. 8.

Un solo esemplare che credo femmina stante la piccolezza degli uncini e dei pulvilli e la larghezza del fronte.

Hab. — Senza indicazione di località messicana (Boucard).

77. — *Degeeria cruralis.*

Degeeria cruralis Giglio-Tos (**13**), p. 7.

Femmina. — *Faccia* molto obliquamente ritratta, grigio-bianchiccia; le vibrisse al margine boccale, incrociate; creste facciali ben spiccate, munite di setole fino a due terzi dell'altezza della faccia; guancie strette. — *Proboscide* e *palpi* gialli. — *Fronte* larga, grigio-bianchiccia; la striscia mediana, stretta più dei lati, nera; ai lati di essa una serie di setole che discende un po' al disotto della base delle antenne; due setole orbitali in alto del fronte ricurve in basso. — *Occhi* nudi. — *Antenne* nere, lunghe quanto la faccia; il terzo articolo stretto, lineare, quadruplo del secondo. — *Torace* e *scudetto* neri; anteriormente il dorso del torace bianchiccio-pollinoso con quattro striscie nere poco distinte; petto e pleure grigio-pollinosi. — *Addome* conico, nero, lucente; una stretta fascia bianco-pollinosa, alla base dei segmenti secondo, terzo e quarto; quella di quest'ultimo un po' più larga; in sul primo segmento due setole dorsali ed una laterale, solo marginali; sul secondo oltre a due dorsali e due laterali marginali anche due dorsali discali; sul terzo due dorsali discali oltre ad una serie di marginali; sul quarto molte discali. — *Ventre* nero lucente, colle fascie bianche alla base dei segmenti più larghe e più visibili. — *Piedi* neri; femori testacei; uncini e pulvilli piccoli; pulvilli fulvi. — *Ali* limpide, un poco grigie; cellula apicale aperta all'apice dell'ala; la nervatura della quarta vena longitudinale non angolosa; vena piccola trasversa appena un po' prima del mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore quasi diritta e perpendicolare alla quarta ed alquanto più vicina alla piegatura di questa che alla piccola vena trasversa. — *Calittere* bianchiccie. — *Bilancieri* giallicci. — Lunghezza mm. 6.

Una sola femmina.

Hab. — Senza indicazione di località messicana (Sumichrast).

78. — *Degeeria dicax.*

Degeeria dicax Giglio-Tos (**13**), p. 7.

Maschio. — *Faccia* obliquamente ritratta, bianco-gialliccia nella depressione mediana, giallo-dorata ai lati; vibrisse assai lunghe, incrociate, poste al margine boccale; al di sopra di esse alcune piccole setole sulle creste facciali che si estendono fin verso il mezzo della faccia. — *Proboscide* e *palpi* neri. — *Fronte* alquanto sporgente, giallo-dorata ai lati, assai più stretta in alto; la striscia frontale nera, larga al vertice assai più delle parti laterali; ai lati di essa una sola serie di setole convergenti, di cui le tre prime superiori curve all'indietro e le tre ultime inferiori poste al di sotto dell'inserzione delle antenne si estendono fino all'apice del loro secondo articolo. — *Occhi* nudi. — *Antenne* nere, lunghe quasi quanto la faccia; il terzo articolo lineare, quasi tronco all'apice, stretto e lungo tre volte il secondo; stilo lungo, sottile, nero, ingrossato per un breve tratto alla base. — *Torace*, petto e pleure neri, giallo-pollinosi; sul dorso quattro striscie nere ben distinte, di cui le

laterali più larghe assai. — *Scudetto* nero, grigio-gialliccio-pollinoso all'apice. — *Addome* conico, nero, sparso di rari e corti peli; sui segmenti secondo, terzo e quarto una lunga fascia basale, grigio-gialliccio-pollinosa, dilatata ai lati da occupare quasi tutta la lunghezza del segmento, ristretta nel mezzo, perchè incavata posteriormente; i lati del secondo segmento sono un po' testacei; setole numerose discali e marginali, così disposte: sul primo segmento due dorsali ed una laterale solo marginali; sul secondo quattro discali, due presso al margine anteriore e due nel mezzo appaiate, quindi due dorsali e tre per parte ai lati marginali; sul terzo le discali come nel secondo, ed inoltre una per parte verso i lati anche discale e la serie solita di marginali; sul quarto poi molte discali oltre alle marginali. — *Ventre* colorato come il dorso dell'addome. — *Piedi* neri; i tarsi anteriori un po' più lunghi delle tibie; pulvilli bruno-fulvi. — *Ali* un po' bruniccie dalla base lungo il margine anteriore e gradatamente ialine verso il margine posteriore e l'apice; cellula apicale aperta presso all'apice; curvatura della quarta vena longitudinale non angolosa; vena trasversa apicale obliqua, un po' ondulata, e presso all'apice piegata; piccola vena trasversa corrispondente pressochè al mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore fortemente bisinuosa. — *Calittere* bianco-gialliccie, con orlo gialliccio. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 8.

Un solo maschio.

Hab. — Senza indicazione di località messicana (Boucard).

XXXIII. — Gen. **MACQUARTIA.**

Robineau-Desvoidy (21), p. 204.

79. — ***Macquartia setiventris.***

Macquartia setiventris van der Wulp (6), II, p. 129, 1, tab. III, fig. 21, 21*a*.

Una sola femmina che differisce dal maschio per avere il fronte largo con due setole orbitali ricurve in basso oltre alla solita serie ai lati della striscia frontale.

Hab. — Messico: Orizaba, Omilteme in Guerrero (6), Solco.

XXXIV. — Gen. **MYIOBIA.**

Myobia Robineau-Desvoidy (21), p. 99.

80. — ***Myiobia flavicornis.***

Myobia flavicornis van der Wulp (6), II, p. 133, 1, tab. IV, fig. 1, 1*a*.

Un solo esemplare senza indicazione di località messicana, coll'apice delle antenne e le tibie bruniccie.

Hab. — Messico: Teapa in Tabasco (6).

XXXV. — Gen. **PROSPHERYSA.**

VAN DER WULP (6), II, p. 116.

81. — ***Prospherysa aemulans.***

Prospherysa aemulans VAN DER WULP (6), II, p. 117, 1, tab. III, fig. 14, 14*a*.
Dexiophana aemulans BRAUER e BERGENSTAMM (7), II, p. 374 e 421.

Un solo maschio (senza indicazione di località messicana) colla spina costale delle ali assai distinta e di statura maggiore (mm. 10). Nel resto corrisponde alla descrizione del tipo.

HAB. — Messico: Atoyac in Vera-Cruz, Teapa in Tabasco (6).

XXXVI. — Gen. **HYPOSTENA.**

MEIGEN (18), VII, p. 239, n° 29.

82. — ***Hypostena triangulifera.***

Homodexia triangulifera BIGOT (5), p. 268, 75.
Hypostena blandita VAN DER WULP (6), II, p. 142, 2, tab. IV, fig. 4, 4*a* e p. 264.

Tre maschi che convengono bene nei loro caratteri colla descrizione del VAN DER WULP, ma senza indicazione della località messicana in cui furono raccolti.

HAB. — Costa-Rica: Rio Sucio — Messico: Xucumanatlan, Omilteme e Sierra de las Aguas Escondidas in Guerrero, Orizaba (6).

83. — ***Hypostena concinna.***

Hypostena concinna VAN DER WULP (6), II, p. 142, 3.

Un solo esemplare maschio un po' guasto, ma tuttavia facilmente distinto dalla *H. triangulifera* per i caratteri accennati dal VAN DER WULP. Senza indicazione di località messicana.

HAB. — Messico: Amula e Xummanatlan in Guerrero (6).

XXXVII. — Gen. **ANISIA.**

VAN DER WULP (6), II, p. 186.

84. — ***Anisia nigella.***

Anisia nigella VAN DER WULP (6), II, p. 193, 14.

Una sola femmina mancante di riflessi bianchicci alla base dei segmenti, e senza indicazione di località messicana.

HAB. — Messico: Teapa in Tabasco (6).

85. — *Anisia opaca.*

Anisia opaca VAN DER WULP (6), II, p. 200, 31.

Un solo esemplare femmina.

HAB. — Messico: Sierra de las Aguas Escondidas e Omilteme in Guerrero (6), Coscom (SUMICHRAST).

XXXVIII. — Gen. PHASIOPTERYX.

BRAUER e BERGENSTAMM (7), I, p. 147.

86. — *Phasiopteryx ochracea.*

Pyrrhosia ochracea BIGOT (5), p. 268, 78.
Phasiopteryx Bilimekii BRAUER e BERGENSTAMM (7), I, p. 147.
Neoptera rufa VAN DER WULP (6), II, p. 166, 1, tab. IV, fig. 11, 11*a*, 11*b*, 11*c*, 12, 12*a* (vide etiam, p. 211).

Una sola femmina raccolta da BOUCARD, senza indicazione di località messicana, corrispondente alle descrizioni dei suddetti autori. Stando alla testimonianza del VAN DER WULP che potè osservare l'esemplare femminile tipico di *Pyrrhosia ochracea* mandatogli in esame da BIGOT, questa specie è la medesima che *Phasiopteryx Bilimekii* descritta nel 1889 da BRAUER e BERGENSTAMM e *Neoptera rufa* descritta dal VAN DER WULP nel 1890. Il nome specifico di BIGOT ha perciò la priorità perchè data dal 1888.

HAB. — Messico (5): Orizaba (7), Vera Cruz, Teapa in Tabasco (6).

XXXIX. — Gen. OESTROPHASIA.

BRAUER e BERGENSTAMM (7), I, p. 145.

87. — *Oestrophasia clausa.*

Oestrophasia clausa BRAUER e BERGENSTAMM (7), I, p. 146.

Una sola femmina, in cui la cellula apicale non è chiusa e brevemente peduncolata, ma appena aperta.

HAB. — Colorado (7) — Messico: Cuantla (SAUSSURE).

XL. — Gen. CLISTOMORPHA.

Tyler Townsend (**31**), Paper V.

88. — *Clistomorpha ochracea.*

Clistomorpha ochracea Giglio-Tos (**13**), p. 7.

Femmina. — *Faccia* alquanto concava di profilo; creste facciali poco accennate e nude; epistomio sporgente; una serie di setole al margine orale che ascendono per un certo tratto lungo le creste facciali e sono terminate dalle vibrisse incrociate, poste perciò a notevole distanza dal margine della bocca; guancie larghe, circa la metà dell'altezza degli occhi, sparse di piccoli peli neri. — *Proboscide* lunga circa quanto è alto il capo, bruna, all'apice gialla; *palpi* gialli, filiformi, ricurvi in alto. — *Fronte* gialla come la faccia, larga, assai più stretta in alto, larga al vertice circa un quarto della larghezza totale del capo; striscia frontale, fulva, di larghezza costante, larga al vertice il doppio delle parti laterali; al vertice una macchia ocellare nera, quasi triangolare; ai lati della striscia frontale una serie sola di piccole setole che discendono appena oltre la base delle antenne; ai lati di esse alcuni piccolissimi peli. — *Occhi* nudi. — *Antenne* brevi, gialle; il primo articolo brevissimo; il secondo un po' lungo, il terzo lungo una volta e mezzo il secondo, di forma ovale; stilo lungo, sottile, ingrossato alla base. — *Torace* giallo-ocraceo, olivaceo-pollinoso sul dorso con qualche piccola setola ai lati ed alcune più lunghe al margine posteriore. — *Scudetto* grande, sub-triangolare; una setola marginale per parte presso alla base e due accoppiate all'apice. — *Addome* ovale, sub-conico, fulvo-ocraceo; alcune setole ai lati di ogni segmento; quelle del secondo, terzo e quarto segmento poste in una piccola macchia tondeggiante nera. — *Piedi* gialli, con alcune deboli setole; le tibie posteriori brune alla base ed all'apice ed un po' curve; tutti i tarsi bruni specialmente all'apice; uncini neri; pulvilli gialli. — *Ali* gialliccie, un poco fosche al margine anteriore presso l'apice; cellula apicale chiusa all'apice e non pedicellata; gomito della quarta vena longitudinale curvo; vena trasversa apicale leggermente curva; piccola vena trasversale corrispondente al mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore un po' obliqua e quasi diritta. — *Calittere* e *bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 5.

Una sola femmina.

Hab. — Mexico (Sumichrast).

XLI. — Gen. RHINOPHORA.

Robineau-Desvoidy (**21**), p. 258.

89. — *Rhinophora laevigata.*

Rhinophora laevigata van der Wulp (**6**), II, p. 205, 1, tab. IV, fig. 17, 17 *a*.

Una sola femmina senza indicazione di località messicana corrispondente pei suoi caratteri alla descrizione del tipo.

Hab. — Messico: Atoyac in Vera Cruz (**6**).

XLII. — Gen. **MYIOTHYRIA.**

Myothyria VAN DER WULP (6), II, p. 208.

90. — *Myiothyria trichosoma.*

Myothyria trichosoma VAN DER WULP (6), II, p. 208, 1.

Riferisco con dubbio a questa specie un solo esemplare maschio senza indicazione di località messicana, un po' mal conservato, in cui i caratteri specifici non sono più ben visibili, ma con setole distinte discali sull'addome, oltre alle marginali.

HAB. — Messico: Atoyac in Vera Cruz (6) (BOUCARD).

DEXINAE

XLIII. — Gen. **HYSTRISIPHONA.**

Hystrisyphona BIGOT (1), p. 309.

91. — *Hystrisiphona nigra.*

Hystrisyphona niger BIGOT (1), p. 309.
Hystrisyphona nigra BIGOT, Bull. Soc. ent. fran., 1883, p. XLV.
Hystrisiphona nigra VAN DER WULP (6), II, p. 213.

Un solo esemplare maschio.

HAB. — Messico (1): Oaxaca (SALLÉ).

92. — *Hystrisiphona bicolor.*

(Fig. 17, capo).

Hystrisiphona bicolor GIGLIO-TOS (12), p. 1.

Maschio. — *Faccia* a profilo concavo, gialliccio-pollinosa con riflessi sericei; lati della faccia pelosi fino al livello del margine inferiore degli occhi; guancie alte circa quanto gli occhi, nude; vibrisse inserite un po' più in alto del margine orale, incrociate; al di sopra di esse una breve serie di 5 a 6 setole sulle creste facciali che ascendono fin presso il mezzo della faccia. — *Proboscide* nera, quasi lunga quanto il capo ed il torace insieme uniti, più lunga perciò che in *H. nigra; palpi* brevi, fulvi, filiformi. — *Fronte* larga in basso, molto più stretta al vertice, sporgente, gialliccio-pollinosa ai lati e quivi sparsa di peli brevi, neri; striscia frontale di colore castagno scuro, striata longitudinalmente; ai lati di essa una sola serie per parte di setole nere, ricurve in basso e incrociate che discendono fin presso alla base delle antenne; al vertice due setole laterali ricurve all'indietro e lunghe, e due ocel-

lari ricurve in avanti e dietro a queste molte altre più deboli e ricurve nella stessa direzione. — *Occhi* nudi. — *Antenne* lunghe un po' più della metà della faccia; i primi due articoli fulvo-rossicci; il secondo peloso superiormente; il terzo nero, doppio del secondo, assottigliato e arrotondato all'apice; stilo nero, ingrossato alla base e visibilmente piumoso. — *Torace* nero, appena grigio-pollinoso con cinque striscie nere quasi indistinte di cui tre mediane sottili e due laterali un po' più larghe ed interrotte alla sutura; sul dorso parecchie setole miste a peli; petto nero, grigio-pollinoso; sulle pleure una serie di setole robuste ricurve all'indietro di fronte alla base delle ali. — *Scudetto* nero, con lunghe setole al margine, ma nel mezzo privo di spine e munito solo di peli. — *Addome* robusto, un po' più largo del torace, cordiforme, giallo-testaceo; la parte mediana del primo segmento, una macchia dorsale triangolare all'estremità del secondo e terzo segmento e tutto il quarto segmento, neri; sul primo segmento due sole spine laterali, una per parte, marginali; sul secondo alcune spine discali e marginali sul dorso, e alcune laterali; sul terzo pure alcune discali dorsali oltre ad una serie di molte marginali; sul quarto parecchie discali miste a peli neri e lunghi specialmente all'apice. — *Ventre* giallo-testaceo; nero sull'ultimo segmento, armato di molte spine in una larga zona mediana. — *Piedi* neri, pelosi e setolosi; tutte le tibie ferruginose; uncini e pulvilli lunghi; pulvilli gialli. — *Ali* gialle alla base e con tutte le vene marginate di giallo; cellula apicale largamente aperta prima dell'apice dell'ala; vena trasversa apicale leggermente concava, e inclinata ad angolo retto sulla quarta longitudinale; vena trasversa posteriore bisinuosa. — *Calittere* e *bilancieri* picei. — Lunghezza mm. 14.

A parte i caratteri generici è notevolissima la somiglianza che questa specie presenta per la colorazione colla *Iurinia dichroma* VAN DER WULP.

Un solo maschio.

HAB. — Mexico (TRUQUI).

XLIV. — Gen. **MOCHLOSOMA.**

BRAUER e BERGENSTAMM (7), I, p. 126.

93. — ***Mochlosoma lacertosum.***

Prosena lacertosa VAN DER WULP (6), II, p. 215, tab. V, fig. 1, 1 *a*.

Due sole femmine.

HAB. — Messico: Ciudad in Durango (6), Solco (SUMICHRAST).

94. — ***Mochlosoma anale.***

Mochlosoma anale GIGLIO-TOS (12), p. 1.

Maschio. — *Faccia* bianco-gialliccia con riflessi sericei, concava; epistomio sporgente; guancie nude. — *Proboscide* lunga quasi quanto il corpo, sottile, nera; *palpi* filiformi, brevi, fulvi. — *Fronte* molto stretto in alto, largo in basso, sporgente,

coi lati nericci visti di fianco, argentino-pollinosi visti dall'alto, e sparsi di peli neri; striscia frontale bruno-fulva, larga in basso; ai lati di essa una sola serie di setole per parte che arrivano appena alla base delle antenne. — *Antenne* giallo-fulve, brevi; il terzo articolo appena bruniccio verso l'estremità lungo una volta e mezzo il secondo, che è sul margine superiore munito di peli fra cui due più lunghi di tutti; stilo piumoso. — *Torace* nero, appena leggermente pollinoso, anteriormente con alcune striscie appena accennate. — *Scudetto* piceo. — *Addome* nero piceo, un po' lucente, quasi conico, rivestito di lunghi peli neri eretti, e munito, fuorchè sul primo segmento, di setole dorsali discali e di altre marginali dorsali e laterali; quarto segmento tutto coperto di pollinosità fulva con riflessi sericei, interrotta lungo la linea mediana dorsale; ipopigio assai sporgente, nero e peloso. — *Piedi* neri; tibie ferruginee; uncini e pulvilli molto lunghi; pulvilli giallicci. — *Ali* gialliccie alla base; vene gialle nella metà basale, brune verso l'apice; piccola vena trasversa posta nel mezzo della cellula discale; piegatura della quarta vena longitudinale un po' curva; vena trasversa apicale quasi diritta; vena trasversa posteriore leggermente bisinuosa. — *Calittere* picee. — *Bilancieri* gialli.

Femmina. — Differisce per il fronte largo al vertice circa quanto la larghezza degli occhi, e con due setole orbitali; la pollinosità del torace anteriormente più densa e le striscie perciò più distinte; l'addome più tozzo, e cordiforme, meno peloso; la pollinosità fulva del quarto segmento assai più densa e non interrotta; gli uncini ed i pulvilli meno lunghi. — Lunghezza mm. 13-14.

Un maschio e due femmine.

Hab. — Mexico (Truqui).

95. — *Mochlosoma sericeum.*

Mochlosoma sericeum Giglio-Tos (12), p. 2.

Femmina. — *Faccia* giallo-sulfurea con riflessi sericei; guancie nude. — *Proboscide* nera, lunga appena il doppio dell'altezza del capo; *palpi* fulvi. — *Fronte* largo, ai lati giallo-sulfureo come la faccia; striscia frontale bruno-fulva, larga. — *Antenne* giallo-fulve; il secondo articolo con un ciuffo di peli neri sul margine superiore; il terzo circa doppio del secondo; stilo nero, appena pubescente, ingrossato nella metà basale. — *Torace* nero, cosparso di pollinosità cinerea nel mezzo, sulfureo-pallida ai lati e sulle pleure; al margine anteriore due striscie mediane e due laterali nere appena distinte. — *Scudetto* nero, cosparso di pollinosità cenerina. — *Addome* quasi cordiforme, nero, cosparso di densa pollinosità quasi argentina nel mezzo anteriormente e sulfureo-pallida ai lati, sui segmenti posteriori e sul ventre (Questa pollinosità, quasi uniformemente sparsa su tutto l'addome, è visibile solamente se si osserva obliquamente e cambia anche colore coll'incidenza della luce); alcune setole discali oltre alle marginali su tutti i segmenti, fuorchè sul primo. — *Piedi* fulvi; tarsi ed uncini neri; pulvilli giallicci. — *Ali* gialle nella metà basale; le vene gialle fin presso all'apice, quindi brune, ma tutte contornate di giallo; piegatura della quarta

vena longitudinale ad angolo retto; vena trasversa apicale obliqua ma rettilinea; piccola vena trasversa posta un po' prima del mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore obliqua e quasi rettilinea. — *Calittere* e *bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 13-14.

Due sole femmine.

Hab. — Mexico (Truqui).

96. — *Mochlosoma mexicanum.*

Prosena mexicana Macquart (**16**), 4e suppl., p. 231, tab. XXI, fig. 12. — van der Wulp (**34**), p. 30, 1.

Prosena tessellans van der Wulp (**6**), II, p. 216.

Due maschi e due femmine colle calittere affatto bianche.

Hab. — Messico (**16**, **34**): Ciudad in Durango, Tierra Colorada, Rincon, Tepetlapa, Acienda de la Imagen, Chilpancingo, Sierra de las Aguas Escondidas e Omilteme in Guerrero (**6**), Mexico (Truqui), Oaxaca.

XLV. — Gen. **HYSTRICHODEXIA.**

Röder (**23**), p. 266 (sep. 11).

97. — *Hystrichodexia pseudohystricia.*

Hystrisiphona pseudohystricia Brauer e Bergenstamm (**7**), I, p. 167.

Hystrichodexia pseudohystricia van der Wulp (**6**), II, p. 219, 1, tab. V, fig. 3, 3*a*.

Due soli maschi.

Hab. — Messico: Takubaya (**7**), Xucumanatlan ed Omiltene in Guerrero (**6**), Solco (Sumichrast).

98. — *Hystrichodexia — n. sp.?*

Un solo esemplare maschio un po' guasto differisce da *H. pseudo-hystricia* per avere l'addome di color fulvo, lucidissimo, con riflessi quasi metallici, i piedi mediani e posteriori coi femori e le tibie ferruginose (gli altri piedi mancano), lo scudetto pure bruno-fulvo e le calittere gialle. Negli altri caratteri è affatto simile alla specie suddetta.

Hab. — Mexico (Craveri).

99. — *Hystrichodexia formidabilis.*

Rhamphinina formidabilis BIGOT (5), p. 264, 58.
Hystricodexia formidabilis VAN DER WULP (6), II, p. 220, tab. V, fig. 4, 4 *a.*

Due soli maschi.

HAB. — Nicaragua: Chontales (6) — Messico (5): Paso del Macho (6), Orizaba (SUMICHRAST).

100. — *Hystrichodexia brevicornis.*

Prosena brevicornis MACQUART (16), 4e suppl., p. 230, 6.

Un solo maschio che ha tutti i caratteri del genere *Hystrichodexia* e concorda bene colla descrizione della specie sopradetta del MACQUART. Questa specie simile per la colorazione dell'addome alla precedente *H. formidabilis* ne è ben distinta per la colorazione dei piedi, per il colore fulvo del petto, delle pleure, dei lati del torace. Di fronte allo scudetto sul torace una grande macchia quadrangolare ha lo stesso colore fulvo. Le setole dell'addome sono meno numerose. — Lunghezza mm. 15.

HAB. — Brasile: Bahia (16) — Mexico (TRUQUI).

101. — *Hystrichodexia mellea.*

Hystrichodexia mellea GIGLIO-TOS (12), p. 2.

Maschio. — *Faccia* gialliccia con riflessi sericei grigi. — *Proboscide* nera, *palpi* gialli. — *Fronte* larga al vertice un po' meno della larghezza degli occhi, grigio-gialliccia ai lati; striscia mediana nera, larga; ai lati di essa una sola serie di setole che raggiunge la base delle antenne; nessuna setola orbitale. — *Antenne* fulve; articolo terzo nero; sul secondo articolo due lunghi peli; stilo nero, piumoso. — *Torace* nero, fulvo-pollinoso leggermente; gli angoli anteriori, i lati ed il margine posteriore fulvo-rossicci come miele; petto e pleure giallo-fulvi, giallo-pollinosi. — *Scudetto* fulvo-miele armato di spine nere anche nel mezzo. — *Addome* cordiforme, tutto di color fulvo-miele, un po' rossiccio; una striscia sul primo segmento, ed una macchia nera triangolare alla base del secondo; una macchia nera longitudinale all'apice del terzo e del quarto solamente visibile osservando l'addome molto obliquamente da lato; le spine così disposte: due o tre laterali sul primo segmento e nessuna dorsale; molte dorsali e discali e molte laterali sugli altri segmenti; quelle del secondo e del terzo raggruppate ai lati e nel mezzo; ipopigio assai sporgente. — *Ventre* del color dell'addome ma più chiaro, specialmente verso la base, anch'esso munito di spine. — *Piedi* gialli con peli gialli e setole nere; uncini e pulvilli lunghi; metà apicale degli uncini nera. — *Ali* grigie, gialle alla base; vene marginate di giallo; vena trasversa apicale leggermente concava; vena trasversa posteriore appena bisinuosa. — *Calittere* gialliccie. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 15.

Sebbene abbia il fronte molto largo, tuttavia gli uncini e i pulvilli molto lunghi, la mancanza di setole orbitali sul fronte, e specialmente poi l'ipopigio bèn sporgente non mi lasciano dubbio alcuno che si tratti di un maschio.

Hab. — Oaxaca (Sallé).

102. — *Hystrichodexia aurea.*

Hystrichodexia aurea Giglio-Tos (**12**), p. 2.

Femmina. — *Faccia* bianco-gialliccia con riflessi sericei; setole del margine orale gialle; vibrisse nere poste assai al di sopra del margine orale; faccia fortemente carenata nel mezzo fra le antenne. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli con peli dello stesso colore. — *Fronte* largo al vertice quasi quanto gli occhi, bianco-pollinosa ai lati; striscia mediana bruno-nera, larga; ai lati di essa una serie di setole che raggiungono la base delle antenne; le tre ultime più basse gialle, le altre nere; tre setole orbitali nere. — *Antenne* gialle; nel margine supero del secondo articolo due setole lunghe gialle; il terzo appena bruniccio verso l'estremità, quasi doppio del secondo; stilo bruno, ingrossato alla base, piumoso. — *Torace* nero, gialliccio-pollinoso sul dorso; due striscie laterali nere, largamente interrotte alla sutura e poco distinte; i lati ed il margine posteriore largamente giallo-fulvi; petto e pleure giallo-fulvi. — *Scudetto* anch'esso fulvo armato di spine nel mezzo. — *Addome* cordiforme, largo, tutto di color di miele, tendente al rossiccio e rivestito di peli giallo-dorati, molto lunghi all'apice; una striscia mediana nera interrotta alle incisioni; il primo segmento con qualche spina solo ai lati; parecchie dorsali e laterali, discali e marginali sul secondo e terzo segmento; il quarto ne è assolutamente privo fuorchè nella parte ventrale. — *Ventre* melleo, tutto irto di molte spine specialmente verso l'apice. — *Piedi* gialli; femori con setole nere miste ad altre gialle; uncini e pulvilli mediocremente lunghi; metà apicale degli uncini nera. — *Ali* gialliccie alla base; vene contornate di gialliccio; vena trasversa apicale concava alla base; vena trasversa posteriore diritta per un breve tratto alla sua origine quindi fortemente convessa. — *Calittere* e *bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 15.

Questa bella specie presenta per la colorazione e per i peli una notevole somiglianza con *Dejeania corpulenta* Wiedem.

Una sola femmina.

Hab. — Senza indicazione di località messicana (Sumichrast).

XLVI. — **Gen. RHYNCHODEXIA.**

Rhynchodexia Bigot, Bull. Soc. ent. fran., 1885, p. xi.
Rhamphinina Bigot ibidem, p. xi.
Rhynchodexia van der Wulp (**6**), II, p. 225.

103. — *Rhynchodexia anthracina.*

Rhamphinina anthracina Bigot (5), p. 265, 62.
Prosena obscura Bigot (5), p. 264, 56.
Rhynchodexia anthracina van der Wulp (6), II, p. 234, 16.

Parecchi esemplari di ambedue i sessi.

La sinonimia è stabilita sulla testimonianza di van der Wulp che esaminò i tipi della collezione Bigot.

Hab. — Messico (5): Ciudad in Durango (6), Solco (Sumichrast), Patzcuaro (Saussure).

104. — *Rhynchodexia angulata.*

Rhynchodexia angulata van der Wulp (6), II, p. 233, 14.

Una sola coppia.

Hab. — Messico: Ciudad in Durango, Jalisco, Acapulco, Xucumanatlan, Omilteme, Sierra de las Aguas Escondidas in Guerrero (6), Orizaba (Sumichrast).

105. — *Rhynchodexia scutellata.*

Rhynchodexia scutellata van der Wulp (6), II, p. 230, 7.

Un maschio ed un altro esemplare femmina un po' mal conservato che riferisco dubbiamente a questa specie.

Hab. — Messico: Ciudad in Durango (6), Mexico (Saussure), Orizaba (Sumichrast).

106. — *Rhynchodexia rubricornis.*

Rhynchodexia rubricornis van der Wulp (6), II, p. 230, 8.

Due soli maschi, di cui uno assai più piccolo.

Hab. — Messico: Northern Sonora, La Venta, Amula, Xucumanatlan, Omilteme, Sierra de las Aguas Escondidas in Guerrero, Teapa in Tabasco, Atoyac in Vera Cruz (6), Mexico (Truqui).

107. — *Rhynchodexia major.*

Rhamphinina major Bigot (5), p. 265, 59.

Tre maschi ed una femmina; quest'ultima di minore statura e coll'addome ovato e largo; le macchie bianche assai meno visibili fuorchè sull'ultimo segmento e sul ventre; ogni segmento pórta sul dorso alla base una stretta fascia bianco-pollinosa.

Hab. — Messico (5): Orizaba (Sumichrast, Boucard).

108. — *Rhynchodexia fraterna.*

Rhynchodexia fraterna VAN DER WULP (**6**), II, p. 229, 6.

Parecchi esemplari maschi e femmine di statura varia.

HAB. — Messico: Tepie, Santiago de Iscuintla, Orizaba, Acapulco, Tierra Colorada, Rincon, Venta de Zopilote, Chilpancingo ed Amula in Guerrero, Cuernavaca in Morelos, Atoyac in Vera Cruz, Teapa in Tabasco (**6**), Oaxaca (SALLÉ), Orizaba (SUMICHRAST), Tehuacan.

XLVII. — Gen. **PROSENA.**

ST. FARGEAU et SERVILLE, *Encyclopédie méthodique,* tom. X, p. 500 (1825).

109. — *Prosena curvirostris.*

Prosena curvirostris BIGOT (**5**), p. 264, 57. — VAN DER WULP (**6**), II, p. 217, 4.

Parecchi esemplari dei due sessi.

HAB. — Costa Rica: Rio Sucio (**6**) — Messico (**5**): Tierra Colorada, Rincon, Chilpancingo ed Amula in Guerrero; Atoyac e Fortin in Vera Cruz, Teapa in Tabasco (**6**), Orizaba (SUMICHRAST, BOUCARD).

XLVIII. — Gen. **SCOTIPTERA.**

MACQUART (16), II, 3e part., p. 83.

110. — *Scotiptera ? cyanea.*

Scotiptera cyanea GIGLIO-TOS (**12**), p. 2.

Maschio. — *Corpo* interamente di color nero lucente tendente all'azzurrognolo. — *Faccia* e lati del *fronte* gialliccio-pollinosi; guancie con riflessi sericei. — *Proboscide* nera; *palpi* gialli. — *Antenne* coi primi due articoli fulvi (il terzo manca). — *Fronte* molto stretta al vertice, colla striscia mediana nera ed una sola serie di setole ad ogni lato. — *Torace* anteriormente e sulle pleure cinereo-pollinoso; quattro striscie, due mediane sottili e due laterali più larghe solo distinte al margine anteriore. — *Addome* con setole discali oltre alle marginali; incisioni con riflessi cenerino-pollinosi, se osservate obliquamente. — *Piedi* neri; uncini e pulvilli lunghi; pulvilli grigi. — *Ali* uniformemente brune, quarta vena longitudinale appendicolata alla sua piegatura; vena trasversa apicale leggermente concava e molto obliqua; piccola vena trasversa posta nel mezzo della cellula discale; vena trasversa posteriore diritta alla base quindi un po' convessa. — *Calittere* e *bilancieri* bruni, quasi picei. — Lunghezza mm. 10.

Sebbene mancante del terzo articolo delle antenne, posso quasi con certezza riferirla per gli altri caratteri al genere *Scotiptera*.

Hab. — Angang (Saussure).

XLIX. — Gen. **MYIOSCOTIPTERA.**

Giglio-Tos (**12**), p. 2.

Corpo snello; *proboscide* lunga almeno quanto l'altezza del capo; *palpi* sporgenti, distintamente clavati e della lunghezza quasi della proboscide; guancie più larghe della metà dell'altezza degli occhi; vibrisse inserite al margine orale; *faccia* alquanto obliquamente ritratta, epistomio sporgente; *antenne* estese quasi fino alle vibrisse, col terzo articolo almeno tre volte più lungo del secondo; *fronte* sporgente, superiormente ristretta nel maschio; *addome* conico, munito di setole discali oltre alle marginali; *ali* colla cellula apicale aperta; la quarta vena longitudinale non appendiculata; gli uncini e i pulvilli dei piedi sono lunghi; organi genitali esterni grandi.

Questo genere assai affine ai generi *Scotiptera* e *Myiocera* differisce da ambedue per la lunghezza notevole e la forma distintamente clavata dei palpi; dal genere *Scotiptera* poi per la mancanza di appendice alla quarta vena longitudinale delle ali; dal gen. *Myiocera* per la presenza di setole discali sull'addome.

111. — *Myioscotiptera cincta.*

(Fig. 14, capo).

Miyoscotiptera cincta Giglio-Tos (**12**), p. 2.

Maschio. — *Faccia* cenerino-gialliccia, con riflessi sericei; guancie nude e larghe; epistomio alquanto sporgente. — *Proboscide* nera, un po' più lunga dell'altezza del capo ed alquanto curva; *palpi* gialli quasi lunghi quanto la proboscide, sottili, e distintamente clavati all'estremità, muniti di lunghi peli neri all'apice. — *Fronte* alquanto sporgente, stretta in alto, argentina ai lati; striscia frontale quasi nera; una sola serie di setole ad ogni lato di essa, che si prolunga fino alla base delle antenne. — *Antenne* che raggiungono quasi le vibrisse; i primi due articoli brevi, fulvi; il terzo triplo del secondo, nero, lineare, arrotondato all'apice; stilo ingrossato alla base, lungamente piumoso. — *Torace* nero, cenerino-pollinoso, con due striscie mediane sottili e due laterali larghe distinte al margine anteriore; petto e pleure cinereo-pollinosi. — *Scudetto* nero, cenerino-pollinoso alla base. — *Addome* conico, nero, lucente, con lunghi peli misti a setole; il primo segmento appena grigio-pollinoso ai lati; gli altri con una larga fascia basale cinereo-pollinosa, interrotta nel mezzo del dorso, ed estesa anche sul ventre; segmenti secondo e terzo con riflessi fulvo-pollinosi osservati obliquamente e con due setole dorsali discali oltre le marginali; ipopigio sporgente, grande e peloso. — *Piedi* neri; uncini e pulvilli lunghi e gialli; apice degli uncini nero. — *Ali* leggermente gialliccie; cellula apicale largamente aperta un po' prima dell'apice dell'ala; vena trasversa apicale concava presso alla base, quindi obliqua e leggermente ondulata; vena trasversa posteriore appena bisinuosa. — *Calittere* e *bilancieri* giallicci. — Lunghezza mm. 10.

Un solo maschio.

Hab. — Solco.

L. — Gen. **DEXIOSOMA.**

RONDANI (26), I, p. 85.

112. — *Dexiosoma vibrissatum.*

Dexiosoma vibrissatum VAN DER WULP (6), II, p. 244, 1, tab. V, fig. 13, 13 *a*.

Due soli maschi che concordano colla descrizione del tipo.

HAB. — Messico: Teapa in Tabasco (6), Tuxpango (SUMICHRAST).

LI. — Gen. **MICROPHTHALMA.**

MACQUART (16), II, 3ᵉ part., p. 84, nº 4.

113. — *Microphthalma sordida.*

Microphthalma sordida GIGLIO-TOS (12), p. 3.

Maschio. — *Faccia* testacea, ocraceo-pollinosa, obliquamente ritratta; vibrisse superiori molto lungi dal margine boccale; guancie molto larghe, nude. — *Fronte* molto sporgente, nera ai lati, osservata di profilo, e pelosa fino al margine inferiore degli occhi; ocraceo-pollinosa vista dal di sopra; striscia mediana fulva; una sola serie di setole per ogni parte, che discende fin oltre la base delle antenne. — *Occhi* piccoli, nudi. — *Antenne* giallo-fulve; il terzo articolo sottile, nero nella metà apicale; stilo breve, nero, ingrossato nella sua metà basale, pubescente nel resto. — *Torace* e *scudetto* neri, leggermente cinereo-pollinosi specialmente ai lati del torace prima della sutura; le striscie nere quasi indistinte. — *Addome* nero, fulvo rossiccio ai lati del secondo e terzo segmento e su quasi tutto il quarto; alla base di ogni segmento una fascia cenerino-gialliccio-pollinosa che occupa la metà della lunghezza del segmento; due setole dorsali e laterali sul secondo segmento ed una serie sul terzo solamente marginali; sul quarto alcune anche discali. — *Ventre* nero nel mezzo, rossiccio ai lati. — *Piedi* neri, pelosi e setolosi; uncini e pulvilli lunghi; pulvilli giallicci. — *Ali* un po' grigie; cellula apicale aperta presso all'apice dell'ala; vena quarta longitudinale con una lunga appendice al gomito; vena trasversa apicale concava alla base, quindi molto obliqua; piccola vena trasversa posta quasi nel mezzo della cellula discale, ed a margini offuscati; vena trasversa apicale fortemente bisinuosa. — *Calittere* gialliccie. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 10-11.

Due maschi in cui la colorazione dell'addome è un po' diversa, ma che sono simili nel resto; altri due paiono formare una specie distinta, ma sono mal conservati e non si possono descrivere.

HAB. — Mexico (TRUQUI), Toluca (SAUSSURE) (BOUCARD).

LII. — Gen. MEGAPARIA.

van der Wulp (6), II, p. 240.

114. — *Megaparia venosa.*

Megaparia venosa, van der Wulp (6), II, p. 240, 1, tab. V, fig. 9, 9*a*.

Due femmine che differiscono appena dalla descrizione del van der Wulp (la proboscide ed i palpi non visti da quell'autore sono l'una nera, gialla all'apice, gli altri assai brevi e gialli) e due maschi, non descritti, alquanto vari nella colorazione, ma distinti dalle femmine per dimensioni maggiori (lunghezza mm. 12 circa).

Hab. — Messico: Ciudad in Durango (6), Mexico (Craveri).

LIII. — Gen. STOMATODEXIA.

Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 125.

115. — *Stomatodexia quadrimaculata.*

Dexia quadrimaculata Walker (38), p. 319.

Due sole femmine differenti dal maschio descritto da Walker per avere sul fronte due setole orbitali, per la mancanza di macchie nere laterali sull'addome, che è ovato e più largo del torace. Le ali e le calittere sono gialliccie.

Hab. — Brasile (38) — Mexico (Truqui).

116. — *Stomatodexia cothurnata.*

Stomoxys cothurnata Wiedemann (40), II, p. 249, n° 5.
Prosena maculifera Bigot (5), p. 264, 55.
Stomatodexia cothurnata Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 125, tab. VIII, fig. 195. — van der Wulp (6), II, p. 239, 1.

Due maschi e tre femmine.

Hab. — Brasile (40) — Messico (5): Acapulco, Acaguizotla, Rincon, Rio Papagaio e Chilpancingo in Guerrero, Atoyac in Vera Cruz, Santiago Iscuintla in Ialisco (6), Orizaba (Sumichrast).

117. — *Stomatodexia similigena.*

Stomatodexia similigena van der Wulp (6), II, p. 239, 2.

Quattro maschi e due femmine.

Hab. — Messico: Amula in Guerrero (6), Orizaba (Sumichrast), Oaxaca (Sallé).

LIV. — Gen. THELAIRODES.

VAN DER WULP (6), II, p. 257.

118. — *Thelairodes basalis.*

Thelairodes basalis GIGLIO-TOS (12), p. 3.

Femmina. — *Faccia* con riflessi sericei argentini. — *Palpi* gialli (la proboscide è nascosta). — *Fronte* larga quasi quanto gli occhi con riflessi argentini vista dal di sopra, bruniccia vista di fianco; striscia mediana assai larga, nera; due setole orbitali. — *Antenne* lunghe quasi quanto la faccia, gialle; il terzo articolo lineare, almeno quadruplo del secondo, bruno nella metà apicale; stilo piumoso. — *Torace, petto* e *scudetto* neri, coperti uniformemente di pollinosità bianca a riflessi d'argento. — *Addome* sub-conico, acuto, nero, con larghe fascie basali bianco-argentine sui segmenti secondo, terzo e quarto; il primo segmento grande quanto il secondo, tutto giallo; nella parte ventrale anche il secondo segmento è giallo; setole solo marginali. — *Piedi* coi femori e le anche gialli; tibie brune; tarsi neri; uncini e pulvilli molto piccoli. — *Ali* gialliccie lungo la costa; vene trasverse apicale e posteriore oblique e leggermente ondulate; prima vena longitudinale cigliata per un buon tratto verso l'estremità; la terza vena longitudinale con poche ciglia solo alla base. — *Calittere* bianchiccie. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 8.

Una sola femmina.

HAB. — Senza indicazione di località messicana (BOUCARD).

LV. — Gen. CHAETONA.

VAN DER WULP (6), II, p. 253.

119. — *Chaetona cruenta.*

Chaetona cruenta GIGLIO-TOS (12), p. 3.

Femmina. — *Faccia* gialliccia, verticale; epistomio appena sporgente; guancie nude. — *Proboscide* e *palpi* gialli. — *Fronte* gialliccia ai lati, larga al vertice quasi quanto gli occhi; striscia frontale assai larga, gialla; due setole orbitali. — *Antenne* al di sopra del mezzo degli occhi, gialle; il terzo articolo triplo del secondo, lineare, stretto, bruno verso l'estremità; stilo lungo. — *Occhi* grandi, nudi, discendenti alquanto al di sotto delle vibrisse. — *Torace* nero, coperto di pollinosità gialliccia assai densa; due striscie mediane e due laterali un po' più larghe, interrotte alla sutura, nere, ben distinte; un'altra mediana appena accennata davanti alla sutura; petto e pleure grigio-pollinosi. — *Scudetto* testaceo-bruniccio. — *Addome* ovato, nero; i segmenti secondo, terzo e quarto con una fascia stretta basale di pollinosità bianchiccia;

ai lati dell'addome presso alla base due larghe macchie rosso-mattone, che occupano quasi tutto il secondo e primo segmento, lasciando solo una striscia mediana nera; apice dell'addome anch'esso rosso-mattone. — *Piedi* coi femori gialli fuorchè l'estremità dei posteriori che è nera; tibie brune, tarsi neri; uncini e pulvilli piccolissimi. — *Ali* quasi limpide; la vena trasversa apicale concava alla base; la piegatura della vena quarta longitudinale fortemente ricurva; vena trasversa posteriore obliqua e leggermente sinuosa. — *Calittere* e *bilancieri* bianchicci. — Lunghezza mm. 8.

Una sola femmina che per alcuni caratteri della faccia e delle ali si allontana un po' dal genere *Chaetona.*

Hab. — Senza indicazione di località messicana (Boucard).

LVI. — Gen. **APORIA.**

Macquart (16), 1r suppl., p. 168.

120. — *Aporia elegans.*

(Fig. 15, capo).

Aporia elegans Giglio-Tos (12), p. 3.

Maschio. — *Faccia* bianco-argentina, con riflessi sericei, obliquamente ritratta; epistomio non sporgente; vibrisse inserite al margine orale; guancie alte quanto un terzo dell'altezza degli occhi, sparse di pochi peli neri nella parte più bassa. — *Proboscide* nera, con labbra grandi; *palpi* bruno-fulvi, pelosi. — *Fronte* assai stretta in alto, un po' sporgente, argentina ai lati; striscia mediana nera; una sola serie di setole ai lati di essa discendenti fino alla base delle antenne. — *Occhi* grandi, pelosi. — *Antenne* inserite alquanto al di sotto del mezzo degli occhi, lunghe un po' meno della faccia, nere; il primo articolo brevissimo, il secondo doppio del primo, con peli superiormente di cui uno assai più lungo; il terzo articolo sottile, un po' più largo verso l'apice, appena doppio del secondo; stilo lungo, nudo, ingrossato alla base e sempre più sottile verso l'estremità. — *Torace* nero, lucente, coperto di pollinosità argentina densa ai lati e sulle pleure, scarsa nel mezzo; due striscie mediane nere sottili ben distinte anteriormente, e due altre laterali assai più larghe, un po' confuse e interrotte alla sutura. — *Scudetto* nero, grigio pollinoso fuorchè alla base. — *Addome* lungo, conico, nero, lucente, con tutti i segmenti uguali o quasi; una larga fascia cenerino-pollinosa alla base dei segmenti secondo e terzo; oltre alle setole marginali anche due discali accoppiate sul dorso del secondo e terzo segmento e parecchie sul quarto. — *Ventre* bruno-nero a riflessi bianco-pollinosi. — *Piedi* neri; i femori anteriori e mediani cenerino-pollinosi dal lato posteriore: tibie posteriori robuste e ferruginee; uncini e pulvilli lunghi, pulvilli giallicci. — *Ali* gialle nella metà basale; nella metà apicale intensamente brune; il margine posteriore e la porzione centrale delle cellule apicale e discale ialini; una breve spina alla costa; vena quarta longitudinale brevemente appendicolata alla sua piegatura; vena trasversa apicale appena concava alla base; vena trasversa posteriore leggermente bisinuosa. — *Calittere* grandi, bianche. — *Bilancieri* gialli. — Lunghezza mm. 14.

Un solo maschio.

Hab. — Tuxpango (Sumichrast).

LVII. — Gen. **CORDYLIDEXIA.**

Cordyligaster Macquart (16), II, 3e part., p. 90, 8.

121. — ***Cordylidexia minuscula.***

Cordyligaster minuscula van der Wulp (6), II, p. 252, 1, tab. VI, fig. 7, 7*a*.

Un solo esemplare maschio mancante di addome, ma in tutte le altre parti corrispondente alla descrizione di questa specie.

Il nome generico usato da Macquart venne da me cambiato perchè già occupato fin dal 1820 per indicare un genere di Libellulidi.

Hab. — Messico: Rio Papagaio e Tierra Colorada in Guerrero, Teapa in Tabasco (6), Orizaba (Sumichrast).

SARCOPHAGINAE

LVIII. — Gen. **PHRISSOPODA.**

Macquart (16), II, 3e part., p. 96.

122. — ***Phrissopoda praeceps.***

Sarcophaga praeceps Wiedemann (40), II, p. 355, 1.
Peckia imperialis Robineau-Desvoidy (21), p. 335, 1.
Phrissopodia imperialis Macquart (15), II, p. 223, 1.
Phrissopoda imperialis Macquart (16), II, 3e part., p. 96.
Sarcophaga fortipes Walker (39), p. 43.
Phrissopoda praeceps Williston (41), p. 307. — Brauer e Bergenstamm (7), I, p. 124.

Un solo maschio mancante di capo ma ancora determinabile, e indicato in collezione col nome di *P. imperialis*.

Hab. — Cuba (40, 21) — Haïti (39) — San Domingo (41) — Port Jackson nella Nuova Olanda (16) — Mexico (Sallé).

123. — ***Phrissopoda immanis.***

Sarcophaga immanis Walker (37), Part IV, p. 815.

Walker descrisse solamente la femmina di questa specie; il maschio differisce per il corpo notevolmente più lungo, per avere il capo ed il fronte più larghi, lo

stilo delle antenne più lungamente piumoso; il terzo articolo delle antenne internamente fulvo alla base, come anche in taluna femmina; i piedi inferiormente coperti di peli lunghi e fitti specialmente sulle tibie mediane e posteriori; gli uncini dei tarsi molto più lunghi, ed i pulvilli più grandi; l'addome oblungo, sub-conico, peloso, tessellato di pollinosità bruno-fulva, un po' gialliccia alla base ed ai lati dei segmenti; l'ipopigio grande, sporgente, peloso, di color bruno-rugginoso lucente. — Lunghezza mm. 19-22.

Quattro maschi e tre femmine (Un maschio fu trovato a Vera Cruz nel corpo di un granchio morto).

Hab. — Honduras (**37**) — Mexico (Sallé).

124. — *Phrissopoda plumipes.*

Peckia plumipes Robineau-Desvoidy (**21**), p. 336, 4.
Sarcophaga intermutans Walker (**39**), p. 41.

Quattro maschi ed una femmina.

Hab. — Haïti (**21**) — Messico (**39**): Mexico (Sallé).

125. — *Phrissopoda lamanensis.*

Peckia lamanensis Robineau-Desvoidy (**21**), p. 335, 2.

Un maschio ed una femmina.

Hab. — Lamana (**21**) — Mexico, Orizaba (Sumichrast).

LIX. — Gen. SARCOPHAGA.

Meigen (**18**), V, 14 (1826).

126. — *Sarcophaga obsoleta.*

Sarcophaga obsoleta Wiedemann (**40**), II, p. 367, 29.
Sarcophagula obsoleta van der Wulp, Tijdschr. v. Entomol., XXX, p. 173 (1887).

Qualche esemplare di ambi i sessi che riferisco dubbiamente a questa specie stante la troppo breve descrizione del Wiedemann.

Hab. — Indie Occidentali (**40**) — Messico: Tuxpango (Sumichrast).

127. — *Sarcophaga spinigena.*

Sarcophaga spinigena Rondani (**27**), p. 26.

Un solo maschio, che presenta però la spina alare poco sviluppata.

Hab. — Valdivia (**27**) — Messico: Orizaba (Sumichrast).

128. — *Sarcophaga plinthopyga.*

Sarcophaga plinthopyga WIEDEMANN (**40**), II, p. 360, 10. — WALKER ? (**36**), p. 352, 57. — RÖDER (**22**), p. 346.

Molti individui dei due sessi varianti nella statura e nella colorazione della pollinosità del corpo dal bianco al giallo.

HAB. — Indie occidentali: Isola di S. Tomaso (**40**) — Portorico (**22**) — S. Caterina (**36**) — Messico: Orizaba, Tuxpango (SUMICHRAST, SAUSSURE, BOUCARD).

Vennero inoltre descritte le seguenti specie del Messico:

Sarcophaga *trivittata* MACQUART, Dipt. exot., II, 3e partie, p. 105.
Id. *trigonomaculata* Id., ibid., p. 106.
Id. *perneta* WALKER, Trans. ent. Soc. London, V, n. s., P. VII, p. 41.
Id. *innota* Id., ibid., p. 41.
Id. *conclausa* Id., ibid., p. 42.
Id. *despensa* Id., ibid., p. 42.
Id. *effrenata* Id., ibid., p. 42.

INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

1. Bigot J. M., *Dipterorum aliquot nova genera,* in " Revue et Magasin de Zoologie pure et appliquée ", par Guérin-Méneville, 2e série, tome XI, 1859, pp. 305-315.
2. Id. *Diptères nouveaux ou peu connus,* 9e partie, XII e XIII, in " Annales Soc. entom. de France ", 5e série, tome VIII, 1878, pp. 31-48.
3. Id. *Diagnoses de quelques espèces nouvelles de Diptères,* in " Bulletin de la Soc. entom. de France ", 1887, pp. CXXXIX-CXLII.
4. Id. *Diptères nouv. ou peu connus,* 33e partie, XLI: *Tachinidae,* in " Ann. de la Soc. entom. de France ", 6e série, tome VIII, 1888, p. 77-101.
5. Id. *Dipt. nouv. ou peu connus,* 34e partie, XLII: *Diagnoses de nouvelles espèces,* in " Ann. de la Soc. entom. de France ", 6e série, tome VIII, 1883, pp. 252-270.
6. *Biologia centrali americana: Muscidae Calypteratae,* by F. van der Wulp, vol. II, 1888-1891.
7. Brauer F. e Bergenstamm J., *Die Zweiflüger des kaiserlichen Museums zu Wien.* IV. *Vorarbeiten zu einer Monographie der Muscaria schizometopa (exclusive Anthomyidae),* pars I, in " Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften ", LVI Band, Wien, 1889, pp. 69-180; pars II, ibidem, LVIII, Bd., 1891, pp. 305-446.
8. Cuvier G., *Le règne animal distribué d'après son organisation pour servir à l'histoire naturelle des animaux,* Paris, 1829.
9. Fallén C. F., *Diptera Sueciae,* Lundae, 1814-1825.
10. Joh. Chr. Fabricii *Entomologia systematica emendata et aucta,* tom. IV, Hafniae, 1794.
11. Id. *Systema Antliatorum,* Brunsvigae, 1805.
12. Giglio-Tos E., *Diagnosi di nuovi generi e di nuove specie di Ditteri,* VIII, in " Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università di Torino ", vol. VIII, n. 147, 1893.
13. Id. *Diagnosi di nuovi generi e di nuove specie di Ditteri,* IX, in " Boll. Mus. Zool. Anat. Comp. R. Univers. Torino ", vol. VIII, n. 158, 1893.
14. Jaennicke F., *Neue exotische Dipteren aus den Museen zu Frankfurt a. M. und Darmstadt,* in " Abhandl. d. Senckenb. Gesellsch. ", Bd. VI, Frankfurt, 1867 *(separatum).*
15. Macquart J., *Histoire naturelle des Insectes Diptères, Suite à Buffon,* Paris, 1834-1835.
16. Id. *Diptères exotiques nouveaux ou peu connus,* Paris, 1838-1850.

17. MEIGEN J. W., *Versuch einer neuen Gattungs-Eintheilung der europaeischen zweiflügligen Insekten,* in " Magazin für Insektenkunde herausg. v. Karl Illiger „, II Band, 1803, pp. 259-281.
18. Id. *Systematische Beschreibung der bekannten europaeischen zweiflügeligen Insekten,* Hann., 1818-1838.
19. OSTEN SACKEN C. R., *Western Diptera, Descriptions of new genera and species of Diptera from the Region West of the Mississipi and especially from California,* in " Bulletin of the United States geological and geographical Survey „, vol. III, n. 2, Washington, 1877.
20. Id. *Catalogue of the described Diptera of North America* (second edit.), Washington, 1878.
21. ROBINEAU-DESVOIDY J. B., *Essai sur les Myodaires,* in " Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Royale des Sciences de l'Institut de France „, vol. II, 1830.
22. RÖDER (VON) V., *Dipteren von der Insel Portorico erhalten durch Herrn Consul Krug in Berlin,* in " Stettiner entomol. Zeitung „, 1885, pp. 337-349.
23. Id. *Dipteren gesammelt in den Jahren 1868-1877 auf einer Reise durch Süd-Amerika von Alphons Stübel,* in " Stettiner entom. Zeitung „, XLVII Jahrg., 1886, pp. 257-270 (separ. 1-16).
24. RONDANI C., *Osservazioni sopra alquante specie di Esapodi ditteri del Museo Torinese,* in " Nuovi Annali delle scienze naturali di Bologna „, fasc. di settembre e ottobre, 1850.
25. Id. *Dipterorum species aliquae in America aequatoriali collectae a Caietano Osculati, observatae et distinctae, notis breviter descriptae,* in " Nuovi Annali delle Scienze naturali di Bologna „, fasc. di nov. e dicembre, pp. 1-18 (separ.), 1850.
26. Id. *Dipterologiae italicae prodromus,* Parma, 1856-1877.
27. Id. *Dipterorum species et genera aliqua exotica revisa et annotata, novis nonnullis descriptis,* in " Archivio per la Zoologia, l'Anatomia e la Fisiologia „ del Prof. Canestrini, vol. III, pp. 1-99, 1865.
28. SAY Th., *Description of North American Dipterous Insects,* in " Journal of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia „, vol. VI, part I, pp. 149-178, 1829.
29. SCHINER R., *Fauna austriaca. Die Fliegen (Diptera),* Wien, 1862-1864.
30. Id. *Novara-Expedition,* Zool. Theil, II Band, *Diptera,* 1868.
31. TYLER TOWNSEND C. H., *Notes on North American Tachinidae (sens. strict.) with descriptions of new Genera and Species.* — Paper I, in " Proceeding of the entom. Society of Washington „, II, 1891, pp. 134-146. — Paper II, in " Transactions of the amer. ent. Soc. of Philadelphia „, XVIII, 1891, pp. 349-382. — Paper III, in " Trans. amer. ent. Soc. „, XIX, 1892, pp. 88-132. — Paper IV, in " Entomological News „, III, 1892. — Paper V, in " The Canadian Entomologist „, vol. XXIV, n° 3, 1892. — Paper VI, in " The Canad. Entomol. „, XXIV, 1892, pp. 165-172.
32. Id. *Catalogue of the described South American species of Calyptratae Muscidae,* in " Annals of the New York Academy of Sciences „, 1892, pp. 1-44.
33. VAN DER WULP F. M., *Eenige Noord-Amerikaansche Diptera,* in " Tijdschrift voor Entomologie „, II serie, X Jarhgang, 1867, pp. 125-164.
34. Id. *Amerikaansche Diptera,* n° 3, in " Tijdschrift voor Entomologie „, XXVI, 1883, pp. 1-60.

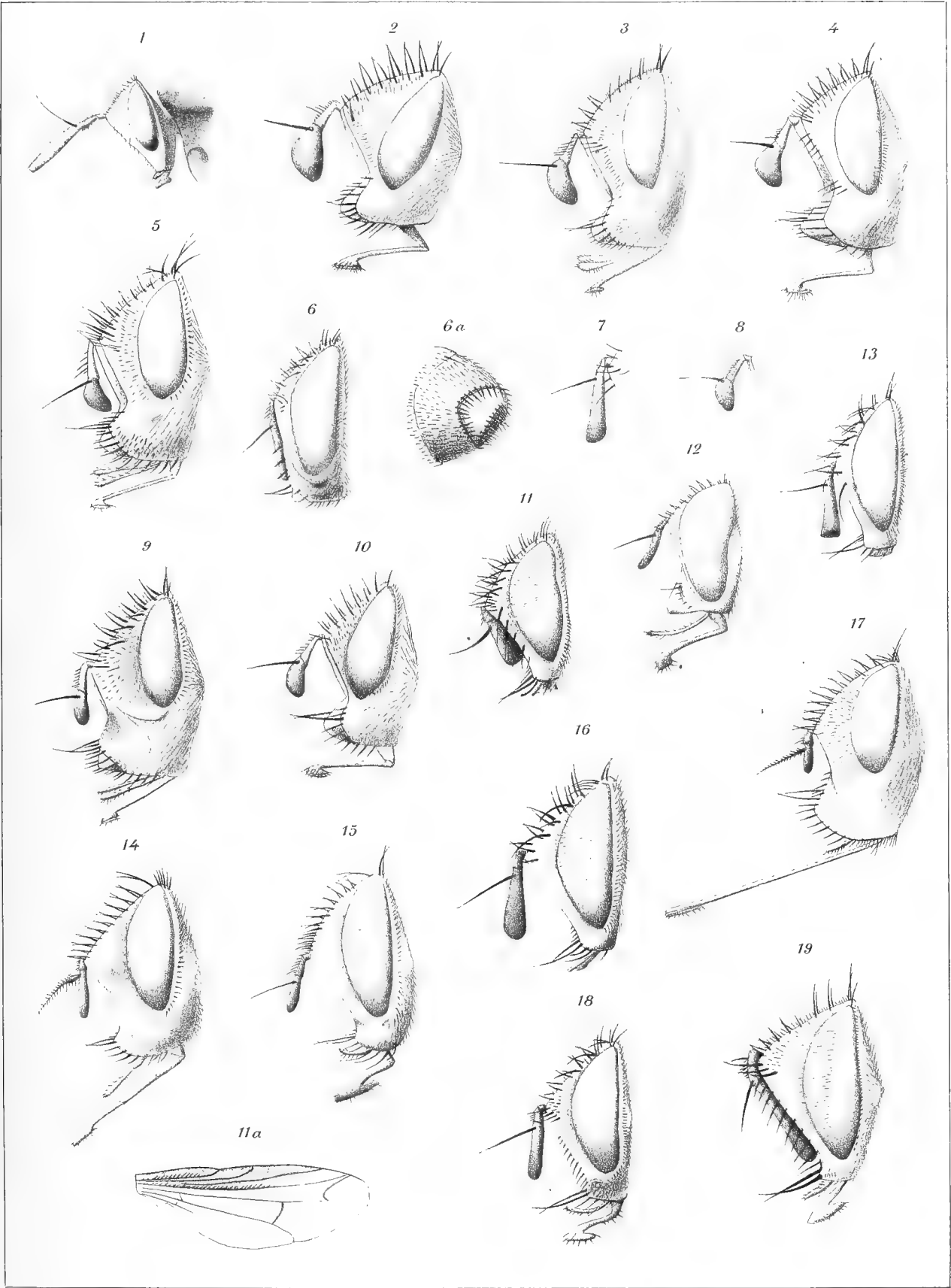
35. van der Wulp F. M., *Diagnoses of new mexican Muscidae,* in " Tijdschrift voor Entom. „, XXXV, 1892, pp. 183-195.
36. Walker Fr., *Descriptions etc. of the Insects collected by Captain P. P. King in the Survey of the Straits of Magellan,* 1834.
37. Id. *List of the specimens of Dipterous Insects in the collection of the British Museum,* 1848-1855.
38. Id. *Insecta Saundersiana: or characters of undescribed Insects in the collection of W. W. Saunders,* Esq., I, London, 1856.
39. Id. *Characters of undescribed Diptera in the Collection of W. W. Saunders,* Esq., XXIII, in " Transactions of the entomol. Society of London „, vol. V, n. s., part VII, 1857, pp. 1-67.
40. Wiedemann W., *Aussereuropaeische zweiflügeligen Insekten.* Hamm, 1830.
41. Williston S. W., *Dipterological notes and descriptions,* in " Transactions of the American entomol. Society „, XIII, 1886, pp. 287-307.
42. Id. *The Dipterous parasites of North American Butterflies,* in " Scudder's Butterflies of the Eastern United States and Canada „, Cambridge, 1889, pp. 1912-1924.
43. Zetterstedt J. W., *Diptera Scandinaviae disposita et descripta,* Lundae, 1842-1860.

INDICE ALFABETICO DELLE SPECIE

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. *Penthosia satanica* Bigot (capo) ♂.
„ 2. *Gymnomma novum* Giglio-Tos (capo) ♀.
„ 3. *Nemochaeta incerta* „ „ ♂.
„ 4. *Saundersia aurea* „ „ ♂.
„ 5. *Nemochaeta jurinioides* „ „ ♂.
„ 6. *Belvosia bella* „ „ ♀.
„ 6*a*. „ „ „ (ano) ♀.
„ 7. *Chaetogena gracilis* „ (antenna) ♀.
„ 8. *Nemochaeta dubia* „ „ ♂.
„ 9. „ *aberrans* „ (capo) ♀.
„ 10. *Saundersia picea* „ „ ♂.
„ 11. *Cyrthophloeba horrida* „ „ ♂.
„ 11*a*. „ „ „ (ala) ♂.
„ 12. *Xanthomelana articulata* van der Wulp (capo) ♂.
„ 13. *Plagia mexicana* Giglio-Tos (capo) ♀.
„ 14. *Myioscotiptera cincta* „ „ ♂.
„ 15. *Aporia elegans* „ „ ♂.
„ 16. *Tricholyga gracilens* „ „ ♂.
„ 17. *Hystrisiphona bicolor* „ „ ♂.
„ 18. *Blepharipoda mexicana* „ „ ♀.
„ 19. *Chaetogena carbonaria* „ „ ♂.

E. Giglio-Tos dis. dal vero

Lit. Salussolia-Torino

UCCELLI DEL SOMALI

RACCOLTI

DA

D. EUGENIO DEI PRINCIPI RUSPOLI

DESCRITTI

DA

TOMMASO SALVADORI

Memoria approvata nell'adunanza del 14 Gennaio 1894.

Nell'anno 1891 D. Eugenio dei Principi Ruspoli fece un viaggio di esplorazione nel paese dei Somali; di questo viaggio si trovano notizie in alcune lettere pubblicate nel Bollettino della Società Geografica Italiana per gli anni 1891 (pp. 738, 983, 1012) e 1893 (p. 689 con cartina dell'itinerario).

Il Ruspoli, durante il viaggio, ebbe cura di raccogliere animali, e la collezione degli Uccelli egli volle affidare ai miei studii fin dal 1892; altri lavori, pei quali io doveva, appunto in quel tempo, recarmi a Londra, m'impedirono prima d'ora di compiere lo studio affidatomi.

Come è noto, il Somali è una vasta penisola dell'Africa orientale, che si protende verso oriente nell'Oceano Indiano e che è compresa fra il 9° parallelo nord e l'Equatore.

L'Avifauna del Somali è molto incompiutamente conosciuta. Il primo uccello che si conobbe del Somali è il *Cynniris albiventris* descritto nel 1852 dallo Strickland (1).

Poscia apparve un Catalogo di una collezione di 36 specie di Uccelli raccolti dallo Speke, pubblicato nel 1855 dal Blyth (2), il quale vi descrisse tre specie nuove, che son sempre rimaste rarissime nelle collezioni (*Spreo albicapillus, Passer castanopterus, Sipheotides humilis*).

Lo Speke (3) nel 1860 publicò alcune notizie intorno ai costumi ed alla distribuzione delle specie da lui raccolte nel Somali e menzionate dal Blyth.

Il lavoro del Blyth, coll'aggiunta delle note dello Speke, fu ripubblicato a parte per cura dello Sclater (4) nell'anno 1860.

---

(1) " On a New Species of *Nectarinia* „ (*Contr. Orn.* 1852, pp. 42, 43, pl. LXXXVI).

(2) " Report on a Zoological Collection from Somâli Country „ (*J. A. S. B.* XXIV, *Aves*, pp. 298-305).

(3) " On Birds collected in the Somâli Country „ (*Ibis*, 1860, pp. 243-248, pl. VII).

(4) Report on a Zoological Collection from the Somali Country, by Edward Blyth, Curator of the Royal Asiatic Society's Museum, Calcutta. Reprinted from the twenty-fourth volume of the Journal of the Asiatic Society of Bengal, with Additions and Corrections by the Collector John Hanning Speke, Capt. Bomb. Nat. Inf., F. R. G. S., etc., London, 1860.

L'Heuglin (1) nel 1859 menzionò alcune specie della costa settentrionale del Somali, in un lavoro intorno agli Uccelli osservati e raccolti durante un viaggio nel Mar Rosso; alcune specie nuove da lui scoperte furono denominate e descritte dall'Hartlaub nello stesso lavoro (*Sylvia delicatula, Lanius somalicus, Otis heuglini*).

L'Oustalet (2) nel 1881 pubblicò un breve lavoro contenente la descrizione di due nuove specie del Somali (*Tockus deckeni* ed *Eupodotis gindiana*) e nell'anno successivo, 1882 (3), pubblicò un altro lavoro intorno a 21 specie di Uccelli raccolti dal Revoil nel Somali, e fra essi una specie era nuova, cioè il *Merops revoili*.

Lo Shelley (4) nel 1882, in un lavoro intorno ad una collezione di uccelli raccolti dal Kirk nell'Africa orientale, menzionò due specie del Somali il *Circaetus cinereus* ed il *Melierax poliopterus*.

Il Reichenow (5) nel 1883 descrisse lo *Struthio molybdophanes*.

Lo Shelley (6) nel 1885 pubblicò il Catalogo degli Uccelli raccolti dal Lort nel Somali; essi appartengono a 66 specie, delle quali vennero descritte come nuove le seguenti: *Coracias lorti, Dryoscopus ruficeps, Telephonus jamesi, Argya aylmeri, Saxicola phillipsi, Parus thruppi, Cursorius gallicus somalensis*.

Nel 1886 l'Hartlaub (7), correggendo una erronea identificazione dello Shelley, descrisse una nuova specie del genere *Trachyphonus*, che chiamò *T. shelleyi*.

Finalmente in un lavoro intorno agli " Uccelli raccolti durante il viaggio della Corvetta *Vettor Pisani* negli anni 1879, 1880 e 1881 „ io ed il Giglioli (8) pubblicammo una Lista di 13 specie di Uccelli del Somali, raccolti presso Durderi.

Altre specie del Somali si trovano sparsamente descritte in altri lavori e specialmente nei recenti volumi del *Catalogue of Birds in the British Museum* (I-XXII).

La collezione di uccelli fatta dal Ruspoli consta di 183 esemplari appartenenti a 77 specie e quindi è la più ricca che sia stata portata finora in Europa; essa non contiene molte specie nuove, giacchè quattro soltanto si possono considerare come tali (*Trachyphonus uropygialis, Lagonosticta somaliensis, Dienemellia ruspolii* e *Lamprotornis viridipectus*), tuttavia essa serve ad estendere le nostre cognizioni intorno alla distribuzione geografica degli Uccelli dell'Africa orientale, giacchè molte delle specie raccolte non erano state trovate finora nel Somali, e si conoscevano soltanto dello Scioa, o di regioni più meridionali.

Disgraziatamente il Ruspoli non ha unito agli esemplari alcun cartellino indicante le esatte località, nelle quali essi sono stati raccolti; tuttavia egli ha creduto

---

(1) " List of Birds observed and collected during a Voyage in the Red See „ (*Ibis*, 1859, pp. 337-352, pls. x, xi).

(2) " Oiseaux nouveaux de l'Afrique Orientale „ (*Bull. Soc. Philom. de Paris*, 1881, pp. 160-163).

(3) Revoil, Faune et Flor. Çomalis, *Oiseaux* (Estratto, pp. 1-14).

(4) " A Second List of Birds recently collected by Sir John Kirk in Eastern Africa „ (*P. Z. S.*, 1882, pp. 304-310, pl. xvii).

(5) " Ueber einen neuen Strauss „ (*Sonntagsbl. Norddeutsch. Allgem. Zeit.*, n° 37, 16 Sept.); " Immer Neues aus Africa „ (*Mitth. Orn. Ver. Wien*, 1883, p. 203, Taf.).

(6) " On Mr. E. Lort Phillips's Collection of Birds from Somali-land „ (*Ibis*, 1885, pp. 389-418, pls. xi, xii, xiii).

(7) " On a New Species of Barbet of the Genus *Trachyphonus* „ (*Ibis*, 1886, pp. 105-112, pl. v).

(8) " Memorie R. Acc. Sc. Tor. „, ser. II, t. XXXIX, pp. 101-104 (1888).

di poter dare a memoria per molti esemplari le indicazioni mancanti. Molti dei luoghi che si troveranno menzionati nel seguente Catalogo, non sono indicati nelle relazioni del viaggio publicate nel Bollettino della Società Geografica e nella Cartina che accompagna dette relazioni; il Prof. Dalla Vedova, Segretario della Società Geografica Italiana, al quale mi sono rivolto per schiarimenti intorno ai luoghi menzionati nel presente lavoro, mi ha dato le seguenti indicazioni, delle quali gli sono gratissimo:

Monti Golis (orlo montuoso verso il golfo di Aden dalla parte interna).

Oduin (pianura a Nord dell'Ogaden).

Uebi, fiume che più a valle di Ime, fra gli Scebeli, chiamasi Uebi Scebeli.

Valle di Hento, sulla destra dell'Uebi, poco a valle di Ime.

Valle Habir, sulla sinistra dell'Uebi presso Ime.

Montagne di Lido, sulla sinistra dell'Uebi, a valle di Ime.

Duxi Catabel, sulla destra dell'Uebi Scebeli, a sud di Barri.

Non sono riuscito ad avere precise indicazioni intorno ai luoghi: Banan o Bàrsan, Altipiano di Ghilai, Mandera, F. Adadle, Aduma e Gurat.

Nella cartina menzionata si trovano segnati Uarandab, Ogaden, Uebi e Bessera, quest'ultimo sulla destra dell'Uebi a valle di Ime.

A me corre l'obligo gradito di ringraziare l' egregio viaggiatore per la fiducia in me riposta, affidandomi lo studio della sua collezione ornitologica, e di fargli qui i più vivi augurii affinchè egli riesca a condurre a felice compimento il nuovo viaggio, che egli intraprese nell' anno decorso nello stesso paese dei Somali (Boll. Soc. Geogr. Ital., 1893, pp. 668, 708 con cartina) colla nobile ambizione di spingersi verso il Lago Rodolfo. A quanto pare, anche in questo secondo viaggio il Ruspoli non tralascia l'occasione di mettere insieme preziose collezioni zoologiche, botaniche e mineralogiche, che saranno argomento di nuovi studii. Colle nuove collezioni si potranno avere maggiori materiali per definire il carattere della fauna del Somali, che sembra costituire una provincia zoologica ben distinta dell'Africa Orientale.

Torino, Museo Zoologico, gennaio 1894.

---

1. Lophogyps occipitalis (Burch.).

Lophogyps occipitalis, Sharpe, Cat. B. I, p. 15 (1874). — Gurn., List Diurn. B. of Prey, p. 6 (1884).

a, *b*. (ad.). Banan.

Ambedue gli esemplari sembrano adulti, ma uno ha le remiganti secondarie bianche, mentre l'altro le ha di color grigio scuro; ambedue sono notevoli per avere il piumino formante il ciuffo occipitale e le piume bianche delle tibie e delle ali tinti di roseo, probabilmente dovuto a qualche ocra delle roccie frequentate dai medesimi.

2. Poliohierax semitorquatus (Smith).

Poliohierax semitorquatus, Sharpe, Cat. B. I, pp. 370, 459 (1874). — Gurn., List Diurn. B. of Prey, p. 94 (1884); Shell., Ibis, 1885, p. 391 (Somali).

a. Uarandab.

Esemplare col dorso castagno.

3. Melierax poliopterus (Cab.).

Melierax polyzonus, Blyth (nec Rüpp.), J. A. S. B. XXIV, p. 298 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 244 (Somali). — Blyth and Speke, Report Coll. Somali Country, p. 9 (1860).
Melierax poliopterus, Sharpe, Cat. B. I, p. 88 (1874). — Shell., P. Z. S. 1882, p. 305 (Somali). — Gurn., List Diurn. B. of Prey, p. 26 (1884).

a. (ad.). Somali.

4. Bubo lacteus (Temm.).

Bubo lacteus, Sharpe, Cat. B. II, p. 33 (1875). — Shell., Ibis, 1885, p. 392 (Somali).

a, *b*, *c*. Uarandab, Faf e Banan.

5. Bubo cinerascens, Guer.

Bubo africanus, Blyth (nec Temm.), J. A. S. B. XXIV, p. 298 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 244 (Somali). — Blyth and Speke, Report Coll. Somali Country, p. 9 (1860).
Bubo cinerascens, Sharpe, Cat. B. II, p. 32 (1875).

a. (ad.). Altipiano di Ghilai.

6. Scops leucotis (Temm.).

Scops leucotis, Sharpe, Cat. B. II, p. 97 (1875).

a, *b*, *c*. (ad.). Duxi Katabel.

7. Carine spilogastra (Heugl.).

Noctua spilogastra, Heugl., Orn. N. O. Afr., I, p. 119, tab. IV (1869-74).
Carine spilogastra, Sharpe, Cat. B. II, p. 138 (1875). — Salvad. e Gigl. Mem. R. Ac. Sc. Tor. (2) XXXIX, p. 101 (Durderi, Somali) (1888).
Carine glaux, Shell. (nec Savigny), Ibis, 1885, p. 392 (Somali).

a, *b*, *c*. (ad.) Duxi Katabel ed Habir.

Piccola specie, che mi sembra distinta dalla *C. glaux* (Savigny).

8. Pœocephalus rufiventris (Rüpp.).

Pœocephalus rufiventris, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 298 (1855) (Somali). — Speke, Ibis, 1860, p. 243. — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 9 (1860). — Shell., Ibis, 1885, p. 393. — Salvad., Cat. B. XX, p. 372 (1891).

a-g. Cinque maschi e due femmine adulti. Sud dei Monti Golis.

9. Trachyphonus shelleyi, Hartl.

Trachyphonus erythrocephalus, Shell. (nec Cab.), Ibis, 1885, p. 394 (Somali).
Trachyphonus shelleyi, Hartl., Ibis, 1886, pp. 105, 111, pl. V (Somali). — Shell., Cat. B. XIX, p. 103 (1891).

a. Somali.

Esemplare adulto simile alla figura data dall'Hartlaub.

10. Trachyphonus uropygialis, nov. sp.

Trachyphonus T. boehmi F. et R. *simillimus, sed supracaudalibus lateralibus coccineis, mediis, apicalibus et basalibus flavis.*

Pileo subcristato nigro, plumis nonnullis posterioribus apice flavis; capitis et colli lateribus gulaque laete sulphureo-flavis, nigro minutissime maculatis; plumis nonnullis supraciliaribus, genarum et menti flavo-rubentibus; collo postico fusco, plumarum apice flavo-sulphureo, strictissime nigro-limbato; interscapulio, alarum tectricibus, scapularibus, remigibusque fuscis, maculis plus minusve rotundatis albis notatis; tergo et uropygio dilute flavis; supracaudalibus flavis, sed lateralibus coccineis; rectricibus fuscis, in utroque pogonio albo-flavido maculatis; scutello gutturali chalybeo-nigro; pectore et epigastrio flavis, maculis minutissimis nigris rarius notatis; fascia pectorali interrupta e plumis nigris, macula apicali rotundata alba ornatis, composita; abdomine pallide albo-flavescente; subcaudalibus coccineis; rostro pallide corneo, pedibus nigricantibus.

Long. tot. circa 170 mill.; al. 70 mill.; caud. circa 60 mill.; rostri culm. 17 mill.; tarsi 22 mill.

a. Somali.

11. Campothera nubica (Gm.).

Dendrobates æthiopicus, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 299 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 244 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 10 (1860).
Campothera nubica, Harg., Cat. B. XVIII, p. 93 (1890).

a, *b*, *c*. ♂. (ad.). Mandera.

12. Dendropicus hemprichi (Ehrenb.).

Dendromus hemprichii, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 299 (1855) (Somali). — Speke, Ibis. 1860, p. 345 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 11 (1860).
Dendropicus hemprichi, Shell., Ibis, 1885, p. 393 (Somali). — Hargitt, Cat. B. XVIII, p. 300 (1890).

a. ♂. Uebi, Valle Habir.

13. Schizorhis leucogaster (Rüpp.).

Chizæris leucogaster, Blyth, J.A.S.B. XXIV, p. 299 (Somali) (1855). — Blyth and Speke, Report Coll. Somali Country, p. 11 (1890).
Schizorhis leucogaster, Speke, Ibis, 1860, p. 245 (Somali). — Shell., Ibis, 1885, p. 400 (Somali).

a-*d*. (ad.). Odeuin, Uebi.

14. Colius leucotis, Rüpp.

Colius leucotis, Sharpe, Cat. B. XVII, p. 341, pl. XII, f. 1 (1892).

a, *b*, *c*. (ad. et juv.). Valle di Habir.

Gli adulti hanno la cervice e la parte anteriore del collo con strette fascie scure ben distinte; nel giovane quelle fascie sono meno distinte.

15. Merops persicus, Pall.?

Merops persicus, Sharpe, Cat. B. XVII, p. 66 (1892).

a. (juv.). Habir.

Esemplare giovane colle due timoniere mediane incompiutamente sviluppate, e poco più lunghe delle laterali; esso è notevole pel colore verde volgente all'azzurrognolo, specialmente sul sopraccoda e sul sottocoda, pei quali caratteri somiglia al *Merops philippinus,* Linn.!

16. Merops nubicus, Gm.

Merops nubicus, Shell., Ibis, 1885, p. 397 (Somali). — Sharpe, Cat. B. XVII, p. 85 (1892).

a, *b*, *c*. (ad.). Somali.

17. Melittophagus cyanostictus, Cab.

Melittophagus cyanostictus, Sharpe, Cat. B. XVI, p. 48, pl. I, f. 3 (1892).

a-d. Uebi, Valle di Hento.

Simili in tutto agli esemplari dello Scioa.

18. Halcyon semicæruleus (Forsk.).

Halcyon semicærulea, Shell., Ibis., 1885, p. 395 (Somali).
Halcyon semicæruleus, Sharpe, Cat. B. XVII, p. 232 (1892).

a-e. (ad. et juv.). Uebi.

I giovani hanno l'addome ed il sottocoda di color castagno molto più chiaro che non gli adulti.

19. Irrisor sp.

Promerops senegalensis, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 299 (Somali) (1885). — Blyth and Speke, Report Coll. Somali Country, p. 10 (1860).
Irrisor senegalensis (Vieill.) Speke, Ibis, 1860, p. 244 (Somali).
Irrisor erythrorhynchus, Shell. (nec Lath.?), Ibis, 1885, p. 395 (Somali).
Irrisor viridis, Salv., Cat. B. XVI, p. 17 (1892).

a-d. Fiume Adadle.

I quattro esemplari sono apparentemente adulti; essi hanno il becco nero, ma in due la base della mandibola inferiore è tinta di rosso.

Io non riesco ad identificare con certezza gli esemplari suddetti; il Salvin attribuisce, almeno nella sinonimia, gli esemplari del Somali all'*Irrisor viridis,* ma io non trovo che essi differiscano da quelli dello Scioa, che dal Salvin vengono riferiti all'*I. erythrorhynchus!*

20. Rhinopomastes minor (Rüpp.).

Promerops minor, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 299 (Somali) (1855). — Blyth and Speke, Report Coll. Somali Country, p. 10 (1860).
Irrisor minor, Speke, Ibis, 1860, p. 224 (Somali). — Oust., in Revoil's Faun. et Flore Çomalis, Ois., 1882, p. 7 (Somali).
Rhinopomastus minor, Salv., Cat. B. XVI, p. 26 (1892).

a, b. (ad.). Fiume Adadle e Monti Golis.

Il primo è simile ad un esemplare dello Scioa in abito perfetto; il secondo ha i lati della testa e le parti inferiori di color bruno.

21. Lophoceros erythrorhynchus (Temm.)?

Buceros erythrorhynchus, Heugl., Ibis, 1859, p. 343 (Somali).
Lophoceros erythrorhynchus, Grant, Cat. B. XVII, p. 409 (1892).

a, *b*. Valle dell'Uebi.

Non sono al tutto certo che gli esemplari suddetti appartengano alla specie indicata, giacchè hanno i lati della testa interamente bianchi come le parti inferiori, la prima timoniera esterna quasi interamente bianca, e la seconda pure bianca, tranne i due quinti della base nera. Mi pare che gli esemplari suddetti siano intermedi fra quelli del vero *L. erythrorhynchus* e quelli del *L. damarensis*, Shell.

Il Grant riferisce al *L. erythrorhynchus* un esemplare di Capangombe (Mossamedes), ma uno della stessa località, inviato al Museo di Torino da quello di Lisbona, ha le macchie bianche delle ali circondate da un margine bruno, anche all'apice, la quale cosa non è nel vero *L. erythrorhynchus*, e forse quelli di Capangombe spettano a specie distinta.

22. Lophoceros flavirostris (Rüpp.).

Buceros (Tockus) flavirostris, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 299 (Somali) (1855).
Buceros flavirostris, Speke, Ibis, 1860, p. 244 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country p. 10 (1860).
Lophoceros flavirostris, Shell., Ibis, 1888, p. 67. — Grant, Cat. B. XVII, p. 412 (1892).
Tockus flavirostris, Salvad. e Gigl. Mem. R. Ac. Sc. Tor. (2) XXXIX, p. 101 (Durderi) (1888).

a, *b*. (ad.). Valle dell'Uebi.

Durante la stampa di questo lavoro il Reichenow ha pubblicato la descrizione di un *Lophoceros somaliensis* (*Journ. f. Orn.* 1894, p. 96) raccolto dal Dr. Hildebrandt presso Meid nel Somali, e che finora era stato riferito al *L. flavirostris*, dal quale tuttavia differisce per avere la mandibola inferiore tinta di rosso; questa cosa non si osserva nell'esemplare della Valle dell'Uebi, che perciò mi sembra debba essere riferito al *L. flavirostris*.

23. Coracias garrula, Linn.

Coracias garrulus, Sharpe, Cat. B. XVII, p. 15 (1892).

a, *b*. Uarandab e Duxi Kataber.

24. Coracias nævia, Daud.

Coracias nævius, Sharpe, Cat. B. XVII, p. 24 (1892).

a, *b*. (ad.). Aduma.

25. Coracias lorti, Shell.

Coracias lorti, Shell., Ibis, 1885, p. 399 (Somali). — Salvad., Ann. Mus. Civ. Gen. (2), VI, p. 224 (1888) (Scioa). — Sharpe, Cat. B. XVII, p. 20 (1892).

a-j. (ad. et juv.). Regione fra l'Uebi ed il Giuba ed altipiano di Ghilai.

I giovani hanno le due timoniere esterne più brevi delle altre, i colori molto più sbiaditi, il groppone senza la tinta azzurra indaco, ed il colore violaceo lilla della gola in alto più sbiadito.

26. **Hirundo rustica**, Linn.

Hirundo rustica, Sharpe, Cat. B. X, p. 128 (1885). — Id., Mon. Hirund. pts. XVI, XVII (1893).

a. (ad.). Uebi.

Nuova pel Somali.

27. **Buchanga assimilis** (Bechst.).

Dicrurus lugubris, Ehrenb. — Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 303 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 247 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somaly Countri, p. 14 (1860).
Buchanga assimilis, Sharpe, Cat. B. III, p. 247 (1873). — Shell., Ibis, 1885, p. 401 (Somali).

a. Esemplare non adulto colla coda imperfetta e colle cuopritrici inferiori delle ali e colle piume del sottocoda marginate all'apice di bianco.

28. **Lanius dorsalis,** Cab.

Lanius (Fiscus) dorsalis, Cab. J. f. O. 1878, pp. 205, 225.
Lanius dorsalis, Oust. in Revoil's Faun. et Flor. Çomalis, Ois. p. 10 (1882) (Somali). — Shell., Ibis, 1885, p. 401 (Somali). — Salvad. e Gigl. Mem. R. Ac. Sc. Tor. (2) XXXIX, p. 101 (Durderi) (1888).

a, b, c. (ad. et juv.). Banan.

Il giovane ha il pileo con molte piume grigio-brune; il dorso, il groppone ed il sopraccoda con traccie di fascie scure trasversali, le cuopritrici delle ali e le remiganti terziarie coi margini chiari; anche le piume bianche delle parti inferiori hanno traccie di fascie scure.

Io sospetto che il *Lanius somalicus,* Hartl., Ibis, 1859, p. 342, incompiutamente descritto, sia da riferire a questa specie.

29. **Rhodophoneus cruentus** (H. et E.).

Laniarius cruentus, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 303 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 247 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 14 (1860). — Gadow, Cat. B. VIII, p. 152 (1883). — Shell., Ibis, 1885, p. 402 (Somali).

a-i. Nove esemplari adulti, quattro col sottogola nero, e cinque senza, questi avendo tutta la parte mediana della gola rossa.

30. **Nilaus brubru** (Lath.).

Nilaus capensis (Shaw) — Heugl., Ibis, 1859, p. 342 (Rio Gore presso Berbera, Somali). — Gadow, Cat. B. VIII, p. 168 (1883).

a. ♂. Somali.

Esemplare adulto simile in tutto ad altro del Matabele.

31. **Monticola saxatilis** (Linn.).

Monticola saxatilis, Seebh., Cat. B. V, p. 13 (1881).

a, b. ♂ ♀. Somali.

Esemplari in abito invernale; il maschio è un poco più piccolo di altri d'Europa in abito corrispondente.

Specie nuova pel Somali.

32. **Saxicola leucomela** (Pall.).

Saxicola morio, H. et E. — Seebh., Cat. B. V, p. 372 (1881).

a. Somali.

33. **Saxicola phillipsi**, Shell.

Saxicola phillipsi, Shell., Ibis, 1885, p. 404, pl. XII (Somali).

a. (ad.). Somali.

Simile in tutto alla figura citata.

34. **Cinnyris hunteri**, Shell.

Cinnyris hunteri, Shell. P. Z. S. 1889, p. 365, pl. XLI, f. 2 (Useri River).

a. ♂. Mandera, o Monte Golis.

Esemplare adulto, cui bene si attagliano la descrizione e la figura dello Shelley.

35. **Cinnyris habessinicus** (H. et E.).

Nectarinia habessinica, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 303 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 247 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 14 (1860). — Oust. in Revoil, Faun. et Flor. Çomalis, Ois. p. 8 (1882).
Cinnyris habessinicus, Shell., Mon. Nect. p. 205, pl. 63.

a, b. ♂. (ad.). Mandera, o Monti Golis.

36. **Cinnyris albiventris** (Strickl.).

Nectarinia albiventris, Strickl., Contr. Orn. 1852, p. 42, pl. 86 (Ras Assoun, potius Ras Hafoun, Somali). — Sclat., tom. cit. p. 124 (1852). — Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 303 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 247 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 14 (1860).
Cinnyris albiventris, Shell., Mon. Nect. p. 233, pl. 73. — Salv., Cat. B. Strickl. Coll. p. 165 (Tipi) (1882).
Cinnyris venusta, part., Gadow, Cat. B. IX, p. 39 (1884).

a, b. ♂. (ad.). Mandera, o Monti Golis.

Specie rarissima nelle collezioni, mancante nel Museo Britannico, e della quale si conoscono soltanto i tipi, maschio e femmina, nel Museo di Cambridge, e gli esemplari raccolti dallo Speke, che suppongo siano conservati nel Museo di Calcutta.

37. Tmetothylacus tenellus (Cab.).

Macronyx tenellus, Cab., J. f. O. 1878, pp. 205, 220, tab. II, f. 3 (Taita). — Fischer, J. f. O. 1879 p. 299. — Fisch. et Rchnw., ibid. p. 355 (Kibaradja). — Shelley, P. Z. S. 1881, p. 574 (Lamu).
Tmetothylacus tenellus, Cab., J. f. O. 1879, p. 438.
Anthus tenellus, Sharpe, Cat. B. X, p. 618 (1885).

a-d. (ad. et juv.). Montagne di Lido.

La figura di questa specie (loc. cit.) mostra la fascia pettorale nera più stretta di quello che non sia negli esemplari adulti soprannoverati.

Questa specie è notevolissima, oltre che pel suo colorito, per avere i tarsi inferiori nudi, pel quale carattere il Cabanis ha creduto di doverne fare il tipo di un genere distinto, che è stato ommesso nel vol. X del " Catalogue of Birds ".

Il giovane ha le parti superiori di color bruno pallido, coi margini delle piume più chiari, le parti inferiori di color fulvo con una lieve tinta gialla sull'addome; le cuopritrici inferiori delle ali gialle, le remiganti con un sottile margine giallo esterno e largo verso la base del vessillo interno; la coda è bruna, ma le due timoniere esterne sono in gran parte gialle; il tarso (0,029) è un poco più lungo che non negli esemplari adulti!

38. Motacilla boarula, Linn.

Motacilla melanope, Pall. — Sharpe, Cat. B. X, p. 497 (1885).

a. (ad.). Somali.

Esemplare in abito invernale.

Lo Sharpe (loc. cit.) non menziona l'Africa nell'*Habitat* di questa specie.

39. Linura fischeri (Rchnw.).

Vidua fischeri, Shell., Ibis, 1886, p. 342. — Salvad. e Gigl., Mem. R. Ac. Sc. Tor. (2) XXXIX, p. 103 (Durderi) (1888).
Linura fischeri, Salvad., Ann. Mus. Civ. Gen. (2), VI, p. 104 (1888). — Sharpe, Cat. B. XIII, p. 210 (1890).

a-e. ♂. (ad.). Regione dei laghi a sud del Deserto di Ogaden.

40. Lagonosticta somaliensis, sp. nov.

Lagonosticta L. brunneicipiti Sharpe, *similis, sed colore rubro magis roseo, et dorsum tectricesque alarum quoque tingente.*

a. ♂. (ad.). Somali.

Esemplare adulto col mezzo del pileo e coll'occipite di color bruno, lievemente tinto di roseo; esso differisce dagli esemplari dello Scioa per avere il colore rosso della testa, del collo, delle parti superiori e del petto, decisamente roseo, e che colora anche il dorso e le cuopritrici delle ali.

41. Dinemellia dienemelli (Rüpp.).

Textor dienemelli, Shell., Ibis, 1885, p. 409 (Somali).
Dienemella dinemelli, Sharpe, Cat. B. XIII, p. 506 (1890).

a, b, c. Banan.

Esemplari adulti simili ad altri dello Scioa.

42. Dienemellia ruspolii, nov. sp.

Dienemellia D. dienemelli *similis, sed minor, colore fusco notaei valde pallidiore, parte basali alba remigum valde latiore et non abrupte divisa, sed sensim in colorem fuscum partis apicalis transeunte, parte basali pogonii interni tectricum remigum primariarum alba, margineque carpali albo rubro-tincto, distinguenda.*

Testa, collo, petto ed addome bianchi; dorso e remiganti terziarie di color bruno-grigio pallido, le ultime e le scapolari marginate esternamente di bianco; groppone, sopraccoda e sottocoda rosso-minio, cuopritrici minori presso l'angolo dell'ala rosso-minio; remiganti primarie bianche per tre quinti della base, e la parte bianca non nettamente separata dal color bruno nero dei due quinti apicali, ma il bianco passa gradatamente nel bruno nero; lo stelo delle remiganti primarie bianco per gran parte della porzione apicale scura; anche inferiormente la porzione bianca delle remiganti occupa gran parte del vessillo interno e passa gradatamente nel colore grigio scuro dell'apice; cuopritrici delle remiganti primarie bianche alla base e nel vessillo interno; margine carpale bianco tinto di rosso-minio; cuopritrici inferiori delle ali e piume delle tibie grigie; coda bruna, collo stelo delle timoniere bianco inferiormente; becco corneo scuro; piedi neri.

		D. dienemelli
Lunghezza totale . . .	0^m,200	0^m,210
Ala	0^m,110	0^m,122
Coda	0^m,070	0^m,083
Becco	0^m,020	0^m,021
Tarso	0^m,030	0^m,032

a. Banan (?).

L'esemplare tipo di questa specie è indicato di Banan, come i tre della specie precedente, ma forse la indicazione non è esatta, giacchè, come ho notato nell'introduzione, il Ruspoli non ha messo cartellini colla località agli esemplari raccolti, e le località indicate sono state aggiunte a memoria dopo il suo ritorno.

43. Textor intermedius, Cab.

Textor intermedius, Shell., Ibis, 1885, p. 410 (Somali). — Sharpe, Cat. B. XIII, p. 511 (1890).

a, b, c. Habir.

I primi due sono adulti in abito perfetto nero; il terzo è un giovane colle parti superiore brune; le piume delle parti inferiori hanno macchie lanceolate nere nel mezzo e larghi margini chiari; le remiganti e le cuopritrici delle ali sono marginate esternamente di rossigno fulvo.

44. **Hyphantornis intermedia** (Rüpp.).

Hyphantornis intermedius, Sharpe, Cat. B. XIII, p. 460 (1890).

a, *b*. ♂ ♀. Somali.

Il maschio non è perfettamente adulto, avendo qualche piuma gialla fra le nere della gola; esso differisce alquanto da un esemplare adulto dello Scioa (Salvad., *Ann. Mus. Civ. Gen.* (2), VI, p. 290), per avere il dorso di color verde-giallognolo meno giallo e senza macchie nere lungo il mezzo delle piume, pel groppone di un giallo meno vivo, pel colore castagno che tinge l'occipite e la cervice meno intenso ed anche pel colore giallo delle parti inferiori più chiaro.

La femmina, non ancora descritta, ha le parti superiori di colore verde-olivastro, con macchie scure lungo il mezzo delle piume del dorso; i lati della testa e le parti inferiori di color bianchiccio lievemente tinto di giallo; sulla regione del gozzo una lieve tinta fulviccia; le remiganti e le timoniere bruniccie con i margini verdognoli.

È questa una specie rarissima nelle collezioni.

45. **Lamprocolius chalybeus** (Ehr.).

Lamprocolius chalybeus, Sharpe, Cat. B. XIII, p. 176 (1890).

a. (ad). Valle di Hento.

Simile agli esemplari dello Scioa. Questa specie non si conosceva finora del Somali, che probabilmente segna il confine meridionale della medesima.

46. **Heteropsar** (?) **albicapillus** (Blyth).

Spreo albicapillus, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 301 (1855) (Somali).
Notauges albicapillus, Hartl. — Speke, Ibis, 1860, p. 246, pl. VII (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 12 (1860). — Shell., Ibis, 1885, p. 413 (Somali).
Heteropsar albicapillus, Sharpe, Cat. B. XIII, p. 186 (1890).

a. Pianura di Uarandab.

Questa specie, esclusiva del Somali, è rarissima nelle collezioni, ed anche una delle più singolari per la sua colorazione. La sua posizione nel sistema non mi sembra ben determinata.

47. **Cosmopsarus regius**, Rchnw.

Cosmopsarus regius, Shell., Ibis, 1885, p. 411 (Somali). — Sharpe, Cat. B. XIII, p. 160 (1890).

a-g. Uebi, Uebi Sciabeli, Hento, Banan.

Sette esemplari; uno in abito imperfetto ha molte piume brune sulla testa, residuo dell'abito giovanile, e così pure fra le cuopritrici delle ali; fra le piume gialle delle parti inferiori ve ne sono molte fulve, anch' esse residuo dell' abito giovanile.

48. Notauges superbus (Rüpp.).

Lamprotornis superba, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 301 (Somali) (1855).
Notauges superbus, Speke, Ibis, 1860, p. 245 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 12 (1860). — Shell., Ibis, 1885, p. 412 (Somali).
Spreo superbus, Sharpe, Cat. B. XIII, p. 189 (1890).

a-c. (ad.). Uarandab e Mandera.

49. Lamprotornis viridipectus, sp. nov.

? **Lamprotornis purpuropterus,** Cab. (nec Rüpp), J. f. O. 1878, p. 233 (Adi). — ? Fisch. et Rchnw., ibid., p. 261 (Wito). — Fischer, ibid., p. 286 (Wito). — ? Id., Zeitschr. f. ges. Orn. I, p. 336 (Nguruman) (1884).
? **Lamprotornis porphyropterus,** Fisch. et Rchnw., J. f. O. 1879, p. 349 (Ualimi). — Sharpe, Cat. B. XIII, pp. 156, 157 (part., Adi River) (1890).

Lamprotornis L. caudato (= aeneo, Gm.) *similis, sed valde minor, cervice cyanescente, lateribus obscure cyanescentibus, minime violaceis et abdomine medio quoque obscure cyanescente, sed minime aeneo-cupreo.*

Capite obscure aeneo; collo postico viridi cyanescente, dorso viridi, vix cyaneo micante, tergo, uropygio et supracaudalibus nitide cyaneis, paullum purpureo tinctis; collo antico et pectore summo nitide et pure viridibus; lateribus, abdomine et subcaudalibus obscure cyanescentibus; alis nitide viridibus; cauda supra cyaneo-purpurascente, rectricibus mediis purpureis, omnibus transversim fasciolatis.

Long. tot. 0^{m},270; al. 0^{m},140; caud. 0^{m},125; rostri culm. 0^{m},016; tarsi 0^{m},039.

a, b. Valle di Hento.

Gli esemplari suddetti hanno grande somiglianza con quelli della *L. caudata,* ma non dubito punto che essi appartengano ad una specie distinta, alla quale molto probabilmente è da riferire l' esemplare del Fiume Adi raccolto dall'Hildebrandt e menzionato dallo Sharpe (loc. cit.).

Io inclino ad ammettere che nella sezione del genere *Lamprotornis,* distinta pel colore bronzato della testa, siano da riconoscere quattro specie distinte:

a. Pectore nitide et pure viridi:
- *a.* Dorso pure viridi; plaga abdominali media nitide aeneo-cuprea . *L. caudata.* (Africa occidentali).
- *b.* Dorso viridi, vix cyanescente; abdomine concolore, obscure cyanescente et plaga abdominali media aeneo-cuprea destituto . *L. viridipectus.* (Somali et Africa orient.).

b. Pectore distincte cyaneo-purpurascente; plaga abdominali media nitidissime aureo-aenea:
- *c.* Cervice et dorso summo cyaneo-purpurascentibus . . . *L. eytoni.* (Africa occid. et Sudan).
- *d.* Cervice nitidissime purpurea, dorso summo cyaneo-purpurascente . *L. porphyroptera.* (Scioa).

50. Dilophus carunculatus (Gm.).

Dilophus carunculatus, Sharpe, Cat. B. XIII, p. 61 (1890).

a. Somali.

Non si conosceva ancora del Somali.

51. Buphaga erythrorhyncha (Stanl.).

Buphaga erythrorhyncha, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 301 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 246 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 12 (1860). — Shell., Ibis, 1885, p. 410. — Sharpe, Cat. B. XIII, p. 196 (1890).

a-d. Pianura di Uarandab.

52. Vinago waalia (Gm.).

Treron waalia, Shell., Ibis, 1885, p. 414 (Somali).
Vinago waalia, Salvad., Cat. B. XXI, p. 15 (1893).

a, *b*, *c*. Mandera e monti Golis.

53. Chalcopelia afra (Linn.).

Chalcopelia afra, Salvad., Cat. B. XXI, p. 506 (1893).

a. (ad.). Somali.

Varietà colle macchie verdi dorate sulle ali. Nuova pel Somali.

54. Oena capensis (Linn.).

Oena capensis, Salvad., Cat. B. XXI, p. 501 (1893).

a. ♂. Somali.

Nuova pel Somali.

55. Pteroclurus exustus (Temm.).

Pterocles senegalensis, Blyth (nec *Pt. senegallus*, Linn.), J. A. S. B. XXIV, p. 303 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 247 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 14 (1860).
Pteroclurus exustus, Grant, Cat. B. XXII, p. 12 (1893).

a-d. Valle di Hento fra i Monti Lido e Yesi (?).

Due maschi e due femmine.

Credo che le citazioni del Blyth e dello Speke appartengano a questa specie e non al *P. senegallus,* come ha stimato l'Ogilvie-Grant (loc. cit.).

56. Pterocles decoratus, Cab.

Pterocles sp. ?, Sclat., P. Z. S. 1864, p. 113 (Uniamesi).
Pterocles decoratus, Cab. in v. d. Decken Reisen, III, p. 43, t. XIII (1869) (See Jipe). — Id., J. f. O. 1868, p. 413. — Finsch u. Hartl., Vög. Ostafr., p. 565 (1870). — Grant, Cat. B. XXII, p. 21 (1893).

a. Valle di Habir.

Esemplare adulto, apparentemente maschio, simile alla figura sopramenzionata, ma colla fascia nera a traverso il petto non interrotta, ma completa.

Nuovo pel Somali.

57. Pterocles lichtensteini, Temm.

Pterocles lichtensteini, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 305 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 247 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 14 (1860). — Grant, Cat. B. XXII, p. 29 (1893).

a-c. Pianura di Uarandab.

Tre esemplari senza le fascie nere sul capo e sul petto, e perciò senza dubbio femmine.

58. **Acryllium vulturinum** (Hardw.).

Numida vulturina, Shell., Ibis, 1885, p. 414 (Ogadayn, Somali).
Acryllium vulturinum, Grant, Cat. B. XXII, p. 385 (1893).

a-f. Somali.

Il Ruspoli menziona di aver trovato questa specie nell'Ogaden (*Boll. Soc. Geogr. Ital.* 1891, p. 984).

59. **Francolinus granti,** Hartl.

Francolinus granti, Shell., Ibis, 1885, p. 414 (part.) (Somali). — Grant, Ibis, 1892, p. 42 (part.). — Id., Cat. B. XXII, p. 148 (part.) (1893).

a, b. Pianura di Odeuin.

Due esemplari adulti con lunghi sproni, e quindi senza dubbio maschi.

Io sono di opinione che gli esemplari suddetti siano sufficientemente distinti dal *F. schoanus,* Heugl; essi si distinguono pei seguenti punti:

1° Le piume delle parti superiori hanno molto più del colore castagno.

2° Le macchie castagne del collo si estendono molto più in basso fin sul petto.

3° Le timoniere laterali hanno più di castagno verso la base, ed in uno dei due esemplari del Somali le quattro timoniere mediane sono di color castagno puro.

60. **Pternistes infuscatus,** Cab.

Pternistes rubricollis, Blyth, J. A. S. B., XXIV, p. 304 (Somali) (1855). — Speke (nec Lath.), Ibis, 1860, p. 248 (Somali). — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 15 (1860).
Pternistes leucoscepus, Salvad. (nec G. R. Gr.), Ann. Mus. Civ. Gen. (2) I, p. 309 (Scioa) (1888).
Pternistes infuscatus, Cab. — Grant, Cat. B. XXII, pp. 183, 560 (1893).

a. (juv.). Somali.

L'esemplare suddetto, come anche quelli dello Scioa, sono simili in tutto ad un altro del Fiume Usari (*Hunter*), inviato dal Museo Britannico a quello di Torino.

61. **Heterotis humilis** (Blyth).

Sypheotides humilis, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 304 (1855) (Somali). — Speke, Ibis, 1860, p. 248. — Blyth and Speke, Rep. Coll. Somali Country, p. 15 (1860). — Heugl., Faun. d. Roth. Meer, No. 228. — Finsch u. Hartl., Vög. Ostafr., p. 618 (1870).
Heterotis humilis, Sharpe, Bull. Br. Orn. Club, No. IX, p. L (1892).

a. Altipiano di Ghilai.

Questa specie è notevole per la sua piccolezza e per la brevità del suo tarso; a me sembra che non si possa separarla dal gruppo di specie contenente l'*O. senegalensis,* l'*O. canicollis,* ecc. Essa ha colorito generale isabellino arenaceo, finamente punteggiato di nero, l'addome ed il sottocoda bianco, il collo grigio, la gola nera

(colle piume bianche all'apice), una macchia nera sull'occipite, le ascellari nere e le cuopritrici delle remiganti primarie bianche nella metà basale e nere nell'apicale. L'esemplare di Ghilai corrisponde abbastanza bene colla descrizione del Blyth, se non che in questa non è menzionata la macchia occipitale nera; inoltre nella medesima è detto che le piume del pileo formano un ciuffo distinto, la quale cosa certo non appare nell'esemplare sopra menzionato! Lunghezza del tarso 0^m,064 (= pollici inglesi 2 $^1/_2$).

62. **Neotis heuglini** (Hartl.).

Otis heuglini, Hartl., Ibis, 1859, p. 344, pl. XI (♂) (Tchuscha, Somali). — Finsch u. Hartl., Vög. Ostafr., p. 613 (1870). — Heugl., Orn. N. O. Afr. II, p. 942 (1873).
Eupodotis heuglini, Heugl., Peterm. Geogr. Mitth. 1860, Taf. 18.
Neotis heuglini, Sharpe, Bull. Br. Orn. Club, VIII, p. L (1893).

a. Pianura di Faf.

L'esemplare suddetto corrisponde colla descrizione dell'*Otis heuglini,* specialmente per avere le piume della parte inferiore ed anteriore del collo di color rugginoso vivo, ma ne differisce per non avere la maschera nera coprente i lati della testa e della gola, come nella figura pubblicata nell'Ibis, 1859, pl. XI; invece esso ha i lati della testa e la gola bianchicci con macchiette nere; in un altro esemplare del Museo di Torino, d'ignota località, la gola è interamente bianca; suppongo che la mancanza della maschera nera sia carattere della femmina, o dipendente dalla stagione.

63. **Lophotis gindiana** (Oust.).

Eupodotis gindiana, Oust., Bull. Soc. Philom. de Paris, 1881 (août), p. 163 (Extract, p. 4) (Afrique orientale).
Otis (Lophotis) fulvicrista, Cab., Orn. Centralbl. 1882, no. 2 Jan., p. 14 (Berdera, Somali). — Rchnw. u. Schal., Journ. f. Orn. 1882, p. 113.
Lophotis fulvicrista, Cab., J. f. O. 1882, p. 123; Rchnw., Zool. Jahresb. f. 1882, p. 223.
Lophotis gindiana, Salvad., Ann. Mus. Civ. Gen. (2) VI, p. 543 (1888) (Scioa).

a, b. Habir presso Bessera.

Esemplari adulti, maschio e femmina, simili ad una coppia dello Scioa.

64. **Cursorius somalensis,** Shell.

Cursorius gallicus somalensis, Shell., Ibis, 1885, p. 415 (Somali).
Cursorius somalensis, Seebh., Ibis, 1886, p. 116. — Id., Geogr. Distr. Charadr., p. 237, pl. XI (1887).

a, b. (ad.). Pianura di Uarandab.

Questa specie, come ha fatto notare il Seebhom, è perfettamente distinta dal *C. gallicus,* per le piume ascellari e per le cuopritrici inferiori delle ali di color grigio isabellino e non guari nero, per le dimensioni minori e per altri caratteri; essa si conosceva nei Musei di Europa solo per l'esemplare tipico raccolto dal Lort.

65. **Hoplopterus spinosus** (Linn.).

Hoplopterus spinosus, Heugl., Orn. N. O. Afr. II, p. 1004 (1873).
Vanellus spinosus, Seebh., Geogr. Distr. Charadr., p. 219, cum fig. (1887).

a-c. Gurat.

Non era stato menzionato finora del Somali.

66. **Stephanibyx coronata** (Gm.).

Chettusia coronata, Shell., Ibis, 1885, p. 417 (Somali).

a, *b*. Pianura di Uarandab.

Questa specie si estende verso Nord, fin nello Scioa (Salvad., *Ann. Mus. Civ. Gen.* (2), I, p. 220).

67. **Ardea purpurea**, Linn.

a, Gurat, Regione dei Laghi.

68. **Ardea melanocephala**, Vig. et Childr.

a. (ad.). Bessera, Uebi.

69. **Ardetta minuta** (Linn.).

a. ♂. (ad.). Pianura di Uarandab (!).

70. **Ciconia abdimii**, Licht.

a. (ad.). Valle di Habir, presso Bessera.

71. **Fulica cristata**, Gm.

a-c. Gurat, Regione dei laghi.

72. **Chenalopex ægyptiacus** (Linn.).

Chenalopex ægyptiacus, Blyth, J. A. S. B. XXIV, p. 305 (Somali) (1855). — Speke, Ibis, 1860, p. 248 (Somali). — Blyth and Speke, Report Coll. Somali Country, p. 15 (1860).

a, *b*. (ad.). Gurat.

73. **Dendrocygna viduata** (Linn.).

Dendrocygna viduata, Shell., Ibis, 1885, p. 414 (Somali).

a-d. (ad.). Gurat.

74. **Pœcilonetta erythrorhyncha**, Gm.

Pœcilonitta erythrorhyncha, Shell., Ibis, 1885, p. 415 (Somali).

a. (ad.). Gurat.

75. **Querquedula circia** (Linn.).

a. ♀. (ad.). Gurat.

76. **Spatula clypeata** (Linn.).

a. Gurat (?).

77. **Podiceps capensis**, Licht.

Podiceps capensis, Salvad., Ann. Mus. Civ. Gen. (2) I, p. 252 (1884) (Scioa).
Podiceps fluviatilis capensis, Shell., Ibis, 1885, p. 418 (Somali).

a. Somali (Gurat?).

STUDIO SPERIMENTALE

SULLA

RIPRODUZIONE DELLA MUCOSA PILORICA

MEMORIA

DEL

Dott. R. VIVANTE

Assistente nel Laboratorio di Patologia generale della R. Università di Genova.

Approvata nell'Adunanza dell'11 Febbraio 1894

Griffini e Vassale pubblicarono nel 1888 (1) uno studio sperimentale sulla riproduzione delle ghiandole peptogastriche, ed era loro intenzione di estenderlo a quella delle ghiandole della mucosa pilorica, ma la grave spesa di tempo, cui la mortalità degli animali determinava, e le esigenze di altri lavori li obbligarono a sospendere le esperienze iniziate.

Ebbi dal prof. Griffini il conforto a continuarle, ed ora accingendomi ad esporne i risultati sento il dovere di rendergli qui pubbliche grazie per l'affetto con cui mi fu guida nell'ottenerli.

La struttura e la funzione delle ghiandole piloriche diedero in questi ultimi anni argomento a vivaci discussioni e negli studî dello Schwalbe (2), del Nussbaum (3), dell'Ebstein (4), del Grützner (5), dello Haidenhain (6), dell'Edinger (7), del Trinkler (8), del Bikfalvi (9), e di molti ancora troviamo espresse e combattute intorno a quelle

---

(1) Griffini e Vassale, *Sulla riproduzione della mucosa gastrica*, R. Accademia di medicina in Modena, 1888; " Beiträge zur pathol. Anat. und allg. Pathol. von Ziegler ", Bd. 3, S. 425, 1888.

(2) Schwalbe, *Beiträge zur Kenntniss der Drüsen in Darmwandung;* " Archiv für mikros. Anat. ", Bd. 8, 1872.

(3) Nussbaum, *Ueber den Bau und die Thätigkeit der Drüsen;* " Archiv für mikros. Anat. ", Bd. 16, 1879.

(4) Ebstein, *Beiträge zur Lehre vom Bau und der Function der sogenannten Magenschleimdrüsen,* Bd. 6, 1870.

(5) Grützner, *Ueber Bildung und Ausscheidung von Fermenten;* " Pflüger's Archiv ", Bd. 20, 1879.

(6) Haidenhain, *Physiologie der Absonderungsvorgänge;* " Hermann's Handbuch der Phys. ", Bd. 5, 1880.

(7) Edinger, *Zur Kenntniss der Drüsenzellen des Magens.;* " Archiv für mik. Anat. ", Bd. 17, 1880.

(8) Trinkler, *Ueber den Bau der Magenschleimhaut;* " Archiv für mik. Anat. ", Bd. 24, 1884.

(9) Bikfalvi K., *Beiträge zum feineren Bau der Magendrüsen;* " Orvos. hermèszet-tudomàny ", Ertesitö, 1887.

le opinioni più contraddittorie. Così mentre da taluno fu affermata l'analogia che corre fra ghiandole piloriche e ghiandole peptiche, o assoluta o ristretta ad uno solo degli elementi cellulari che le caratterizzano, da altri fu in tutto negata, e si volle ammettere invece una stretta parentela fra ghiandole piloriche e ghiandole del Brunner. Ora, lasciando da parte gli eccessi di alcune di tali affermazioni, che non possono spiegarsi se non con un difetto di osservazione, chè invero non so come si possano assegnare, p. e., a questi organi i caratteri delle ghiandole acinose, è certo che la storia del loro sviluppo e quella della loro rigenerazione tendono a dimostrarne la spiccata individualità: perchè se una legge generale regola lo sviluppo delle ghiandole piloriche e quello delle peptiche, non è meno vero che piccole differenze nei caratteri degli abbozzi primitivi, un'intensità diversa nel processo di proliferazione possono influire grandemente sulla loro struttura e per conseguenza sulla loro destinazione fisiologica.

Il processo di riproduzione delle ghiandole piloriche, seguito nella riparazione di lesioni artificialmente prodotte, non credo sia stato finora oggetto di studî speciali; ma poichè un tale processo riproduce più o meno fedelmente quello dello sviluppo embrionale, trovo utile ricordare quanto intorno a questo fu scritto. Prima del Toldt (1) che dello sviluppo della mucosa gastrica fece uno studio accurato e completo, poco si disse delle ghiandole piloriche, ed i varî autori che lo precedettero, il Laskowski (2), il Brand (3), il Koelliker (4), il Sewall (5) si limitarono a constatare ch'esse si sviluppano prima e più rapidamente delle peptiche. È merito del Toldt quello di aver affermato che sì per l'una varietà ghiandolare, come per l'altra, il processo di formazione si svolge interamente nello strato epiteliale, e di aver date anche per le ghiandole piloriche una storia particolareggiata del loro sviluppo. Secondo questo A. negli abbozzi primitivi di queste ghiandole non si riscontrerebbero le cellule rotondeggianti od ovoidali, a nucleo rotondo od irregolare, che concorrono a formare gli abbozzi delle ghiandole peptiche; ma alla loro formazione parteciperebbero esclusivamente cellule cilindriche a nucleo ovale, che se non influiscono molto per la loro forma su quella dell'abbozzo a cui appartengono, vi influiscono per il loro numero, rendendolo più ampio e più svasato. Gli otricoli primitivi, che derivano da questi abbozzi, si svilupperebbero rapidamente oltrepassando la superficie basale dello strato epiteliale, accolti entro infossamenti del tessuto connettivo sottomucoso; ed anche qui come per le ghiandole peptiche la suddivisione del corpo ghiandolare si effettuerebbe *per gettoni epiteliali che si elevano o dal fondo cieco della ghiandola o dalle sue pareti.* L'ulteriore sviluppo dell'organo avverrebbe o per aumento numerico delle cellule che lo compongono, o per alcuni cangiamenti nei loro caratteri primitivi, assumendo esse un contorno più fine e più netto, una granulazione del protoplasma

---

(1) Toldt, *Die Entwickelung der Drüsen des Magens.;* Aus dem LXXXII Bande der " Sitzb. der k. Akad. der Wiss. ", 1880.

(2) Laskowski, *Ueber Entwickelung der Magenwand;* " Sitzb. der k. Akad. d. Wiss. ", Bd. 58, 1868.

(3) Brand, *Beiträge zur Entwickelung der Magen und Darmwand*, Würzburg, 1877.

(4) Koelliker, *Entwickelungsgeschichte*, 2 Auflage, 1879.

(5) Sewall, *The developement and regeneration of the gastric glandular epithelium during foetal life and afther birth;* " Journal of Physiology ", vol. 1878.

più delicata e più rara. Solo nella terza settimana di vita extrauterina, e prima nel fondo che nelle pareti laterali del tubo ghiandolare, si noterebbe quella speciale evoluzione del nucleo per cui esso si dispone col massimo diametro perpendicolare all'asse della cellula. Con questi risultati in gran parte concordano quelli più recentemente ottenuti dal Salvioli (1) che affermò doversi riferire il primo delinearsi delle ghiandole gastriche ad una sproporzione fra l'ampiezza dello strato mesodermico ed il numero delle cellule dell'epitelio che vi è sovrapposto: gli elementi attivamente proliferanti di questo strato, sporgendo verso le parti che offrono minore resistenza, verso la cavità, cioè, dello stomaco, darebbero luogo a quei rialzi che limitano i primitivi infossamenti ghiandolari. Colla guida che lo studio diligente delle forme cariocinetiche gli offriva, seguì questo A. l'ulteriore sviluppo della mucosa gastrica, constatò il più rapido svolgimento delle ghiandole piloriche, e confermò il fatto già da Bizzozero e Vassale (2) osservato che le mitosi in esse sono molto più numerose che nelle peptiche e per più lungo tempo perdurano nei loro fondi ghiandolari. Col Toldt infine ammise la suddivisione dei tubuli ghiandolari come determinata da appendici epiteliali elevantisi dal loro fondo, ed assegnò in questo periodo una parte attiva al tessuto connettivo che li circonda.

Nel riferire ora i risultati delle mie ricerche avrò spesso motivo a notare come il processo di rigenerazione delle ghiandole piloriche segua l'andamento del loro sviluppo embrionale; ma avrò pure occasione ad avvertire come alcune fasi della loro riproduzione si scostino da quelle norme che dalle osservazioni sopra riferite emanano, e, senza voler escludere che tali differenze possano in realtà esistere, farò osservare come alcuni errori d'interpretazione possano facilmente farle supporre.

Lo studio della rigenerazione delle ghiandole piloriche feci esclusivamente sul cane, animale che meglio degli altri si presta all'esperienza, e che m'offriva l'opportunità d'instituire non solo degli utili confronti fra i miei risultati e quelli che si erano avuti precedentemente per le ghiandole peptiche, ma ancora di giovarmi degli utili ammaestramenti che in tale genere di ricerche mi venivano dal lavoro di Griffini e Vassale (3). Però, come ho avuto occasione di notare più sopra, a rendere lungo e faticoso il lavoro influì questa volta la grave mortalità degli animali, che, malgrado la precauzione d'un'antisepsi accurata, il digiuno assoluto nei primi giorni, e la massima cura nella successiva graduale alimentazione, soccombevano per ulcerazione della parete stomacale. Il raccogliersi del contenuto fortemente acido di preferenza nella regione pilorica è di grave ostacolo alla riparazione della ferita pel processo flogistico che vi determina: la forte emigrazione di leucociti, nello spessore

(1) Salvioli, *Alcune osservazioni intorno al modo di formazione e di accrescimento delle ghiandole gastriche;* Estr. dagli " Atti della R. Acc. delle Scienze in Torino ", vol. XXV, 1890.

(2) Bizzozero e Vassale, *Sulla riproduzione e sulla rigenerazione fisiologica degli elem. ghiandolari*, " Archivio delle Scienze mediche ", vol. XI, n. 12, p. 196, 1887.

(3) V. loc. cit.

dei margini e del fondo della ferita, solleva e stacca l'epitelio che man mano si forma, e li priva così di quanto vale a proteggerli dall'azione distruttiva del succo gastrico; siccome poi per evitare il restringersi soverchio della soluzione veniva anticipatamente rimossa anche una parte della tonaca muscolare, così facilmente si comprende come si potesse venire ad un'ulcerazione completa della parete dell'organo. Per questa sfortunata circostanza si dovettero, adunque, moltiplicare le esperienze, e ciò non solo perchè molti animali soccombettero, ma anche perchè molti di quelli sopravvissuti non presentarono, in rapporto al tempo trascorso, una riparazione proporzionatamente progredita. Così, p. e., la fig. 1ª, che rappresenta una delle prime fasi del processo rigenerativo fu tratta da una soluzione di 20 giorni, mentre le fig. 2, 3, 4, 5 che ne rappresentano fasi ulteriori corrispondono a soluzioni di data molto più recente.

L'atto operativo fu analogo a quello usato da Griffini e Vassale per lo studio della riproduzione delle ghiandole peptogastriche: fatta una ferita lineare sulla parete anteriore dello stomaco in vicinanza al piloro, si rendeva sporgente attraverso a quella la parete corrispondente posteriore spingendola con due dita, e dopo aver rimossa, disseccandola accuratamente, la mucosa, si assottigliava con precauzione la tonaca muscolare sottogiacente. Si applicava poi nel centro della soluzione un'ansa di filo che, rimanendo protrudente nella cavità gastrica, doveva servire di contrassegno, e, suturata, infine, alla Lembert la parete dell'organo e riunita con doppia sutura la ferita addominale, si teneva per due giorni a completo digiuno l'animale, ed in seguito si alimentava con poco latte e poi gradatamente con latte e un po' di pane. I pezzi raccolti dai molti cani, uccisi a tempi diversi dopo l'operazione, distesi e fissati con spilli su lamine di sovero, e su questi sollevati in modo da essere in ogni parte bagnati dal liquido, s'immergevano per 10-12 ore in alcool a 70°; poi, staccati dal sovero, e mantenuti per alcuni giorni in alcool a 90°, venivano coloriti col carminio all'allume, inclusi in paraffina e tagliati al microtomo in sezioni asseriate. Non ho creduto di ricorrere ad altri mezzi di fissazione e di colorazione, perchè quello adoperato serve benissimo a mantenere le forme cariocinetiche, ed offre il grande vantaggio di una maggiore semplicità: devo solo osservare come e per il volume considerevole dei pezzi esaminati, e più ancora per la durezza quasi legnosa cui assume la tonaca muscolare, riesca impossibile ottenere cogli ordinarî microtomi sezioni sottili a spessore costante, e come solo adoperando il microtomo di Cambridge, modificato dal Minot, io abbia potuto raggiungere lo scopo.

Se noi esaminiamo una soluzione di continuo 24 ore dopo essere stata eseguita, noi la vediamo coperta da una pseudomembrana fibrinosa che dal suo fondo si eleva a rivestire i margini, e che può in taluni punti raggiungere uno spessore rilevante. Essa non si mantiene di solito a lungo, chè nel tessuto connettivo e nei vasi si stabiliscono ben presto dei processi neoformativi per i quali un tessuto di granulazione la invade e la sostituisce: però in alcuni casi questa pseudomembrana perdura fino a stadî abbastanza avanzati, ed ostacola la rigenerazione dell'epitelio, che avanti

ad essa si arresta, o su di essa si ripiega. A questo stadio iniziale, al di sotto della pseudomembrana, si nota di solito una enorme massa di leucociti che, al centro della soluzione, infiltra il tessuto sottomucoso eventualmente rimasto o gli strati superficiali della tonaca muscolare, e, alla periferia, raggiunge le ghiandole più o meno intaccate dal tagliente. Ora, come fu già osservato per la mucosa del fondo dello stomaco, e come più recentemente fu, in questo stesso laboratorio, constatato per la mucosa uterina (1), è appunto a queste ghiandole, che si trovano in tutta vicinanza delle parti normali, che noi dobbiamo, nei primi giorni, portare la nostra attenzione, siccome quelle dalle quali anche in questo caso procede la riproduzione. Infatti, mentre molte di esse per la gravità dell'azione traumatica e per la deficiente nutrizione vanno interamente perdute, o per occlusione del loro sbocco si tramutano in cisti, in altre, rappresentate da residui ghiandolari più o meno cospicui, si svolge un processo di viva proliferazione per cui si rinnovano in gran parte gli elementi epiteliali che le rivestono, e successivamente si ricoprono gli spazî che fra esse sono interposti. Così è che ai margini della soluzione noi possiamo al 3° o 4° giorno notare dei tubuli semplici, corti che quei residui rappresentano e che potrebbero essere confusi con tubi veramente neoformati. E poichè la loro presenza in una soluzione ristretta potrebbe far credere ad una rapida rinnovazione della mucosa, mi sembra necessario lo stabilire fin d'ora quali sieno i caratteri per i quali questi tubuli semplicemente modificati si distinguono da quelli che più tardi si riproducono. I primi si avvertono fin dall'inizio del processo di riproduzione, quando cioè il fondo della ferita non è che in parte ricoperto da epitelio; si trovano verso le parti sane della mucosa, hanno forma spesso irregolare, per lo più sono inclinati sul piano della soluzione, e infine si rivestono di un epitelio basso, granuloso, poligonale o cubico: i secondi invece, come vedremo, non si riscontrano in soluzioni recenti, ma solo quando l'epitelio che le riveste s'è già fatto cilindrico; cilindriche pure, per quanto granulose, sono le cellule che li tappezzano, sono regolari di forma, normali sempre alla superficie dell'organo.

La proliferazione vivace degli elementi epiteliali, poi che al rivestimento dei residui ghiandolari, e a quello degli spazî che vi sono interposti, ha provveduto, non si arresta, ma dai tubuli, che più da vicino limitano la soluzione di continuo, vediamo partire uno strato d'epitelio che gradatamente si spinge a tappezzarne il fondo. Se fra il sesto e l'ottavo giorno studiamo delle sezioni di mucosa, non è difficile cogliere delle imagini analoghe a quella che dalla fig. 1ª è rappresentata. Noi vediamo, cioè, in *d* e in *d'* disegnati due residui ghiandolari, tappezzati da cellule basse, granulose e cubiche, che mantenendo questi caratteri ricoprono lo spazio che fra loro è interposto e che nel tubo *d'* a poco a poco si modificano per uniformarsi alle cellule dell'epitelio di rivestimento *(g)*, e nel tubo *d*, facendosi sempre più basse e più granulose, passano a rivestire *(f)* il fondo della ferita. A partire dal tubulo *d* l'epitelio presenta un graduale appiattimento delle sue cellule, che verso il centro della soluzione, nelle parti cioè più recentemente formate, assumono la forma prettamente pavimentosa. La proliferazione vivace delle cellule è attestata dalle numerose

(1) Bossi, *Sulla riproduzione della mucosa dell'utero*, Genova, 1891.

mitosi che sia nei tubuli modificati, sia nel nuovo epitelio di rivestimento si riscontrano: mitosi che, per la massima parte, corrispondono ad un piano di scissione così diretto da provare l'estendersi in superficie dello strato che si va formando. Anche qui, adunque, come per le ghiandole peptiche, come per le ghiandole della mucosa uterina, e come già fin dal 1883 il Griffini (1) ebbe a dimostrare per i dotti escretori delle ghiandole mucipare della trachea, l'epitelio di rivestimento si sviluppa da un epitelio che è esclusivamente ghiandolare. Vi ha così perfetta analogia fra i fatti che si osservano in condizioni patologiche e quelli che in condizioni normali si avverano: fatti che, dopo le ricerche numerose ed accurate del Bizzozero (2), non devono essere più riguardati come ipotesi, che possano, come dice lo Haidenhain, essere facilmente da altre migliori sostituite.

Il nuovo epitelio di rivestimento, originato, come si è detto, dai tubuli modificati dei bordi, crescendo continuamente si spinge man mano sul fondo della soluzione, fino a rivestire completamente lo strato di tessuto connettivo che va contemporaneamente neoformandosi. Nello stesso tempo le cellule epiteliali, a partire dai margini della soluzione e procedendo verso il centro di essa, vanno a poco a poco acquistando i caratteri di cellule cubiche ed alla fine, sempre più allungandosi, quello di cellule cilindriche. Così è che se noi rivolgiamo l'attenzione a quei tratti di epitelio in cui tale trasformazione è già avvenuta, in soluzioni, p. e., di 10 giorni, noi constatiamo facilmente come alle primitive cellule cubiche si sieno sostituite delle cellule cilindriche di una certa altezza, granulose, con nucleo ovale o subrotondo, fra le quali alcune in via di scindersi spiccano per il volume maggiore, per la forma ovoidale e per la trasparenza del loro protoplasma (fig. 2). Ora è precisamente a tale stadio dello sviluppo, quando cioè l'epitelio ha già acquistato i caratteri di cilindrico, che noi vi sorprendiamo, nelle parti meno recenti, degli aggruppamenti cellulari che possiamo ritenere come primo accenno alla neoformazione ghiandolare. La fig. 3, rappresenta appunto uno di tali aggruppamenti, che vediamo costituito da alcune cellule basse, piramidali, circondate da altre più allungate che sovra quelle s'incurvano e si adattano. Come una tale disposizione si effettui è facile comprendere. L'epitelio *d* in seno al quale il processo si svolge ha già il carattere d'un epitelio adulto, ed offre una resistenza agli spostamenti cui determinano le cellule *(a)* in via di attiva proliferazione, che qua e là in mezzo ad esso si trovano. Così gli elementi che da esse derivano *(b, b', b'')* non possono spostare in totalità le cellule vicine, e riescono solo a smuovere la base di alcune *(c, c', c'')* che vengono costrette ad incurvarsi ed assumere, per la pressione che da ogni parte su di esse si esercita, la forma allungata e ricurva che è segnata nella figura. Viene in tal maniera a delinearsi un aggregato di cellule, che all'esterno è costituito da elementi curvi, assottigliati con un nucleo quasi bastonciniforme, e all'interno da cellule basse con protoplasma più granuloso, con un nucleo rotondo e spinto alla base. È facile poi il comprendere come pel moltiplicarsi delle cellule proliferanti venga a rendersi più spiccata l'incli-

---

(1) Griffini, *Contribuzione alla patologia del tessuto epiteliale cilindrico;* Estr. dalle " Memorie della R. Accad. delle Scienze in Torino ", serie II, vol. XXXVI, 1884.

(2) Cfr. Bizzozero e Vassale, loc. cit. e Bizzozero, *Ueber die Schlauchförmigen Drüsen des Magendarmkanals etc.;* " Archiv f. mikr. anat. ", Bd. 33, 1889 e id. id., Bd. 40, 3 Heft, 1892.

nazione degli elementi che le circondano, i quali alla lor volta trattenuti dagli elementi che al loro esterno si trovano, obbligano quelli che sono al loro interno a crescere verso il tessuto connettivo sottoposto. È così che si formano i primi abbozzi delle ghiandole piloriche, abbozzi che presentano grande analogia con quelli che nello studio della rigenerazione delle ghiandole peptiche fu riscontrato. Però non si ha in questo caso la formazione di una cavità imbutiforme così ristretta come è quella che per le ghiandole peptiche fu rilevata, ed è appunto nella larghezza maggiore di questa cavità primitiva che noi possiamo già riconoscere l'origine dello sviluppo più rilevante che il vestibolo delle ghiandole piloriche assume di fronte a quello delle ghiandole peptiche. Ciò, come abbiamo detto, concorda esattamente con quanto il Toldt affermò, studiando lo sviluppo embrionale di questi organi: solo non si riesce a comprendere come egli escluda dalla formazione dei loro abbozzi le cellule rotondeggianti, isolate, situate nella profondità dello strato epiteliale, ch'egli notò in quelli delle ghiandole peptiche, e che, come è probabile, non sono altro che le cellule in mitosi che più sopra abbiamo descritto.

Col proliferare delle cellule centrali dell'abbozzo, e coll'inclinarsi sempre maggiore di quelle periferiche, l'aggruppamento cellulare protrude sempre più verso il tessuto connettivo sottostante ed assume la forma di un tubulo, che raggiunta così una certa lunghezza (fig. 4 *a*), comincia a presentare un differenziamento delle sue cellule. Si osserva, cioè, che le più superficiali si vanno facendo più trasparenti, mentre le più profonde si mantengono protoplasmatiche, e, attivamente proliferando, provvedono all'ulteriore sviluppo del tubo. Al tessuto connettivo non mi sembra di poter assegnare una parte attiva in tale allungamento, ammettendo che esso sospinga verso la cavità dello stomaco l'epitelio di rivestimento interghiandolare: se ciò fosse, si dovrebbero in questo trovare i segni di una proliferazione che provvedesse a rifornire gli elementi necessari alla maggiore superficie da rivestirsi, mentre gli spazi intertubulari e la parte alta dei tubuli sono costantemente rivestiti da epitelio mucoso. Il connettivo coll'aumentare uniformemente non fa che fornire lo spazio necessario al maggiore accrescimento dei tubuli ghiandolari, le cui cellule profonde, attivamente proliferando, dànno luogo ad altre cellule che, frapponendosi alle preesistenti, trovano nell'aumentato spessore della mucosa il modo di disporsi a tapezzare un maggior tratto di parete. Così il tubulo a poco a poco si allunga, e, mentre le cellule sue più superficiali e più inclinate vanno acquistando il carattere di cellule mucose, quelle più profonde, per un tratto più o meno lungo a seconda dello stadio, mantengono i caratteri di cellule protoplasmatiche proliferanti. È in tal maniera che da tubuli corti come quelli della fig. 4, si passa gradatamente a tubuli analoghi a quello della fig. 5, tratta da uno stadio di 17 giorni. A quest'epoca la mucosa ha raggiunto uno spessore che presso a poco eguaglia la metà di quello della normale, il connettivo si presenta meno ricco di cellule con discreta sostanza fibrillare, e i tubuli seguendo l'ampliarsi della mucosa raggiungono una rilevante lunghezza. Ad indicare però lo sviluppo più lento del connettivo in confronto a quello dell'epitelio, come anche una certa resistenza che il primo comincia ad offrire all'attività proliferante del secondo, si nota una certa ondulosità nel decorso dei tubuli che non presentano più quella regolarità che si osserva in stadi anteriori.

Alle cellule granulose, che prima tapezzavano le parti più alte, si sono andate

man mano sostituendo degli elementi che non presentano ormai alcuna differenza da quelli dell'epitelio di rivestimento, stipati, con un corpo trasparente, con un nucleo bastonciniforme allontanato dalla base. Le cellule protoplasmatiche, invece, conservando quei caratteri pei quali anche a stadî più avanzati si lasciano facilmente riconoscere, di forma cioè piramidale, granulose con un nucleo rotondo e sospinto verso la larga base d' impianto, a poco a poco cedono il posto alle mucose e si limitano a rivestire il fondo e un piccolo tratto della parete del tubo. Su quello che ho disegnato, la parte mucosa ne costituisce già i tre quinti superiori, e se si confronta con le imagini cui presentano le ghiandole peptiche a stadî di sviluppo consimili, si osserva come in quest'ultime la parte protoplasmatica conserva proporzioni molto maggiori.

Quando i tubuli primitivi hanno raggiunto il grado di sviluppo che abbiamo descritto, si può dire che si sieno già fissate le proporzioni che le fossette delle nuove ghiandole assumono, inquantochè nelle loro parti profonde si cominciano qua e là a sorprendere delle disposizioni cellulari che si devono interpretare come le prime traccie dei tubuli ghiandolari. Griffini e Vassale, nel lavoro più volte citato, malgrado le difficoltà da essi incontrate nel seguire il graduale sviluppo di questi tubuli, ammisero come probabile che qui si ripetano gli stessi fatti che per gli abbozzi ghiandolari si erano osservati nell' epitelio di rivestimento. Orbene a me più fortunato è riuscito di cogliere così chiaramente le varie fasi del processo da poter con tutta sicurezza stabilire il modo con cui esso si svolge: i tubuli ghiandolari si sviluppano dal fondo dei tubuli primitivi nella stessa maniera con cui questi si sviluppano dall'epitelio di rivestimento. Le cellule protoplasmatiche che tappezzano a quest'epoca la parte più bassa dei tubuli, conservano ancora vivace la capacità proliferativa, ma gli elementi a cui esse dànno origine trovano nell'epitelio adulto un ostacolo al loro sviluppo, e incapaci di spostare completamente le cellule vicine non riescono che ad allontanarne la base e ad inclinarle. Si formano così degli aggruppamenti cellulari costituiti al centro da elementi recentemente formati, e alla periferia da altri che sopra quelli s'incurvano e s'adattano. L'inclinazione degli elementi periferici (fig. 6, *b, b'*), si rende man mano più evidente col moltiplicarsi degli elementi centrali *(c, c', c'')*, ma raggiunta che quelli abbiano una certa obliquità, trovano nell'epitelio che li circonda *(a)* una resistenza tale da impedire non solo il loro ulteriore spostamento, ma da costringere gli elementi, che al loro interno proliferano, a protrudere nel tessuto connettivo circumambiente. Viene in tal maniera a delimitarsi una microscopica cavità che si presenta molto più ristretta di quella che negli abbozzi dell'epitelio di rivestimento abbiamo osservata, e che col continuarsi del processo proliferativo, cui attestano le numerose mitosi di tali aggruppamenti (fig. 7), si allunga in un canale imbutiforme, limitato nella sua parte più ristretta dall'estremità libera delle cellule cilindriche, e nella parte più larga dalle profonde più basse e piramidali. Così l'abbozzo epiteliale assume allungandosi la forma d'un tubulo (fig. 8), che con un'apertura ristretta comunica con la cavità, cui ormai possiamo dire vestibolare, e che col suo fondo cieco si spinge a ridosso degli strati superficiali della tonaca muscolare. Esso riproduce fedelmente quelle particolarità che abbiamo già notate nei tubuli primitivi: noi lo vediamo, cioè, nella sua parte più superficiale, tappezzato da cellule allungate, con nucleo ovale, gradatamente meno granulose quanto più sono alte, e,

nella sua parte profonda, tappezzato da cellule più basse e più granulose, a nucleo rotondo e sospinto alla base dell'elemento. Se vi ha una differenza fra i tubuli primitivi e quelli che ne derivano è tutta di forma: i primi cioè mantengono in tutto il loro decorso un calibro pressochè eguale, mentre i secondi assumono una forma otricolare a causa di una strozzatura (fig. 7, *b*, fig. 8, *b*) nel punto in cui essi si originano, strozzatura che sta ad indicare che la resistenza cui l'epitelio del fondo della fossetta presenta al moltiplicarsi delle cellule, è maggiore di quella che queste trovano nel connettivo che le circonda. Il processo di rigenerazione non segue, adunque, nella formazione dei tubuli secondarî, quelle norme che dal Toldt (1) e dal Salvioli furono date per il loro sviluppo embrionale: anzi ne è affatto contrario, chè mentre noi vediamo i tubuli svolgersi da bottoni epiteliali cavi che s'infossano nel tessuto circumambiente, quegli A. ne ammettono una origine indiretta da bottoni compatti o da pieghe della mucosa, che elevandosi dal fondo della ghiandola la suddividono. Ora io non voglio, come ho già detto, escludere che differenze vi abbiano fra sviluppo embrionale e processo di rigenerazione; ma posso affermare, per quanto riguarda quest'ultimo, che mai mi occorse di osservare un qualche fatto che anche lontanamente lasciasse supporre un simile processo di sviluppo. Del resto è difficile comprendere come per l'elevarsi di una prominenza dal fondo di un tubo, questo abbia a dividersi in due, chè, per quanto quella si allunghi e si allarghi, la cavità primitiva resterà sempre unica, più o meno occupata da questa appendice che le cresce nel mezzo. Si comprende come da un taglio longitudinale, che cada sul piano mediano di questi bottoni o di queste introflessioni, possa risultare l'imagine schematica di un tubulo suddiviso, ma da un taglio trasversale si avrà sempre l'imagine d'una cavità circolare che nella parte centrale presenta la sezione trasversa di quei bottoni o di quelle introflessioni. I veri tubuli ghiandolari si formano sicuramente nella forma che ho descritta, solo non posso escludere, per quanto me ne manchino le prove, che qualche tubo primitivo continuando ad allungarsi, e mantenendosi nella porzione inferiore, di calibro più ristretto, possa per ulteriori modificazioni dell'epitelio, e per qualche modificazione di forma, presentare successivamente un differenziamento in fossetta e tubulo.

Se noi ora confrontiamo le ghiandole piloriche e le ghiandole peptiche a questo momento della riproduzione, troviamo che mentre nelle prime i tubuli secondarî dipartono a preferenza dal fondo del tubulo primitivo, nelle seconde emanano a preferenza dalle pareti. Ciò dà ragione del maggiore sviluppo che le fossette ghiandolari assumono nella mucosa pilorica, e dimostra che, analogamente a quanto fu osservato nello sviluppo embrionale, le ghiandole di questa regione mantengono per più lungo tempo la loro capacità proliferativa. Infatti una tale differenza di contegno non si può spiegare se non coll'ammettere che nelle ghiandole peptiche le cellule non riescano a vincere, come quelle delle ghiandole piloriche, la resistenza del connettivo già stipato che ne tappezza il fondo, ma svolgano la loro attività verso il connettivo più lasso che fra le ghiandole è interposto. È solo in questa maniera

---

(1) Cfr. fig. 20 e 21 del lavoro di Toldt, loc. cit.
(2) Loc. cit.

indiretta che noi possiamo assegnare al connettivo una qualche influenza sulla formazione delle ghiandole, nelle quali, come vedremo, col procedere della riproduzione, si delineano meglio alcune particolarità indipendentemente dall'attività dell'epitelio.

A 24 giorni ho trovato le fossette ghiandolari meglio conformate che nello stadio di 21, tappezzate per la massima parte da cellule mucose che si arrestano solo a livello di quella strettura che viene chiamata *colletto*, e che viene determinata dallo staccarsi dei tubuli ghiandolari secondari. Tale strozzatura che per lo stiparsi poi del connettivo meglio si definisce (fig. 9, *b*, *b*) resta caratterizzata dalle cellule basse, granulose, in cui l'epitelio mantiene la sua attività proliferativa. Tali cellule, le sole in cui lungo tutto il processo di riproduzione si possono riscontrare i segni di tale attività, ricoprono intieramente la parete dei nuovi tubuli, i quali nel loro fondo cieco presentano appunto degli elementi oltremodo bassi e granulosi, a nucleo rotondo che ne occupa l'estremo esterno. Le mitosi vanno man mano rendendosi più scarse, ma nella ondulosità dei nuovi tubuli (fig. 9), di cui riesce impossibile in una sola sezione seguire il canale, che, come si scorge dal disegno, compare e scompare più volte nello stesso piano, abbiamo la prova del fatto che l'attività epiteliale si mantiene ancora molto più viva di quella del connettivo, che a tale periodo si presenta già ricco di sostanza fibrillare, e scarso di elementi cellulari. E che tale attività perduri lungo tempo ancora lo dimostrano i tubuli che si possono avere da stadi di 35 giorni, dove i tubuli non trovando uno spazio sufficiente, dopo aver raggiunto gli strati superficiali della tonaca muscolare, si adagiano sopra di questi e su di questi si allungano. A tale epoca dello sviluppo noi possiamo cogliere il primo accenno ad un'ulteriore modificazione che nella loro forma assumono gli elementi per acquistare il carattere di cellule ghiandolari. Noi vediamo cioè, che mentre nelle parti superiori de' tubuli l'epitelio mantiene quei caratteri che più sopra abbiamo descritti, nelle parti più basse gli elementi che lo costituiscono perdono a poco a poco la granulosità del loro protoplasma, ed il nucleo vi si dispone in maniera da presentare il suo massimo diametro normale alla direzione di prima. Il fatto è tanto più evidente quanto più ci avviciniamo al fondo cieco del tubulo, dove vediamo come le cellule divenute più trasparenti e più regolarmente cilindriche (fig. 10), presentano alla lor base il nucleo foggiato a mezza luna, a denotare la forma di piastra da esso assunta parallela alla base dell'elemento a cui appartiene. Tale modificazione comincia così negli elementi che tappezzano il fondo cieco dei tubuli ghiandolari, per continuarsi successivamente nelle loro parti superiori: e poichè in questi tratti così modificati noi non troviamo più alcuna mitosi, mi pare di poter asserire che già a questo stadio di 35 giorni la parte attiva dell'epitelio si è limitata ad una zona che dal colletto si estende per un tratto più o meno lungo del tubo ghiandolare. Avverrebbe, adunque, nel tratto inferiore delle ghiandole quello che si avvera nel tratto superiore; nel centro, cioè, dell'organo esisterebbe un focolaio di proliferazione, che mentre da una parte provvede alla rinnovazione degli elementi mucipari del vestibolo, dall'altra provvede alla produzione di quelli che tappezzano i tubuli ghiandolari propriamente detti. Ciò del resto corrisponde perfettamente a quanto si osserva nelle condizioni normali: chè se noi osserviamo la mucosa pilorica d'un cane, a completo sviluppo, noi vediamo che a partire dal colletto, i tubuli ghiandolari prima di presentare quei

caratteri che s'iniziano nello stadio che abbiamo or ora studiato, si offrono per un certo tratto tappezzati da cellule basse, granulose, qua e là in via di scissione, che devono di necessità provvedere alla riparazione di quelli elementi che ne occupano la parte maggiore e sottoposta, in cui colla più accurata osservazione non si riesce a sorprendere alcun segno di attività proliferante.

A quarantacinque giorni (1) le varie particolarità che caratterizzano le ghiandole piloriche si vanno facendo più spiccate e più nette, per quanto da un processo di riproduzione noi non possiamo aspettarci che tutto proceda nel modo facile e regolare con cui questi fatti si svolgono nello sviluppo embrionale. Le fossette, nella massima parte più lunghe e più ristrette delle normali, occupano la metà, o anche più, dello spessore della nuova mucosa, e i tubi che ne emanano, aumentati di numero tanto da poterne osservare in taluni casi quattro, raggiunta la tonaca muscolare, decorrono ad essa parallelamente per un tratto più o meno lungo. Soggetti alla costrizione che il connettivo, rendendosi più stipato, esercita sulla conformazione di tutta la ghiandola, essi si presentano più ristretti che nello stadio precedente, e le cellule dei loro fondi, per quanto ci appaiano ancora un po' granulose, lasciano scorgere il nucleo foggiato a semiluna così respinto alla periferia da delimitarne il contorno esterno. Insisto su questa peculiare disposizione perchè, col divenire permanente viene a costituire una nota differenziale importantissima fra queste cellule e quelle delle ghiandole peptiche che a nessun stadio di sviluppo, e tanto meno nell'animale adulto, ci presentano qualche cosa di simile. A quarantacinque giorni il connettivo intertubulare non ci presenta più differenze spiccate da quelle che circonda le ghiandole normali; la sostanza fibrillare vi è di molto aumentata, e qua e là cominciano a formarsi sottili fascetti di fibrocellule muscolari, che derivano dallo strato muscolare sottoposto. Si può ritenere, adunque, che a quest'epoca il processo di riparazione abbia quasi raggiunto quanto di meglio può dare, e, se si prescinde dal fatto che col progredire del tempo meglio si fissano i caratteri degli elementi cellulari, io credo che la regolarità maggiore delle fossette, lo sviluppo più rilevante dei tubuli ghiandolari che in stadî successivi si potranno riscontrare, più che ad un ulteriore perfezionamento degli organi riprodotti, sia da riferirsi al modo più o meno rapido con cui il processo si è fin dal principio incamminato. Nella fig. 11 ho rappresentato un tratto di soluzione al 170° giorno; in questo stadio in cui, a buon diritto, possiamo ritenere assolutamente finito il processo riproduttivo, la mucosa si mantiene di spessore inferiore al normale; le fossette vi restano inclinate contorte, e i tubuli che ne emanano sono così irregolarmente disposti, che riesce impossibile seguirli nella stessa sezione fino alla tonaca muscolare. La parte proliferativa dell'epitelio si è, come nelle ghiandole normali, limitata al colletto e al tratto iniziale dei tubuli ghiandolari, la cui parte maggiore è tappezzata da quelle cellule regolarmente cilindriche, trasparenti, a nucleo semilunare, che dànno loro un'impronta così caratteristica. Il tessuto connettivo interghiandolare s'è reso più stipato ancora che nelle condizioni normali, e si presenta attraversato da fasci cospicui di tessuto muscolare *(f)* che originati dalla

(1) Queste date non devono prendersi in modo assoluto, perchè, come fin da principio ho fatto osservare, lo sviluppo del processo non è proporzionato al tempo decorso dall'operazione.

tonaca sottostante s'insinuano fra i tubuli ghiandolari. In questo stadio, infine, vediamo confermate quelle differenze che siamo andati man mano notando fra ghiandole peptiche e ghiandole piloriche, che per lo sviluppo maggiore degli elementi mucipari, per i caratteri speciali degli elementi che ne tappezzano i tubuli, meritano d'essere da quelle così differenziate da giustificare, a mio avviso, la denominazione particolare che loro fu data di *mucogastriche*.

Ed ora riassumendo i fatti osservati, mi sembra di poterli raccogliere nelle conclusioni seguenti:

1° Che la mucosa che tappezza la porzione pilorica dello stomaco, rimossa per largo tratto e in tutto il suo spessore, si riproduce colla rinnovazione completa degli organi che vi hanno normalmente sede;

2° Che le ghiandole mucogastriche vi si sviluppano, come le peptiche, dall'epitelio di rivestimento, che a sua volta deriva dalle ghiandole che più da vicino limitano la soluzione di continuo;

3° Che i tubuli ghiandolari traggono origine, con processo analogo, dall'epitelio proliferante che tappezza le parti profonde delle nuove fossette, senza alcuna partecipazione del connettivo, o di appendici epiteliali che elevandosi dal loro fondo le suddividano;

4° Che la riproduzione delle ghiandole piloriche differisce da quella delle peptiche, per la forma degli abbozzi primitivi, per lo sviluppo maggiore delle fossette, per la derivazione diversa dei loro tubuli ghiandolari, per i caratteri che assumono le cellule che li tappezzano;

5° Che il processo di riproduzione, come quello dello sviluppo embrionale riesce a dimostrare la specificità delle 2 forme ghiandolari, che occupano lo spessore della mucosa gastrica.

10 Settembre 1893.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. — Sezione perpendicolare alla superficie di una soluzione di continuo di 20 giorni in cui per la difficoltata riparazione siamo ancora alle prime fasi del processo riproduttivo:

a, epitelio di rivestimento della mucosa pilorica non intaccata dal tagliente; *b,* sezione di tubulo ghiandolare occluso e tramutato in cisti; *c,* tessuto connettivo neoformato del fondo della soluzione; *d, d',* tubuli ghiandolari modificati dei bordi della soluzione; *e, f, g,* epitelio neoformato dall'epitelio dei residui ghiandolari che si trovano alla periferia della soluzione. Koristka. Oc. 3. Obb. 4. Camera chiara Zeiss.

Fig. 2. — Sezione perpendicolare alla superficie dell'epitelio di rivestimento neoformato da una soluzione di 10 giorni; *a, b,* cellule in mitosi. Koristka. Oc. 3. Obb. 8. Camera chiara.

Fig. 3. — Sezione verticale della soluzione precedente in un tratto più vicino ai bordi. Aggruppamento cellulare che rappresenta l'abbozzo primitivo di una ghiandola pilorica:

a, cellula in mitosi; *b, b', b'',* cellule basse, piramidali a nucleo rotondo e sospinto alla base dell'elemento recentemente formato che costituiscono la parte centrale dell'abbozzo, *c, c', c'',* cellule dell'epitelio di rivestimento neoformato che sulle precedenti s'incurvano e si adattano a costituire la parte periferica dell'abbozzo; *d, d',* epitelio di rivestimento neoformato, id. id.

Fig. 4. — Sezione verticale di due tubuli ghiandolari:

a, b, tubuli primitivi da una soluzione di 13 giorni; *c, c',* cellule profonde, protoplasmatiche in cui si mantiene vivace la capacità proliferativa; *d, d',* cellule più superficiali che vanno gradatamente assumendo i caratteri di quelle dell'epitelio di rivestimento. Koristka. Oc. 3. Ob. 6, id.

Fig. 5. — Sezione verticale di un tubulo ghiandolare primitivo da una soluzione di 17 giorni:

a, epitelio di rivestimento; *b,* porzione mucosa del tubulo che corrisponde circa a 2 quinti della sua lunghezza; *c,* porzione protoplasmatica nella quale si vedono due cellule in mitosi: Koristka. Oc. 2. Obb. 6, id.

Fig. 6. — Sezione verticale del fondo di un tubulo primitivo, da una soluzione di 21 giorni. Abbozzo di un vero tubulo ghiandolare:

a, cellule del fondo del tubulo primitivo, protoplasmatiche, qua e là in via di mitosi; *b, b',* cellule periferiche dell'abbozzo del tubo ghiandolare; *c, c', c'',* cellule centrali. Koristka. Oc. 3. Obb. 6, id.

Fig. 7, 8. — Stadî di sviluppo ulteriore dei tubuli ghiandolari presi da soluzione di 21 giorni:

a, a, epitelio del fondo del tubulo primitivo che costituisce il vestibolo della nuova ghiandola; *b, b'*, strozzatura (colletto) che si forma al punto di distacco del tubo ghiandolare; *c, c', c''*, cellule che tappezzano i tubuli ghiandolari neoformati, che mantengono il carattere di protoplasmatiche, qua e là in via di scissione. Koristka. Oc. 3. Obb. 6, id.

Fig. 9. — Porzione inferiore di una fossetta ghiandolare al 24° giorno, da cui si staccano due tubuli ghiandolari:

a, a', epitelio della fossetta ghiandolare; *b, b'*, colletto della nuova ghiandola; *c, c'*, tubuli ghiandolari contorti; *d, d'*, cellule del fondo dei tubuli ghiandolari, basse, granulose a nucleo rotondo, sospinto all'estremo esterno dell'elemento. Koristka. Oc. 2. Obb. 6, id.

Fig. 10. — Tubulo ghiandolare preso da una soluzione al 35° giorno. Il tubulo essendo contorto ci si presenta nella parte superiore in sezione verticale, nella inferiore in sezione trasversa:

a, a', epitelio della fossetta da cui il tubulo diparte; *b, b'*, colletto; *c, c', c''*, cellule del fondo del tubulo ghiandolare che cominciano ad assumere i caratteri di cellule veramente ghiandolari, più trasparenti, più regolarmente cilindriche e col nucleo foggiato a semiluna. Zeiss. Oc. 2. Obb. C. C. id.

Fig. 11. — Sezione verticale di una larga soluzione di continuo al 170° giorno:

a, epitelio di rivestimento; *b, b, b*, fossette ghiandolari; *c, c'*, tubuli ghiandolari contorti; *d, d', d''*, sezioni trasverse di tubuli ghiandolari; *e*, muscularis mucosae; *f*, fasci di tessuto muscolare che si spingono nel tessuto connettivo interghiandolare. Zeiss. Oc. 3. Obb. AA., id.

Dott. Vivante dis.

Lit. Salussolia Torino